21.09.2005

Teil I
Mathematik

1 Analysis

1.1 Stetigkeit und Differenzierbarkeit

1.1.1 Stetigkeit

f stetig in x_0; $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(x_0)$;[1]

1.1.2 Differenzierbarkeit

f ist diffbar an der Stelle x_0; $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\mathrm{f}(x)-\mathrm{f}(x_0)}{x-x_0}$ existiert;

Dieser Grenzwert heißt Ableitung von f an der Stelle x_0 und wird mit $\mathrm{f}'(x_0)$ bezeichnet.

(Ist x_0 Randpunkt von D_f, so sind die Grenzwerte einseitige.)

1.1.3 Satz des Hausmeisters

f ist diffbar auf $]a, b[$, stetig auf $]a, b]$ und $\lim\limits_{x\to b-} \mathrm{f}'(x)$ existiert.

$\Rightarrow$ f ist an der Stelle b von links diffbar, und es gilt:

$\mathrm{f}'_\mathrm{l}(b) = \lim\limits_{x\to b-} \mathrm{f}'(x)$;

Bemerkungen:

- Eine entsprechende Aussage gilt für die rechtsseitige Diffbarkeit.
- f ist an der Stelle x_0 diffbar genau dann, wenn gilt:
  $\mathrm{f}'_\mathrm{l}(x_0) = \mathrm{f}'_\mathrm{r}(x_0)$;

[1] Grenzwert von links und von rechts, wenn möglich

1.1.4 Beispiel

Betrachtet werden die Funktionen f und g mit

$D_\mathrm{f} =]a, b]\,; \quad D_\mathrm{g} =]b, c[\,;$

und die Funktion h mit

$$\mathrm{h}(x) = \begin{cases} \mathrm{f}(x) & \text{für } x \in]a, b]\,; \\ \mathrm{g}(x) & \text{für } x \in]b, c[\,; \end{cases}$$

d.h. $D_\mathrm{h} =]a, c[\,;$

f und g besitzen die Stammfunktionen F und G.

Beschreibe eine Vorgehensweise, um herauszufinden, ob h eine Stammfunktion besitzt und gib gegebenfalls eine an.

Vorläufiges H:

$$\mathrm{H}(x) = \begin{cases} \mathrm{F}(x) & \text{für } x < b; \\ \mathrm{G}(x) & \text{für } x > b; \end{cases}$$

$$\lim_{x \to b} \mathrm{H}(x) = \mathrm{H}(b);$$

$$\lim_{x \to b-} \mathrm{H}(x) = \lim_{x \to b-} \mathrm{F}(x);$$

$$\lim_{x \to b+} \mathrm{H}(x) = \lim_{x \to b+} \mathrm{G}(x);$$

1. Fall: Einer der Grenzwerte existiert nicht.
2. Fall: Beide Grenzwerte existieren und stimmen überein.

   Diesen Grenzwerte nehmen wir als $\mathrm{H}(b)$.
3. Fall: Beide Grenzwerte existieren – etwa φ und γ –, aber stimmen nicht überein.

   Wir verwerfen das alte $\mathrm{H}(x)$ und nehmen

   $$\mathrm{H}(x) = \begin{cases} \mathrm{F}(x) & \text{für } x < b; \\ \varphi & \text{für } x = b; \\ \underbrace{\mathrm{G}(x) + \varphi - \gamma}_{\text{Neues } \mathrm{G}(x)} & \text{für } x > b; \end{cases}$$

Überprüfung auf Differenzierbarkeit an der Stelle b:

1. Methode: Grenzwert des Differenzenquotienten

   $\lim\limits_{x\to b-} \frac{\mathrm{H}(x)-\mathrm{H}(b)}{x-b} = \lim\limits_{x\to b-} \frac{\mathrm{F}(x)-\mathrm{H}(b)}{x-b}$;

   $\lim\limits_{x\to b+} \frac{\mathrm{H}(x)-\mathrm{H}(b)}{x-b} = \lim\limits_{x\to b+} \frac{\mathrm{G}(x)-\mathrm{H}(b)}{x-b}$;

   Stimmen diese Grenzwerte überein, ist H Stammfunktion von h, andernfalls nicht.

2. Methode: Satz des Hausmeisters

   Nach Konstruktion ist H stetig an der Stelle b.

   $\lim\limits_{x\to b-} \mathrm{F}'(x) = \lim\limits_{x\to b-} \mathrm{f}(x)$;

   $\lim\limits_{x\to b+} \mathrm{G}'(x) = \lim\limits_{x\to b+} \mathrm{g}(x)$;

   Wenn die beiden Grenzwerte existieren und gleich sind, ist $\mathrm{H}(x)$ diffbar. Wenn ferner $\mathrm{H}'(b) = \mathrm{f}(b)$ gilt, ist H eine Stammfunktion von h.