27.08.2006

0.1 Stichpunkte

0.1.1 Ziel der Facharbeit

- Systematischer Aufbau der verschiedenen konventionellen Zahlbereiche ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$)
- Ideen hinter dem Aufbau
- Alternativer Ansatz durch die surrealen Zahlen

0.1.2 Zahlbegriff

- Abstraktion
- Gemeinsamkeiten zwischen Mengen:

  Drei Autos, drei Äpfel, etc. $\rightarrow 3$
- Zählen

0.1.3 Natürliche Zahlen

- Mehrere äquivalente ($\rightarrow$ isomorphe) Möglichkeiten, damit freie Wahl der Realisierung (zwecks Praktikabilität (Computer), einfacheren Denkens etc.)
- Beim Aufbau der natürlichen Zahlen können wir nur wenig voraussetzen. Beispielsweise wäre „$\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} | n > 0\}$“ unpraktisch, weil wir in dieser Definition bereits $\mathbb{Z}$ verwenden.

[Problematik $\mathbb{N} \in \mathbb{Z}$]

Natürliche Zahlen nach Peano

[Eigentl. Peano-Dedekindsche Axiome, siehe »http://de.wikipedia.org/wiki/Nat%C3%

- Es gibt eine kleinste natürliche Zahl. Diese bezeichnen wir beispielsweise mit 0.
- Es gibt eine Nachfolgerfunktion S (engl. Successor), die einer natürlichen Zahl ihren (eindeutigen) Nachfolger („$+1$“) zuordnet. Jede natürliche Zahl hat einen Nachfolger.

  S würde man als streng monoton steigend bezeichnen. Problematisch bei dieser Kategorisierung ist, dass – wenn man die Zahlen selbst erst definiert – das mächtige Werkzeug der Kurvendiskussion etc. noch nicht zur Verfügung hat.

  Man kann aber die Bedingung umformulieren: Haben zwei Zahlen den gleichen Nachfolger, so sind die zwei Zahlen gleich. In Formeln: $S(m) = S(n) \Leftrightarrow m = n$
- Die Menge der natürlichen Zahlen ist dann:

  $\mathbb{N} = \{0, S(0), S(S(0)), S(S(S(0))), \ldots\}$
- Der Einfachheit halber definiert man Namen für die Zahlen, die durch wiederholte Anwendung der Nachfolgerfunktion entstehen: $1 := S(0)$, $2 := S(1)$, etc.
- Bisher haben wir jetzt also die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ und S, wir können also Zählen.

– Addition

Jetzt können wir Addition definieren. Da wir als einzige Operation bisher nur das Zählen kennen, müssen wir Addition irgendwie aufs Zählen zurückführen.

- Addiert man zu einer beliebigen natürlichen Zahl 0, so ist das Ergebnis die gleiche natürliche Zahl: $n + 0 := n$
- Addiert man zu einer natürlichen Zahl n den Nachfolger einer natürlichen Zahl m, so ist das Ergebnis der Nachfolger der Summe von n und m: $m + S(n) := S(m + n)$

Diese Definition ist rekursiv, d.h. sie führt auf sich selbst zurück. Beispiel:

$2+3 = 2+S(2) = S(2+2) = S(2+S(1)) = S(S(2+1)) = S(S(2+S(0))) = S(S(S(2+0))) = S(S(S(2))) = 5$

Abschnittsweise definiert:

$$m + n := \begin{cases} m & \text{falls } n = 0 \\ S(m + n_{-1}) & \text{sonst, mit } n = S(n_{-1}) \end{cases}$$

Der Term, der nicht auf die Addition zurückgreift – der für $n = 0$ –, nennt man auch Rekursionsanfang (oder engl. base case), den anderen Ast Rekursionsschritt.

Die Idee hinter dieser Definition ist, dass das Zählen – das Inkrementieren – „herausgezogen“ wird: Um beispielsweise zu 2 3 dazuzuzählen, zählt man zuerst von der 0 beginnend zur 2, also zur $S(S(0))$. Dann zählt man noch dreimal weiter: $S(S(S(2))) = S(S(S(S(S(0))))) = 5$.

– Subtraktion

Subtraktion kann man ebenfalls rekursiv definieren.

- Als Fall, der die Rekursion „bricht“, nutzt man die Subtraktion von 0: $m - 0 := m$
- Die Differenz des Nachfolgers einer Zahl m und des Nachfolgers einer Zahl n ist die Differenz von m und n: $S(m) - S(n) := m - n$
- Für alle anderen Fälle ist die Subtraktion nicht definiert.

