0.0.1 Eigenschaften von intervallweise stetigen Funktionen

Extremwertsatz

Ist f im **abgeschlossenen** Intervall $[a, b]$ stetig, so ist f dort **beschränkt** und besitzt ein absolutes Maximum und Minimum.

Zwischenwertsatz

Ist f im abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetig und ist $\mathrm{f}(a) \neq \mathrm{f}(b)$, so nimmt die Funktion jeden Zwischenwert y_0 zwischen $\mathrm{f}(a)$ und $\mathrm{f}(b)$ mindestens einmal an. D.h., es gibt zu jedem $y_0 \in [\mathrm{f}(a), \mathrm{f}(b)]$ mindestens ein $x_0 \in [a, b]$ mit $\mathrm{f}(x_0) = y_0$.

„Von f wird kein Wert zwischen $\mathrm{f}(a)$ und $\mathrm{f}(b)$ ausgelassen."

Nullstellensatz

Ist f in $[a, b]$ stetig und sind die Vorzeichen von $\mathrm{f}(a)$ und $\mathrm{f}(b)$ verschieden, so gibt es in $[a, b]$ mindestens eine Nullstelle x_0 mit $\mathrm{f}(x_0) = 0$.

Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Ist f im **abgeschlossenen** Intervall $[a, b]$ stetig und im offenen Intervall $]a, b[$ diffbar, so gibt es mindestens eine Stelle $x_0 \in]a, b[$, für die gilt: $\mathrm{f}'(x_0) = \dfrac{\mathrm{f}(b) - \mathrm{f}(a)}{b - a}$;

Geometrische Deutung: Es gibt in $]a, b[$ eine Stelle x_0, an der die Tangente an G_f parallel ist zur Sekante $(a, \mathrm{f}(a))$ und $(b, \mathrm{f}(b))$.

Anwendung zur linearen Approximation:

Sei $I = [x_0, x_0 + h]$. Dann gilt mit $d \in]0, 1[$:
$\mathrm{f}'(x_0 + d \cdot h) = \dfrac{\mathrm{f}(x_0 + h) - \mathrm{f}(x_0)}{x_0 + h - x_0}; \Rightarrow$
$\mathrm{f}(x_0 + h) = \mathrm{f}(x_0) + h \cdot \mathrm{f}'(x_0 + d \cdot h); \Rightarrow$
$\mathrm{f}(x_0 + h) \approx \mathrm{f}(x_0) + h \cdot \mathrm{f}'(x_0);$