08.05.2006

0.1 Die Exponentialfunktion

0.1.1 Einführende Beispiele

[. . .]

Allgemeine Struktur der auftretenden Gleichungen:

$\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(x_0) + \mathrm{f}(x_0)k\,(x - x_0)\,;\quad x \geq x_0$; mit einer Funktion $\mathrm{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;

Bemerkungen:

- Wird der Zins dem Kapital zugeschlagen, gilt die angegebene Gleichung nur bis zum Zeitpunkt t_Z des Zuschlags. Für $t > t_Z$ muss $K(t_0)$ durch $K(t_Z)$ ersetzt werden.

  Für je zwei geeignete Zeitpunkte t_1 und t_2 mit $t_1 < t_2$ gilt also:

  $K(t_2) = K(t_1) + K(t_1)k\,(t_2 - t_1)\,;$ 10.05.2006

  [Einschub:]
  $\mathrm{f}'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\mathrm{f}(x) - \mathrm{f}(x_0)}{x - x_0};$
  $\mathrm{f}'(x_0) \approx \frac{\mathrm{f}(x) - \mathrm{f}(x_0)}{x - x_0};$
  $\mathrm{f}'(x_0) \cdot (x - x_0) \approx \mathrm{f}(x) - \mathrm{f}(x_0);$
  $\mathrm{f}'(x_0) \cdot x - \mathrm{f}'(x_0) \cdot x_0 \approx \mathrm{f}(x) - \mathrm{f}(x_0);$
  $\mathrm{f}(x) \approx \underbrace{\mathrm{f}(x_0) + \mathrm{f}'(x_0)x - \mathrm{f}'(x_0)x_0}_{\mathrm{t}(x)};$

  $\mathrm{f}(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{f}^{(k)}(x_0) \cdot (x - x_0)^{(k)}}{k!}$; (Taylorreihe, [Lagrangereihe bei negativen k])

- Auch in den restlichen Beispielen gilt die jeweilige Gleichung für $t = t_0 + \Delta t$ bzw. $x = x_0 + \Delta x$ nur für entsprechend kleine Δt bzw. Δx. Beim radioaktiven Zerfell etwa muss nach einer Zeitdauer $\Delta t \ll$ Zerfallsdauer die Zahl der nicht zerfallenen Atome aktualisiert werden.

- Überträgt man obige Überlegung auf f, ergibt sich für beliebige x_1, x_2 unter der Voraussetzung der Differenzierbarkeit

$$f(x_2) = f(x_1) + k f(x_1) \cdot (x_2 - x_1)\,;$$
$$\lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2 - x_1} = \lim_{x_2 \to x_1} k f(x_1) = k f(x_1);$$

12.05.2006

0.1.2 Wie sieht der Funktionsterm von f aus?

Zurück: $k = 1$;

$f'(x) = f(x)$;

Geometrische Bedeutung: Steigung und Funktionswert an einer Stelle sind gleich.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k;$$

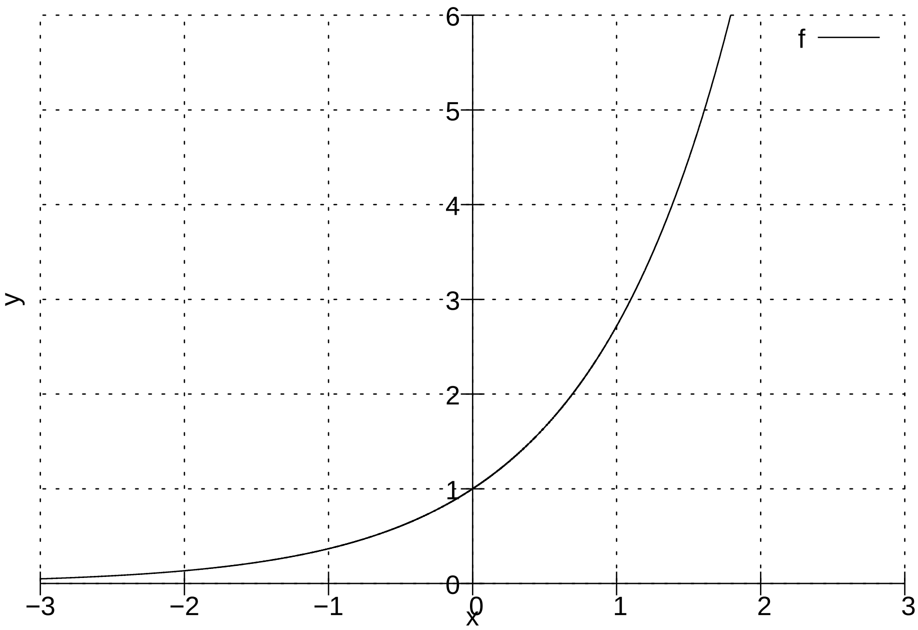
$$f'(x) = 0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1} = \sum_{j=0}^{\infty} a_{j+1}\,(j+1)\,x^j;$$

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2\cdot3} + \frac{x^4}{2\cdot3\cdot4} + \dots = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!};$$

$f(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$;

$f'(x) = f(x)$;

$f(0) = 1 = f'(0)$;



$\mathrm{f}(x)$ lässt sich auch in der Form e^x schreiben, also das Exponentialfunktion mit $e = \lim\limits_{|x|\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ (EULERsche Zahl, $\approx 2{,}7$).

$\mathrm{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, \quad x \mapsto e^x$ (natürliche Exponentialfunktion)

Auch $\varphi(x) = ae^x$, $a \neq 0$ erfüllt die Bedingungen.

$\lim\limits_{x\to\infty} e^x = \infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$; ($x$-Achse ist Asymptote für $x \to -\infty$)

$k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

$\mathrm{f}_k(x) = ae^{kx}$;

$\mathrm{f}_k'(x) = ae^{kx}\,(kx)' = kae^{kx} = k\mathrm{f}_k(x)$;

Rechengesetze für Potenzen vgl. B. S. 77. 19.05.2006

0.1.3 Ableitung beliebiger Exponentialfunktionen

$\mathrm{g}(x) = b^x; \quad b > 0; x \in \mathbb{R}$;

$\mathrm{g}(x) = \left(e^{\ln b}\right)^x = e^{x\cdot\ln b}$;

$\mathrm{g}'(x) = x^{x\cdot\ln b} \cdot \ln b = \left(e^{\ln b}\right)^x \cdot \ln b = b^x \cdot \ln b$;