Geschrieben als abschnittsweise Definition:

$$m - n := \begin{cases} m & \text{falls } n = 0 \\ m_{-1} - n_{-1} & \text{sonst, mit } m = S(m_{-1}) \text{ und } n = S(n_{-1}) \\ \text{undefiniert} & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Idee hinter dem Rekursionsschritt ist, dass Differenz „relativ“ ist:

$5 - 3 = S(4) - S(2) = 4 - 2 = S(3) - S(1) = 3 - 1 = S(2) - S(0) = 2 - 0 = 2$

– Multiplikation

Multiplikation kann ebenfalls rekursiv definiert werden.

Als Rekursionsanfang dient die Multiplikation mit 0:

$n \cdot 0 := 0$

Der Rekursionsschritt kann man so herleiten, wie auch Multiplikation in der Grundschule [hier Referenz anführen] beigebracht wird:

$$n \cdot m = \underbrace{n + n + \cdots + n + n}_{m \text{ Mal}}$$

Oder, rekursiv formuliert:

$$n \cdot S(m) = \underbrace{n + n + \cdots + n + n}_{S(m) \text{ Mal}} = \underbrace{n + n + \cdots + n + n}_{m \text{ Mal}} + n$$

Also:

$$n \cdot m := \begin{cases} 0 & \text{falls } m = 0 \\ n + n \cdot m_{-1} & \text{sonst, mit } m = S(m_{-1}) \end{cases}$$

– Division

Die letzte noch fehlende Grundrechenart [Thematik „**Grund**rechenart“ eingehen?] ist die Division.

Als Rekursionsanfang nutzen wir:

$0 : n = 0$, falls $n \neq 0$.

Den Rekursionsschritt können wir wie folgt herleiten:

$\frac{m}{n} = \frac{m+(n-n)}{n} = \frac{(m-n)+n}{n} = \frac{m-n}{n} + 1$

Also:

$$m : n := \begin{cases} \text{undefiniert} & \text{falls } n = 0 \\ 0 & \text{falls } m = 0 \text{ und } n \neq 0 \\ (m-n) : n + 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

[„Korrektheit“ der Definitionen; Herleitung der Definitionen nur als Stütze; kein Weg, Definitionen herzuleiten, da Definitionen Definitionen sind]

[Überprüfung der Definitionen, dass bspw. nirgendwo $0 = S(n)$ steht etc.]

– Vergleichsoperatoren

Noch nicht definiert haben wir die Vergleichsoperatoren. [Nur $=$ und $\neq$; dazu genauer eingehen, dass wir das nicht definieren müssen (Stichwort structural equality)]

Anstatt zu jedem der vier noch fehlenden Vergleichsoperatoren $\leq$, $<$, $>$, $\geq$ zu versuchen, eine Definition zu finden, überlegen wir zuerst, ob man nicht einige Vergleichsoperatoren durch andere ausdrücken kann.

Das geht in der Tat. Üblicherweise nimmt man $\leq$ als Basis und leitet die anderen davon ab. [Referenz und Fußnote, dass man das auch bei den surrealen Zahlen so macht]

$n > m \Leftrightarrow n \nleq m$

$n \geq m \Leftrightarrow n > m$ oder $n = m$

$n < m \Leftrightarrow n \leq m$ und $n \neq m$

Wir müssen also nur $\leq$ definieren. Dabei nutzen wir die Eigenschaften der Nachfolgerfunktion aus und nutzen wieder Rekursion. Wir definieren:

$n \leq n$

$n \nleq 0$, falls $n \neq 0$

$n \leq m \Leftrightarrow n \leq m_{-1}$ mit $m = S(m_{-1})$

Beispiel:

$2 \leq 5 = S(4) \Leftrightarrow 2 \leq 4 = S(3) \Leftrightarrow 2 \leq 3 = S(2) \Leftrightarrow 2 \leq 2 \Leftrightarrow$ wahr

– Natur des Anfangselements 0 und der Nachfolgerfunktion S

In den Definitionen der Grundrechenarten oben haben wir nirgends Anforderungen an die Struktur von 0 und S gestellt. Das lässt verschiedene Realisationen zu.

Wir kennen das bereits vom abstrakten Vektorraum: Ein Vektor kann ein Tripel reeller Zahlen sein, oder im entarteten, ein-dimensionalen Vektorraum, eine reelle Zahl selbst etc.

