0.0.1 Differentialrechnung

Einführung

Steigung einer Kurve im Punkt $P_0(x_0; y_0)$ – Tangente:

Wir wählen einen benachbarten Punkt $P(x; y)$ und bestimmen die Steigung m_s der Sekante P_0P.

$m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y-y_0}{x-x_0}$; (Differenzenquotient)

Wander der Punkt P auf der Kurve gegen den festen Punkt P_0, so strebt die zugehörige Sekante einer Grenzlage zu, mit der Steigung m_t (Tangentensteigung).

$$P \to P_0; \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} x & \to & x_0; \\ y & \to & y_0; \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} x & \to & x_0; \\ f(x) & \to & f(x_0); \end{array} \right\} \Rightarrow m_t = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0};$$

(Differentialquotient von f an der Stelle x_0)

Def.: Eine Funktion $f : x \mapsto f(x)$ heißt an der Stelle $x_0 \in D_f$ differenzierbar, wenn die zugehörige Differenzenquotientenfunktion $m_s = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ mit $x \in D_f \setminus \{x_0\}$ an der Stelle x_0 stetig ergänzbar ist, d.h. wenn $m_t = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (Differentialquotient) existiert. Der Grenzwert wird auch als **Ableitung** von f an der Stelle x_0 bezeichnet und man schreibt dafür $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$;

Beispiele: Ableitung an der Stelle x_0:

- Quadratfunktion:

  $f(x) = x^2;$

  $\Rightarrow f'(x_0) = 2x_0;$

- Identische Funktion:

  $f(x) = x;$

  $\Rightarrow f'(x_0) = 1;$

- Konstante Funktion:

  $f(x) = c;$

  $\Rightarrow f'(x_0) = 0;$

- Kubische Funktion:

  $f(x) = x^3;$

  $\Rightarrow f'(x_0) = 3x_0^2;$

- Betragsfunktion an der Stelle $x_0 = 0$:

  $f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{für } x < 0; \\ x & \text{für } x > 0; \end{cases}$

  Rechtsseitige Ableitung: $f_r'(0) = \ldots = 1$;

  Linksseitige Ableitung: $f_l'(0) = \ldots = -1$;

  $|x|$ ist an der Stelle $x_0 = 0$ nicht diffbar (Knickstelle).

- Wurzelfunktion:

  $f(x) = \sqrt{x}$;

  $f'(x_0) = \ldots = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$;

- Reziproke Funktion:

  $f(x) = \frac{1}{x}$;

  $$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x_0 - x}{x x_0 (x - x_0)} = \lim_{x \to x_0} -\frac{1}{x x_0} = -\frac{1}{x_0^2};$$

Die Ableitungsfunktion

Def.: Ist die Funktion f für alle $x \in D_f$ diffbar, so heißt f **in** $\mathrm{D_f}$ **diffbar**. Man nennt dann die Funktion $f' : x \mapsto f'(x); \quad x \in D_f$ die Ableitungsfunktion (kurz die Ableitung) von f. Die Rechenoperation, die f überführt in f', nennt man **Ableiten** oder **Differenzieren**.

Andere Schreibweisen für f': y', $f'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$; („$\mathrm{d}y$ nach $\mathrm{d}x$“), $f'(x) = \dot{f}(t)$;

Merke: Ist f an der Stelle x_0 diffbar, so ist f dort auch stetig. (Notwendig für die Diffbarkeit ist Stetigkeit.)

f diffbar; $\Rightarrow f$ stetig;

f nicht stetig; $\Rightarrow f$ nicht diffbar;

Ableitungsregeln

- Ableitung einer Summe: $f(x) = u(x) + v(x)$;

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{u(x)+v(x)-u(x_0)-v(x_0)}{x-x_0} = \\ &= \lim_{x\to x_0} \left[\frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0} + \frac{v(x)-v(x_0)}{x-x_0}\right] = \\ &= u'(x_0)+v'(x_0); \end{aligned}$$

(Summenregel)

- Konstanter Faktor: $f(x) = k \cdot u(x)$;

  $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{ku(x)-ku(x_0)}{x-x_0} = k \cdot u'(x_0)$; (Faktorregel)

  Ein konstanter Faktor bleibt beim Ableiten erhalten!

