

0.1 Funktion und Umkehrfunktion

Eine Funktion $f: A \rightarrow B$ ordnet jedem $x \in A$ (**Definitionsmenge**) **genau** einen Wert $y \in B$ (Zielbereich) zu; man schreibt dafür $y = f(x)$ und nennt $f(x)$ den Funktionsterm von f für das Argument (die Variable) x .

Ist jedes $y \in B$ auch Funktionswert von f , so heißt f surjektiv.

Folgt für alle $x_1, x_2 \in A$ mit $x_1 \neq x_2$, dass $f(x_1) \neq f(x_2)$, so heißt f injektiv.

Die Menge aller Funktionswerte von f heißt **Wertemenge** von f .

Die Umkehrfunktion von f **soll** jedem Element aus B „sein“ (genau ein) Element aus A zuordnen. Dazu muss f bijektiv¹ sein.

$$f: A \leftrightarrow B : f^{-1};$$

Für alle $a \in A$ gilt: $f^{-1}(f(a)) = a$;

Für alle $b \in B$ gilt: $f(f^{-1}(b)) = b$;

0.1.1 Speziell [bei der Exponentialfunktion]

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad x \mapsto e^x;$$

f ist echt monoton steigend auf der Definitionsmenge, also injektiv.

31.05.2006

„Mathematik ist wie ein Brennspeigel, die nur betrachtet, was eh schon da ist“

„Da ist die alte Frage, mit wem sprech´ ich denn, wenn ich mit spreche...? Und wer bin ich wirklich...?“

Für jedes $y \in \mathbb{R}^+$ gibt es ein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = e^x = y$. Also ist f surjektiv.

$\Rightarrow f$ ist umkehrbar. Umkehrfunktion f^{-1} von f :

$$f^{-1}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad y = e^x \mapsto x = \ln y;$$

Trägt man auch die Argumentwerte von f^{-1} auf der Rechtswertachse und die Funktionswerte von f^{-1} auf der Hochwertachse auf (Spiegelung an der Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten), ergibt sich der Graph von f^{-1} .

¹injektiv und surjektiv

$$f^{-1}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \ln x;$$

0.1.2 Zusammenhang zwischen der Ableitung von f und f^{-1} an sich entsprechenden Stellen

$$(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))} \stackrel{\text{speziell}}{=} \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))} = \frac{1}{x_0};$$

$$\text{Kurz: } (\ln x)' = \frac{1}{x};$$

Folgerungen:

- 1. Fall: $x > 0$: $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C = \ln |x| + C; \quad C \in \mathbb{R};$
- 2. Fall: $x < 0$: $\int \frac{1}{x} dx = \ln -x + C = \ln |x| + C; \quad C \in \mathbb{R};$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C; \quad C \in \mathbb{R};$$