Eine Realisation wäre beispielsweise:

$0 := \varnothing$; 0 ist die leere Menge.

$S(M) := M \cup \{x\}$ mit einem eindeutig festgelegten $x \notin M$; zum Zählen fügt man ein Element der Menge hinzu.

Beispiel:

$0 = \varnothing$

$1 = S(0) = \{\text{Apfel}\}$

$2 = S(1) = \{\text{Apfel}, \text{Birne}\}$

$3 = S(1) = \{\text{Apfel}, \text{Birne}, \ldots\}$

Nimmt man für x in der Definition von $S(M)$ M, erhält man:

$0 := \varnothing$

$1 = 0 \cup \{0\} = \{0\}$

$2 = 1 \cup \{1\} = \{0, 1\}$

$3 = 2 \cup \{2\} = \{0, 1, 2\}$

Also:

$S(M) := M \cup \{M\}$

In dieser Realisation kann $\leq$ auf $\in$ zurückgeführt werden: $n \leq m \Leftrightarrow n \in m$ [Referenz]

Anderes Beispiel:

$0 :=$ Nichts tun

$1 =$ Klopfen

$2 =$ Klopfen, dann erneut Klopfen

Also:

$S(n) := n$ dann Klopfen

All diese Definitionen sind äquivalent, in dem Sinne, als dass zwischen jeder Menge der natürlichen Zahlen, die jeweils gebildet wird, zu jeder anderen ein Isomorphismus besteht.

Beispiel:

Nichts tun $\mapsto \varnothing$

Klopfen $\mapsto \{\varnothing\}$

Klopfen, dann Klopfen $\mapsto \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

etc.

[Notation n_{-1}; Erklärung, dass man „von rechts nach links“ lesen muss] 04.11.2006

0.1.4 Ganze Zahlen

- Verschiedene Ansätze zur Definition der ganzen Zahlen und der Operationen auf den ganzen Zahlen denkbar.

Ganze Zahlen als Verknüpfung der positiven Zahlen mit zwei Symbolen

$\mathbb{Q} := \mathbb{N}^+ \times \{+, -\} \cup \{0\}$

- Dahinter steckt die Idee, dass man die ganzen Zahlen als Verknüpfung der natürlichen Zahlen mit zwei Symbolen ansieht. Zahlen mit dem Symbol $+$ interpretiert man als positiv, Zahlen mit dem Symbol $-$ als negativ.
- Diese Idee mag einem zuerst in den Sinn kommen, hat jedoch einige Probleme, wenn es darum geht, die Verknüpfungen auf den ganzen Zahlen zu definieren:

  Es sind viele Fallunterscheidungen notwendig. [Hier Beispiele anführen? Verweis auf Anhang?]

  [Verwendung der bereits definierten Verknüpfungen der natürlichen Zahlen]

Ganze Zahlen als Paare natürlicher Zahlen

$\mathbb{Q} = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$

- Hinter dieser Definition steckt die Idee, dass man eine ganze Zahl als Differenz zweier natürlicher Zahlen sieht.

  Beispiel: $5 = 8 - 3,\ -3 = 0 - 3 = 1 - 4 = 2 - 5 = \cdots$
- Diese Definition lässt sehr elegante Definitionen der Verknüpfungen zu. Dabei werden die Verknüpfungen über die natürlichen Zahlen benutzt.

  [Doppeldeutigkeiten! Bedeutet $+$ die Addition auf den natürlichen oder den ganzen Zahlen? Unterscheidung durch Indizes, beispielsweise $+_{\mathbb{N}_0}$ oder $+_{\mathbb{Z}}$]
- Eine ganze Zahl hat in dieser Definition keine eindeutige Darstellung (siehe obiges Beispiel; $5 = 8 - 3 = 9 - 4 = 10 - 5 = \cdots$). Warum das ein Problem ist und wie man es lösen kann steht weiter unten.

– Addition

Zur Herleitung der Additionsvorschrift betrachten wir zwei ganze Zahlen, (a, b) und (α, β). Im Herleitungsprozess benutzen wir unser Wissen über äquivalente Termumformungen. [Hier auch wieder die Thematik mit der Korrektheit der Definitionen etc. anbringen. Auch nutzen wir in der Herleitung Verknüpfungen, die wir gar nicht vollständig definiert haben!]

