Facharbeit

Ingo Blechschmidt

1. Mai 2007

Inhaltsverzeichnis

1 Facharbeit

1.1 Überlegungen zum Thema

- Einführung in den axiomatischen Aufbau der natürlichen, ganzen, rationalen, reellen und surrealen Zahlen
- Gründe für die Einführung der verschiedenen Zahlen; praktische Anwendungsgebiete (bzw. Hervorhebung und Begründung der „Praxislosigkeit“)
- Beweis der Gültigkeit der Gruppen-/Körperaxiome der genannten Zahlenmengen/-klassen (evtl. mit Auslassungen, insbesondere bei den surrealen Zahlen; Ziel soll nicht stures Abschreiben aus anderen Büchern sein)
- Einbettung von $\mathbb{N}/\mathbb{Z}/\mathbb{Q}/\mathbb{R}$ in $\mathbb{Z}/\mathbb{Q}/\mathbb{R}$/die surrealen Zahlen
- Abzählbarkeit/Überabzählbarkeit
- Permanenter Blick aufs Zählen; Definition der Verknüpfungen $+, -, \cdot, :$
- Unterstreichung der Eleganz des Aufbaus der surrealen Zahlen und Vergleich mit dem der reellen Zahlen
- Untersuchung der Praxisnähe der surrealen Zahlen; Einführung von Kurzschreibweisen etc.
- Konzepte der surrealen Zahlen im normalen Unterricht/Lehrstoff; Anwendungen (z.B. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ vs. $\frac{1}{\omega} = \varepsilon$)
- Eingehen auf die Thematik der „Erschaffung“ der natürlichen Zahlen „aus dem Nichts“ (Formulierung nach Keith Devlin)

27.08.2006

1.2 Stichpunkte

1.2.1 Ziel der Facharbeit

- Systematischer Aufbau der verschiedenen konventionellen Zahlbereiche ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$)

- Ideen hinter dem Aufbau
- Alternativer Ansatz durch die surrealen Zahlen

1.2.2 Zahlbegriff

- Abstraktion
- Gemeinsamkeiten zwischen Mengen:
  Drei Autos, drei Äpfel, etc. $\rightarrow 3$
- Zählen

1.2.3 Natürliche Zahlen

- Mehrere äquivalente ($\rightarrow$ isomorphe) Möglichkeiten, damit freie Wahl der Realisierung (zwecks Praktikabilität (Computer), einfacheren Denkens etc.)
- Beim Aufbau der natürlichen Zahlen können wir nur wenig voraussetzen. Beispielsweise wäre „$\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} | n > 0\}$“ unpraktisch, weil wir in dieser Definition bereits $\mathbb{Z}$ verwenden.

[Problematik $\mathbb{N} \in \mathbb{Z}$]

Natürliche Zahlen nach Peano

[Eigentl. Peano-Dedekindsche Axiome, siehe »http://de.wikipedia.org/wiki/Nat%C3%

- Es gibt eine kleinste natürliche Zahl. Diese bezeichnen wir beispielsweise mit 0.
- Es gibt eine Nachfolgerfunktion S (engl. Successor), die einer natürlichen Zahl ihren (eindeutigen) Nachfolger („$+1$“) zuordnet. Jede natürliche Zahl hat einen Nachfolger.

  S würde man als streng monoton steigend bezeichnen. Problematisch bei dieser Kategorisierung ist, dass – wenn man die Zahlen selbst erst definiert – das mächtige Werkzeug der Kurvendiskussion etc. noch nicht zur Verfügung hat.

  Man kann aber die Bedingung umformulieren: Haben zwei Zahlen den gleichen Nachfolger, so sind die zwei Zahlen gleich. In Formeln: $S(m) = S(n) \Leftrightarrow m = n$

- Die Menge der natürlichen Zahlen ist dann:
  $\mathbb{N} = \{0, S(0), S(S(0)), S(S(S(0))), \ldots\}$
- Der Einfachheit halber definiert man Namen für die Zahlen, die durch wiederholte Anwendung der Nachfolgerfunktion entstehen: $1 := S(0)$, $2 := S(1)$, etc.
- Bisher haben wir jetzt also die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ und S, wir können also Zählen.