- Ableitung eines Produkts: $f(x) = u(x) \cdot v(x)$;

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{u(x)v(x)-u(x_0)v(x_0)}{x-x_0} = \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{u(x)v(x)-u(x_0)v(x)+u(x_0)v(x)+u(x_0)v(x_0)}{x-x_0} = \\ &= \lim_{x\to x_0} \left[v(x)\frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0} + u(x_0)\frac{v(x)-v(x_0)}{x-x_0}\right] = \\ &= u'(x_0)v(x_0)+v'(x_0)u(x_0); \end{aligned}$$

(Produktregel)

Kurz: $(uv)' = u'v + v'u$;

Tangente und Normale in einem Kurvenpunkt

Die Ableitung der Sinusfunktion

a) Im Ursprung

$f(x) = \sin x$; $\quad \sin(-x) = \sin x$; $\Rightarrow$ Symmetrie zum Ursprung

$f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - \sin 0}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \varphi(x)$;

$\varphi(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{-x} = \dfrac{\sin(x)}{x} = \varphi(x)$; $\Rightarrow$ Symmetrie zur y-Achse

Abschätzung für $0 < x < \frac{\pi}{2}$:

Flächenvergleich:

[Abbildung: $\sin x$, x und $\tan x$ am Einheitskreis]

$$\begin{array}{rcccl}
A_{\triangle OPQ} & < & A_{\triangleleft OPQ} & < & A_{\triangle ORQ}; \\
\frac{1}{2}\sin x & < & \pi r^2 \frac{x}{2\pi} & < & \frac{1}{2}\tan x; \\
\sin x & < & x & < & \tan x; \\
1 & < & \frac{x}{\sin x} & < & \frac{1}{\cos x}; \\
1 & > & \frac{\sin x}{x} & > & \cos x;
\end{array}$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1;$ (Wichtiger Grenzwert!)

Zusatz: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1;$

Beispiel: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{\sin 3x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x \cdot \frac{2}{3}}{\sin 3x} = \frac{2}{3};$

b) Ableitung von $f(x) = \sin ax$ **an der Stelle** x_0

$x \to x_0$: $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{\sin ax - \sin ax_0}{x - x_0} = \dfrac{2\cos\frac{ac+ax_0}{2}\sin\frac{ax-ax_0}{2}}{x - x_0} =$
$\dfrac{2\cos\left[\frac{a}{2}(x+x_0)\right]\sin\left[\frac{1}{2}(x-x_0)\right]}{(x-x_0)\frac{a}{2}\cdot\frac{2}{a}};$

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\left\{a\cdot\cos\left[\frac{a}{2}(x-x_0)\right]\frac{\sin\left[\frac{a}{2}(x-x_0)\right]}{\frac{a}{2}(x-x_0)}\right\} = a\cdot\cos ax_0;$$

Ergebnis: $(\sin ax)' = a\cdot\cos ax;$

analog: $(\cos ax)' = -a\cdot\sin ax;$

speziell: $(\sin x)' = \cos x; \quad (\cos x)' = -\sin x;$

Ableitung von Bewegungsgleichungen

Momentangeschwindigkeit aus der Weg-Zeit-Gleichung

$x(t) = \frac{1}{2}at^2;$

$\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t};$

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t_0-\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t} = \dot{x}(t_0);$$

Allgemein: $v(t) = \dot{x}(t) = at;$

Momentanbeschleunigung aus der Zeit-Geschwindigkeits-Gleichung

$$a(t_0) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{v(t_0+\Delta t)-v(t_0)}{\Delta t} = \dot{v}(t_0) = \ddot{x}(t_0);$$

$\Rightarrow a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t) = \text{const.};$

Bestimmung von Parabelscheiteln

Der Scheitel liegt dort, wo die Tangente die Steigung $m_t = f'(x) = 0$ hat.

Monotoniebereiche – relative Extrema

Merke: Ist $f'(x)$ im Intervall $I =]a, b[$ positiv (negativ), so ist $f(x)$ ist I streng monoton steigend (fallend).

Mögliche Kurvenverläufe:

a) $f'(x_0) > 0;$

b) $f'(x_0) < 0;$

c) $f'(x_0) = 0;$

$f'(x_0)$ wechselt das Vorzeichen von $-$ nach $+$: Rel. Minimum (TIP)

$f'(x_0)$ wechselt das Vorzeichen von $+$ nach $-$: Rel. Maximum (HOP)

$f'(x_0)$ wechselt das Vorzeichen nicht: Terassenpunkt (TEP)

Notwendige Bedingung für ein relatives Extremum an der Stelle x_0: $f'(x_0) = 0;$

Hinreichende Bedingung für ein Extremum ist ein VZW von $f'(x_0)$.

Alternativ: Die Ableitung von f hat ein Extremum, d.h. $f''(x_0) = 0$ (notwendige Bedingung). Hinreichend für einen TEP ist, wenn gilt: $f''(x_0) = 0$ und $f''(x_0)$ hat einen VZW.

Ergänzung: Hinreichendes Kriterium für ein Extremum an der Stelle x_0 ist, wenn gilt: $f'(x_0) = 0$ **und** $f''(x_0) \neq 0$, und zwar Minimum für $f''(x_0) > 0$ und Maximum für $f''(x_0) < 0$.

[Stetigkeit: $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0+} = f(x_0);$]

[Diffbarkeit an der Stelle $x_0 \Rightarrow$ Stetigkeit an der Stelle x_0]

[Grenzwert des Diffquotienten an der Stelle x_0 existiert $\Rightarrow$ Diffbarkeit an der Stelle x_0]