$(a, b) + (\alpha, \beta) = (a - b) + (\alpha - \beta) = a - b + \alpha - \beta = a + \alpha - b - \beta = (a + \alpha) - (b + \beta) = (a + \alpha, b + \beta)$

Kurz: $(a, b) + (\alpha, \beta) := (a + \alpha, b + \beta)$

Diese Definition kommt ohne Fallunterscheidungen aus!

Beispiel: $\underbrace{(2, 3)}_{-1} + \underbrace{(9, 14)}_{-5} = (2 + 9, 3 + 14) = \underbrace{(11, 17)}_{-6}$

– Subtraktion

Es gibt zwei Möglichkeiten, die Subtraktion zu definieren: Einmal wie in der 7. Klasse über die Negation und einmal wie bei der Addition.

- **Definition über die Negation**

  Dazu müssen wir zunächst die Negation definieren. Dies gestaltet sich einfach:

  $-(a, b) = -(a - b) = -a - (-b) = -a + b = b - a = (b, a)$

  Kurz: $-(a, b) := (b, a)$

  Jetzt können wir die Subtraktion definieren:

  $(a, b) - (\alpha, \beta) := (a, b) + [-(\alpha, \beta)] = (a, b) + (\beta, \alpha) = (a + \beta, b + \alpha)$

- **Definition über Herleitung wie bei der Addition**

  $(a, b) - (\alpha, \beta) = (a - b) - (\alpha - \beta) = a - b - \alpha + \beta = a + \beta - b - \alpha = (a + \beta) - (b + \alpha) = (a + \beta, b + \alpha)$

Es spielt also keine Rolle, welchen Weg man zur Herleitung hernimmt. [Bedeutung als nachträgliche Rechtfertigung, unser Wissen über Minusklammern, Kommutativität etc. auszunutzen]

Beispiel: $\underbrace{(2, 3)}_{-1} - \underbrace{(9, 14)}_{-5} = (2 + 14, 3 + 9) = \underbrace{(16, 12)}_{4}$

[Bemerkung, dass diese Definitionen nicht rekursiv sind, und dass das gut ist, wegen der Zeitkomplexität etc.]

– Multiplikation

$(a, b)\cdot(\alpha, \beta) = (a - b)\cdot(\alpha - \beta) = a\alpha - a\beta - b\alpha + b\beta = (a\alpha + b\beta) - (a\beta + b\alpha) = (a\alpha + b\beta, a\beta + b\alpha)$

Beispiel: $\underbrace{(2, 3)}_{-1} \cdot \underbrace{(9, 14)}_{-5} = (2 \cdot 9 + 3 \cdot 14, 2 \cdot 14 + 3 \cdot 9) = \underbrace{(60, 55)}_{5}$

[Bemerkung, dass es nicht schlimm ist, dass die Zahlen größer werden; Bemerkung, dass, wenn es einen doch stört, man „kürzen“ kann; Verweis auf Normalisierung weiter unten]

– Division

Die Division kann leider nicht so einfach hergeleitet werden.

- Der Weg über die Herleitung wie bei Addition und Multiplikation schlägt fehlt:

  $\frac{(a,b)}{(\alpha,\beta)} = \frac{a-b}{\alpha-\beta} = ?$

- Der alternative Weg, Division als Multiplikation mit dem Kehrbruch zu definieren, schlägt ebenfalls fehl, da es nicht möglich ist, den Kehrbruch einer ganzen Zahl zu definieren:

  $\frac{1}{z}$ ist, außer für $z = \pm 1$ und $z = 0$, keine ganze Zahl!

- Wir müssen daher die Division ein bisschen umständlich definieren:

  $\frac{x}{y} = \frac{|x|}{|y|} \cdot \operatorname{sgn} x \cdot \operatorname{sgn} y$

  wobei wir mit $\frac{|x|}{|y|}$ folgendes meinen:

  $\frac{|x|}{|y|} = \left(\frac{|x|}{|y|}, 0\right)$, wobei mit der Division auf der rechten Seite die bereits definierte Division über die natürlichen Zahlen gemeint ist. [XXX formal nicht so einfach, die $|x|$ und $|y|$ ganze Zahlen, nicht natürliche Zahlen sind. Aber einfacher Isomorphismus zwischen den nichtnegativen natürlichen Zahlen und den nichtnegativen ganzen Zahlen. Ähnlich wie $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. Kasten?]

- Es fehlen noch die Definitionen der Betragsfunktion $|\cdot|$ und der Signumfunktion sgn.