– Addition

Jetzt können wir Addition definieren. Da wir als einzige Operation bisher nur das Zählen kennen, müssen wir Addition irgendwie aufs Zählen zurückführen.

- Addiert man zu einer beliebigen natürlichen Zahl 0, so ist das Ergebnis die gleiche natürliche Zahl: $n + 0 := n$
- Addiert man zu einer natürlichen Zahl n den Nachfolger einer natürlichen Zahl m, so ist das Ergebnis der Nachfolger der Summe von n und m: $m + S(n) := S(m + n)$

Diese Definition ist rekursiv, d.h. sie führt auf sich selbst zurück. Beispiel:

$2+3 = 2+S(2) = S(2+2) = S(2+S(1)) = S(S(2+1)) = S(S(2+S(0))) = S(S(S(2+0))) = S(S(S(2))) = 5$

Abschnittsweise definiert:

$$m + n := \begin{cases} m & \text{falls } n = 0 \\ S(m + n_{-1}) & \text{sonst, mit } n = S(n_{-1}) \end{cases}$$

Der Term, der nicht auf die Addition zurückgreift – der für $n = 0$ –, nennt man auch Rekursionsanfang (oder engl. base case), den anderen Ast Rekursionsschritt.

Die Idee hinter dieser Definition ist, dass das Zählen – das Inkrementieren – „herausgezogen“ wird: Um beispielsweise zu 2 3 dazuzuzählen, zählt man zuerst von der 0 beginnend zur 2, also zur $S(S(0))$. Dann zählt man noch dreimal weiter: $S(S(S(2))) = S(S(S(S(S(0))))) = 5$.

– Subtraktion

Subtraktion kann man ebenfalls rekursiv definieren.

- Als Fall, der die Rekursion „bricht“, nutzt man die Subtraktion von 0: $m - 0 := m$
- Die Differenz des Nachfolgers einer Zahl m und des Nachfolgers einer Zahl n ist die Differenz von m und n: $S(m) - S(n) := m - n$
- Für alle anderen Fälle ist die Subtraktion nicht definiert.

Geschrieben als abschnittsweise Definition:

$$m - n := \begin{cases} m & \text{falls } n = 0 \\ m_{-1} - n_{-1} & \text{sonst, mit } m = S(m_{-1}) \text{ und } n = S(n_{-1}) \\ \text{undefiniert} & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Idee hinter dem Rekursionsschritt ist, dass Differenz „relativ“ ist:

$$5-3 = S(4)-S(2) = 4-2 = S(3)-S(1) = 3-1 = S(2)-S(0) = 2-0 = 2$$

– Multiplikation

Multiplikation kann ebenfalls rekursiv definiert werden.

Als Rekursionsanfang dient die Multiplikation mit 0:

$$n \cdot 0 := 0$$

Der Rekursionsschritt kann man so herleiten, wie auch Multiplikation in der Grundschule [hier Referenz anführen] beigebracht wird:

$$n \cdot m = \underbrace{n + n + \cdots + n + n}_{m \text{ Mal}}$$

Oder, rekursiv formuliert:

$$n \cdot S(m) = \underbrace{n + n + \cdots + n + n}_{S(m) \text{ Mal}} = \underbrace{n + n + \cdots + n + n}_{m \text{ Mal}} + n$$

Also:

$$n \cdot m := \begin{cases} 0 & \text{falls } m = 0 \\ n + n \cdot m_{-1} & \text{sonst, mit } m = S(m_{-1}) \end{cases}$$

– Division

Die letzte noch fehlende Grundrechenart [Thematik „**Grund**rechenart“ eingehen?] ist die Division.

Als Rekursionsanfang nutzen wir:

$0 : n = 0$, falls $n \neq 0$.

Den Rekursionsschritt können wir wie folgt herleiten:

$\frac{m}{n} = \frac{m+(n-n)}{n} = \frac{(m-n)+n}{n} = \frac{m-n}{n} + 1$

Also:

$$m : n := \begin{cases} \text{undefiniert} & \text{falls } n = 0 \\ 0 & \text{falls } m = 0 \text{ und } n \neq 0 \\ (m-n) : n + 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

[„Korrektheit“ der Definitionen; Herleitung der Definitionen nur als Stütze; kein Weg, Definitionen herzuleiten, da Definitionen Definitionen sind]

[Überprüfung der Definitionen, dass bspw. nirgendwo $0 = S(n)$ steht etc.]

