0.0.1 Umkehrfunktion

Ziel: Abbildung rückgänig machen, d.h.: $f^{-1}\Big(f(x)\Big) = x;$

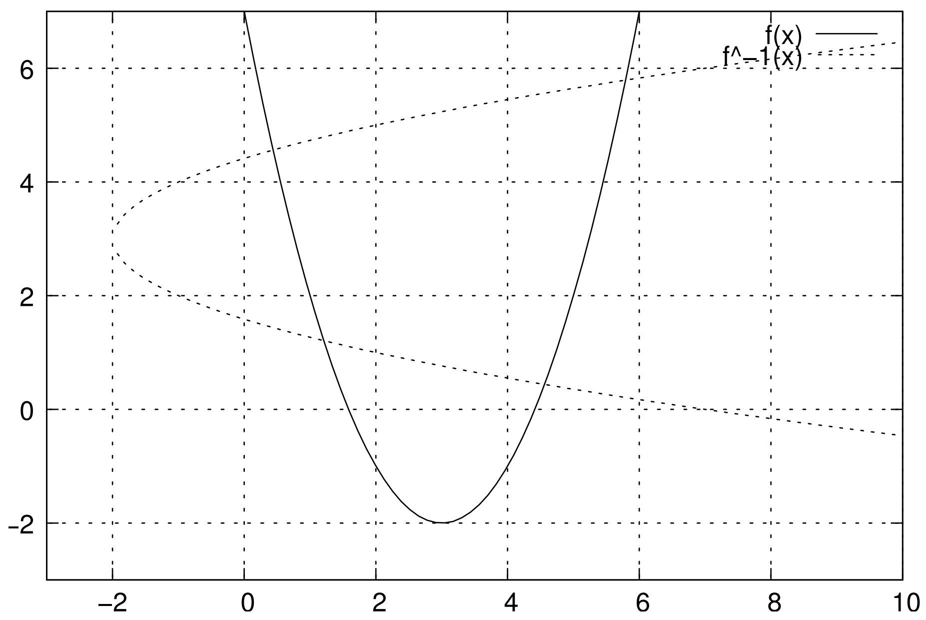
$x \in \mathbb{D}_f \xrightarrow{f} y \in \mathbb{W}_f = \mathbb{D}_{f^{-1}} \xrightarrow{f^{-1}} x \in \mathbb{D}_f = \mathbb{W}_{f^{-1}};$
Schritte:

1. Auflösen nach x
2. Vertauschen von x mit y

G_f und $G_{f^{-1}}$ sind spiegelbildlich bezüglich der Geraden $y = x$.
f ist **umkehrbar**.

Umkehrung einer quadratischen Funktion

Beispiel: $f(x) = (x-3)^2 - 2; \mathbb{D}_f = \mathbb{R}; \mathbb{W}_f = [-2; \infty[;$
Auflösen nach x: $x = 3 \pm \sqrt{y+2};$
$\Rightarrow f$ ist nicht umkehrbar.



Monotoniekriterium für Umkehrbarkeit:

Eine Funktion ist dann umkehrbar, wenn sie streng monoton ist.

Zerlegung von f in zwei streng monotone Teile:

- $f_1(x) = (x-3)^2 - 2;$
  $\mathbb{D}_{f_1} = \left]-\infty; 3\right];$
  $\mathbb{W}_{f_1} = \left[-2; \infty\right[;$
- $f_2(x) = (x-3)^2 - 2;$
  $\mathbb{D}_{f_2} = \left]3; \infty\right];$
  $\mathbb{W}_{f_2} = \left]-2; \infty\right[;$

Umkehrung: $y = 3 \pm \sqrt{2+x};$

- $f_1^{-1}(x) = 3 - \sqrt{x+2};$
  $\mathbb{D}_{f_1^{-1}} = \mathbb{W}_{f_1} = \left[-2; \infty\right[;$
  $\mathbb{W}_{f_1^{-1}} = \mathbb{D}_{f_1} = \left]-\infty; 3\right];$
- $f_2^{-1}(x) = 3 + \sqrt{x+2};$
  $\mathbb{D}_{f_2^{-1}} = \mathbb{W}_{f_2} = \left]-2; \infty\right[;$
  $\mathbb{W}_{f_2^{-1}} = \mathbb{D}_{f_2} = \left]3; \infty\right];$