  Die Betragsfunktion können wir auf die Signumfunktion zurückführen: $|x| := x \cdot \operatorname{sgn} x$

  $$\operatorname{sgn}(a,b) := \begin{cases} -1 & \text{für } a < b \\ 0 & \text{für } a = b \\ 1 & \text{für } a > b \end{cases}$$

  (Diese Definition bedient sich der Vergleichsoperatoren über die natürlichen Zahlen.)

– Vergleichsoperatoren

- **Gleichheit und Ungleichheit**

  Anders als bei den natürlichen Zahlen sind bei unserer Definition der ganzen Zahlen die Definitionen der Gleichheit und Ungleichheit nicht sofort offensichtlich.

  Herleitung:

  $(a,b) = a - b = \alpha - \beta = (\alpha, \beta)$

  Herüberbringen von b und β ermöglicht es, die Gleichheit auf den ganzen Zahlen auf die Gleichheit auf den natürlichen Zahlen zurückzuführen:

  $a + \beta = \alpha + b$

  Kurz: $(a,b) = (\alpha,\beta) \Leftrightarrow a + \beta = \alpha + b$

- **Kleinergleich**

  Wie bei den natürlichen Zahlen wollen wir auch bei den ganzen Zahlen nicht jede der fehlenden Vergleichsoperatoren ($<$, $\leq$, $\geq$, $>$) einzeln definieren, sondern nur $\leq$ erklären. Die anderen Vergleichsoperatoren ergeben sich dann daraus.

  Zur Herleitung erfolgt analog zur Definition der Gleichheit:

  $(a,b) = a - b \leq \alpha - \beta = (\alpha, \beta)$

  Herüberbringen von b und $\beta\ldots$

  $a + \beta \leq \alpha + b$

  Kurz: $(a,b) \leq (\alpha,\beta) \Leftrightarrow a + \beta \leq \alpha + b$

– Eindeutigkeit der Repräsentation

Das Problem wurde schon kurz zu Beginn des Kapitels und bei der Definition der Gleichheit angerissen: Bei unser Definition der ganzen Zahlen ist die Repräsentation einer Zahl nicht eindeutig.

Das erklärt auch, wieso wir die Gleichheitsrelation definieren mussten.

[XXX noch mehr darauf eingehen, wieso das ein Problem ist]

Es gibt nun zwei klassische Wege, das Problem zu lösen.

- **Normalisierung**

  Beim Weg über die Normalisierung definiert man eine Normalisierungsfunktion, die einer beliebigen Repräsentation einer ganzen Zahl eine eindeutige Repräsentation zuweist.

  Eine Normalisierungsfunktion könnte beispielsweise sein:

  $$n\colon (a,b) \mapsto n(a,b) := \begin{cases} (a-b,0) & \text{für } a \geq b \\ (0,b-a) & \text{für } a < b \end{cases}$$

  Danach definiert man die Menge der ganzen Zahlen und die Verknüpfungen neu:

  $\mathbb{Z}' := \{n(x) \,|\, x \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{Z}$

  $x +_{\mathbb{Z}'} y := n(x +_{\mathbb{Z}} y)$

  $x -_{\mathbb{Z}'} y := n(x -_{\mathbb{Z}} y)$

  $x \cdot_{\mathbb{Z}'} y := n(x \cdot_{\mathbb{Z}} y)$

  etc.

  Nachteil an dieser Methode kann sein, dass sie dem persönlichen Geschmack nicht entspricht: Es sieht so aus, als ob die ursprünglichen Definitionen bzw. die Ideen hinter den Definitionen unzureichend sind und eine nachträgliche Anpassung benötigen.

- **Äquivalenzklassen**

  Ein alternativer Weg geht über Äquivalenzklassen. Die Idee ist, eine Zahl als die Menge aller Repräsentationen zu definieren, die äquivalent (=) zur Zahl sind. Man schreibt $[x]$, wenn man die Äquivalenzklasse meint.

  In Formeln: $[x] = \{r \in \mathbb{Z} \,|\, r = x\}$

Beispiel: $[(3,0)] = \{(3,0),(4,1),(5,2),\ldots\}$

Diese Mengen sind unendlich groß; das ist aber kein Problem, da man zum Rechnen nur ein einziges Element benötigt.

Die Menge der ganzen Zahlen definiert man dann auf:

$\mathbb{Z}' := \{[x] \,|\, x \in \mathbb{Z}\}$

Auch muss man die Verknüpfungen anpassen:

$[x] +_{\mathbb{Z}'} [y] := [x +_{\mathbb{Z}} y]$ etc.