– Vergleichsoperatoren

Noch nicht definiert haben wir die Vergleichsoperatoren. [Nur $=$ und $\neq$; dazu genauer eingehen, dass wir das nicht definieren müssen (Stichwort structural equality)]

Anstatt zu jedem der vier noch fehlenden Vergleichsoperatoren $\leq$, $<$, $>$, $\geq$ zu versuchen, eine Definition zu finden, überlegen wir zuerst, ob man nicht einige Vergleichsoperatoren durch andere ausdrücken kann.

Das geht in der Tat. Üblicherweise nimmt man $\leq$ als Basis und leitet die anderen davon ab. [Referenz und Fußnote, dass man das auch bei den surrealen Zahlen so macht]

$n > m \Leftrightarrow n \not\leq m$

$n \geq m \Leftrightarrow n > m$ oder $n = m$

$n < m \Leftrightarrow n \leq m$ und $n \neq m$

Wir müssen also nur $\leq$ definieren. Dabei nutzen wir die Eigenschaften der Nachfolgerfunktion aus und nutzen wieder Rekursion. Wir definieren:

$n \leq n$

$n \nleq 0$, falls $n \neq 0$

$n \leq m \Leftrightarrow n \leq m_{-1}$ mit $m = S(m_{-1})$

Beispiel:

$2 \leq 5 = S(4) \Leftrightarrow 2 \leq 4 = S(3) \Leftrightarrow 2 \leq 3 = S(2) \Leftrightarrow 2 \leq 2 \Leftrightarrow$ wahr

– Natur des Anfangselements 0 und der Nachfolgerfunktion S

In den Definitionen der Grundrechenarten oben haben wir nirgends Anforderungen an die Struktur von 0 und S gestellt. Das lässt verschiedene Realisationen zu.

Wir kennen das bereits vom abstrakten Vektorraum: Ein Vektor kann ein Tripel reeller Zahlen sein, oder im entarteten, ein-dimensionalen Vektorraum, eine reelle Zahl selbst etc.

Eine Realisation wäre beispielsweise:

$0 := \varnothing$; 0 ist die leere Menge.

$S(M) := M \cup \{x\}$ mit einem eindeutig festgelegten $x \notin M$; zum Zählen fügt man ein Element der Menge hinzu.

Beispiel:

$0 = \varnothing$

$1 = S(0) = \{\text{Apfel}\}$

$2 = S(1) = \{\text{Apfel}, \text{Birne}\}$

$3 = S(1) = \{\text{Apfel}, \text{Birne}, \ldots\}$

Nimmt man für x in der Definition von $S(M)$ M, erhält man:

$0 := \varnothing$

$1 = 0 \cup \{0\} = \{0\}$

$2 = 1 \cup \{1\} = \{0, 1\}$

$3 = 2 \cup \{2\} = \{0, 1, 2\}$

Also:

$S(M) := M \cup \{M\}$

In dieser Realisation kann $\leq$ auf $\in$ zurückgeführt werden: $n \leq m \Leftrightarrow n \in m$ [Referenz]

Anderes Beispiel:

$0 :=$ Nichts tun

$1 =$ Klopfen

$2 =$ Klopfen, dann erneut Klopfen

Also:

$S(n) := n$ dann Klopfen

All diese Definitionen sind äquivalent, in dem Sinne, als dass zwischen jeder Menge der natürlichen Zahlen, die jeweils gebildet wird, zu jeder anderen ein Isomorphismus besteht.

Beispiel:

Nichts tun $\mapsto \varnothing$

Klopfen $\mapsto \{\varnothing\}$

Klopfen, dann Klopfen $\mapsto \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

etc.

[Notation n_{-1}; Erklärung, dass man „von rechts nach links" lesen muss] 04.11.2006

1.2.4 Ganze Zahlen

- Verschiedene Ansätze zur Definition der ganzen Zahlen und der Operationen auf den ganzen Zahlen denkbar.

