0.0.1 Grenzwerte

Grenzwerte von Funktionen für $|x| \to \infty$

Allgemein: $f(x)$ hat für $x \to \infty$ den Grenzwert 0, wenn $|x|$ jede noch so kleine positive Zahl (meist stellvertretend mit ε bezeichnet) unterschreitet, wenn man nur x genügen groß macht.

x_s bezeichnet man auch als „Schwellenwert".

$f(x)$ hat für $x \to -\infty$ den Grenzwert 0, wenn es zu jedem noch so kleinen positiven ε einen Schwellenwert x_s gibt, so dass **für alle** $x < x_s$ gilt: $|f(x)| < \varepsilon$;

Def.: $f(x)$ hat für $x \to \infty$ ($x \to -\infty$) den Grenzwert a, wenn es zu jedem noch so kleinen positiven ε einen Schwellenwert x_s gibt, so dass für alle $x > x_s$ ($x < x_s$) gilt: $|f(x) - a| < \varepsilon$;

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{a}{x^n} = 0; \qquad a \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{N};$

Regeln für Grenzwerte

Sind f und g Funktionen mit $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$ und $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = b$, dann gilt:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) \pm \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = a \pm b;$
2. $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = a \cdot b;$
3. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} f(x)}{\lim\limits_{x\to\infty} g(x)} = \frac{a}{b}; \qquad b \neq 0; \qquad g(x) \neq 0$ für „hinreichend" große x;

Zusatz für Funktionen mit **bestimmter** Divergenz:

Aus $f(x) \to \infty$ für $x \to \infty$ folgt: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{f(x)} = 0;$

Analoge Sätze gelten für $x \to -\infty$.

Es gibt drei Fälle bei gebrochen rationalen Funktionen:

- Zählergrad $<$ Nennergrad $\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0;$
- Zählergrad = Nennergrad $\Rightarrow f$ ist konvergent;
- Zählergrad $>$ Nennergrad $\Rightarrow f$ ist divergent;

Schrankenfunktion (Majoranten)

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin x;$

Vermutung: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0;$

$|f(x)| = \left|\frac{1}{x} \cdot \sin x\right| = \frac{1}{2} \cdot |\sin x| \leq \frac{1}{x} \to 0$ für $x \to \infty;$

$\Rightarrow f(x) \to 0$ für $x \to \infty$; ($\frac{1}{x}$ ist Majorante für $|f(x)|$.)

f hat für $x \to \infty$ die Asymptote $y = g(x)$, wenn gilt: $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-g(x)) = 0;$

Grenzwerte von Zahlenfolgen

Allgemein gilt: Die geometrische Folge $a_\nu = a \cdot q^{\nu-1}$ ist für $|q| < 1$ konvergent mit dem Grenzwert Null.

Grenzwert der unendlichen geometrischen Reihe

$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} a\frac{q^n-1}{q-1} = \frac{a}{q-1} \cdot \lim\limits_{n\to\infty}(q^n - 1) = \frac{a}{1-q};$ für $|q| < 1;$

Ergebnis: Für $|q| < 1$ hat die geometrische Reihe $s_n = \sum\limits_{\nu=1}^{n} aq^{\nu-1}$ für $n \to \infty$ den Grenzwert $\frac{a}{1-q}$.

Grenzwert bei Funktionen für $x \to x_0$

Def.: f hat für $x \to x_0$ den Grenzwert a, wenn f in einer Umgebung von x_0 definiert ist und wenn gilt: $|f(x) - a| < \varepsilon$ (mit $\varepsilon > 0$) falls nur x „genügend“ nahe bei x_0 gewählt wird.

Schreibweise: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a;$

Methoden zur Berechnung:

„Kürzen“

$\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-x-2}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}(x + 1) = 2 + 1 = 3;$

„h-Methode“

Untersuchung in der „Nähe“ von x_0 durch die Substitution $x = x_0 \pm h$ (mit $h > 0$).

Im Beispiel: $\lim\limits_{x\to 2+} \frac{x^2-x-2}{x-2} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{4+4h+h^2-2-h-2}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{3h+h^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(3 + h) = 3 + 0 = 3;$

Zusammenfassung: Beim $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ lassen sich folgende Fälle unterscheiden:

$x_0 \in D_f$

a) $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$;
Grenzwert existiert nicht, Divergenz, Sprungstelle

b) $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0+} f(x) \neq f(x_0)$;
Grenzwert existiert (Konvergenz), f ist an der Stelle x_0 **nicht stetig**.

c) $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0)$;
Grenzwert existiert, f ist an der Stelle x_0 **stetig**.

$x_0 \notin D_f$

a) $|f(x)| \to \infty$ für $x \to x_0+$ oder $x \to x_0-$;
Unendlichkeitsstelle (mit bzw. ohne VZW), Divergenz

b) $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$;
Konvergenz, „Lochstelle“ (stetig ergänzbare Definitionslücke)

c) $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$; (aber beide Grenzwerte endlich)
Divergenz, gelochte Sprungstelle

Ergänzungen:

- Eine Funktion f ist an der Stelle $x_0 \in D_f$ **stetig**, wenn gilt:
  $\lim\limits_{x \to x_0-} = \lim\limits_{x \to x_0+} = f(x_0)$;
- Für die Grenzwerte $x \to x_0$ gelten die bekannten Grenzwertsätze in analoger Weise.