Der Einfachheit wegen kann man zusätzlich noch die Zahlensymbole neu definieren:

$0_{\mathbb{Z}'} := [0_{\mathbb{Z}}]$

$1_{\mathbb{Z}'} := [1_{\mathbb{Z}}]$ etc.

[Äquivalenzklassen auch bei den Brüchen und surreallen Zahlen]

[Äquivalenzklassen auch im Alltag; beispielsweise die Zahl 3 als Menge aller Mengen mit drei Elementen]

0.1.5 Rationale Zahlen

Zur Definition der rationalen Zahlen werden wir ähnlich verfahren wie bei der Definition der ganzen Zahlen als Paare zweier natürlicher Zahlen.

Dieser Ansatz ist bei den rationalen Zahlen über die Repräsentation über die Bruchschreibweise offensichtlich.

Also: $\mathbb{Q} := \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$

Beispiel: $-2{,}5 = \frac{-5}{2} = (-5,2) = ((0,5)\,,(2,0))$

Anders als bei der Definition der ganzen Zahlen müssen wir hier eine Einschränkung treffen – Null darf nicht im Nenner stehen.

Die Repräsentation ist wie bei den ganzen Zahlen nicht eindeutig: In $\mathbb{Q}$ kommen ungekürzte Brüche vor und negative gekürzte Brüche haben jeweils zwei Repräsentationen, $(-a,b)$ und $(a,-b)$. Zur Lösung werden wir Äquivalenzklassen einsetzen.

Die Definition der Rechenoperatoren übernehmen wir von der Einführung in der 6. Klasse.

Addition

Herleitung über Bildung des Hauptnenners:

$(a, b) + (\alpha, \beta) = \frac{a}{b} + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{a\beta}{b\beta} + \frac{\alpha b}{b\beta} = \frac{a\beta+\alpha b}{b\beta} = (a\beta + \alpha b, b\beta)$

Die Addition über den rationalen Zahlen führen wir also auf die Addition über den ganzen Zahlen zurück, die ihrerseits auf die Addition über den natürlichen Zahlen zurückführt. [Bemerkung irgendwo, dass es keine Rolle spielt, welche Repräsentation der natürlichen Zahlen zugrundeliegt.]

Subtraktion

Herleitung über Negation:

$(a, b) - (\alpha, \beta) = (a, b) + [-(\alpha, \beta)] = (a, b) + (-\alpha, \beta) = (a\beta - \alpha b, b\beta)$

Alternativ:

$(a, b) - (\alpha, \beta) = (a, b) + [-(\alpha, \beta)] = (a, b) + (\alpha, -\beta) = (-a\beta + \alpha b, -b\beta)$

Die beiden Definitionen sind äquivalent, was Ausklammern von (-1) im Zähler und Kürzen mit (-1) bestätigt.

Multiplikation

$(a, b) \cdot (\alpha, \beta) = \frac{a}{b}\frac{\alpha}{\beta} = \frac{a\alpha}{b\beta} = (a\alpha, b\beta)$

Es zeigt sich eine beeindruckende Symmetrie zur Definition der Addition bei den ganzen Zahlen: Vertauscht man $\cdot$ durch $+$, erhält man die Definition der Addition über die ganzen Zahlen! [XXX wieso?]

Division

Herleitung über das Inverse:

$$\frac{1}{(a, b)} = \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a} = (b, a)$$

$(a, b) : (\alpha, \beta) = (a, b) \cdot (\beta, \alpha) = (a\beta, b\alpha)$

[XXX wieder beeindruckende Symmetrie]

Vergleichsoperatoren

– Gleichheit

$(a,b) = \frac{a}{b} = \frac{\alpha}{\beta} = (\alpha, \beta)$

Herüberbringen von b und β bringt:

$a\beta = \alpha b$

Kurz: $(a,b) = (\alpha,\beta) \Leftrightarrow a\beta = b\alpha$

– Kleinergleich

$(a,b) = \frac{a}{b} < \frac{\alpha}{\beta} = (\alpha, \beta) \Leftrightarrow$

$a\beta < b\alpha$, falls $b\beta > 0$

$a\beta > b\alpha$, falls $b\beta < 0$

(Der Fall $b\beta = 0$ kann nicht auftreten, da $b, \beta \neq 0$.)