Ganze Zahlen als Verknüpfung der positiven Zahlen mit zwei Symbolen

$\mathbb{Q} := \mathbb{N}^+ \times \{+, -\} \cup \{0\}$

- Dahinter steckt die Idee, dass man die ganzen Zahlen als Verknüpfung der natürlichen Zahlen mit zwei Symbolen ansieht. Zahlen mit dem Symbol $+$ interpretiert man als positiv, Zahlen mit dem Symbol $-$ als negativ.
- Diese Idee mag einem zuerst in den Sinn kommen, hat jedoch einige Probleme, wenn es darum geht, die Verknüpfungen auf den ganzen Zahlen zu definieren:

Es sind viele Fallunterscheidungen notwendig. [Hier Beispiele anführen? Verweis auf Anhang?]

[Verwendung der bereits definierten Verknüpfungen der natürlichen Zahlen]

Ganze Zahlen als Paare natürlicher Zahlen

$\mathbb{Q} = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$

- Hinter dieser Definition steckt die Idee, dass man eine ganze Zahl als Differenz zweier natürlicher Zahlen sieht.

  Beispiel: $5 = 8 - 3$, $-3 = 0 - 3 = 1 - 4 = 2 - 5 = \cdots$

- Diese Definition lässt sehr elegante Definitionen der Verknüpfungen zu. Dabei werden die Verknüpfungen über die natürlichen Zahlen benutzt.

  [Doppeldeutigkeiten! Bedeutet $+$ die Addition auf den natürlichen oder den ganzen Zahlen? Unterscheidung durch Indizes, beispielsweise $+_{\mathbb{N}_0}$ oder $+_{\mathbb{Z}}$]

- Eine ganze Zahl hat in dieser Definition keine eindeutige Darstellung (siehe obiges Beispiel; $5 = 8 - 3 = 9 - 4 = 10 - 5 = \cdots$). Warum das ein Problem ist und wie man es lösen kann steht weiter unten.

– Addition

Zur Herleitung der Additionsvorschrift betrachten wir zwei ganze Zahlen, (a, b) und (α, β). Im Herleitungsprozess benutzen wir unser Wissen über äquivalente Termumformungen. [Hier auch wieder die Thematik mit der Korrektheit der Definitionen etc. anbringen. Auch nutzen wir in der Herleitung Verknüpfungen, die wir gar nicht vollständig definiert haben!]

$(a, b) + (\alpha, \beta) = (a - b) + (\alpha - \beta) = a - b + \alpha - \beta = a + \alpha - b - \beta = (a + \alpha) - (b + \beta) = (a + \alpha, b + \beta)$

Kurz: $(a, b) + (\alpha, \beta) := (a + \alpha, b + \beta)$

Diese Definition kommt ohne Fallunterscheidungen aus!

Beispiel: $\underbrace{(2, 3)}_{-1} + \underbrace{(9, 14)}_{-5} = (2 + 9, 3 + 14) = \underbrace{(11, 17)}_{-6}$

– Subtraktion

Es gibt zwei Möglichkeiten, die Subtraktion zu definieren: Einmal wie in der 7. Klasse über die Negation und einmal wie bei der Addition.

- **Definition über die Negation**

  Dazu müssen wir zunächst die Negation definieren. Dies gestaltet sich einfach:

  $-(a,b) = -(a-b) = -a-(-b) = -a+b = b-a = (b,a)$

  Kurz: $-(a,b) := (b,a)$

  Jetzt können wir die Subtraktion definieren:

  $(a,b)-(\alpha,\beta) := (a,b)+[-(\alpha,\beta)] = (a,b)+(\beta,\alpha) = (a+\beta, b+\alpha)$

- **Definition über Herleitung wie bei der Addition**

  $(a,b)-(\alpha,\beta) = (a-b)-(\alpha-\beta) = a-b-\alpha+\beta = a+\beta-b-\alpha = (a+\beta)-(b+\alpha) = (a+\beta, b+\alpha)$

Es spielt also keine Rolle, welchen Weg man zur Herleitung hernimmt. [Bedeutung als nachträgliche Rechtfertigung, unser Wissen über Minusklammern, Kommutativität etc. auszunutzen]

Beispiel: $\underbrace{(2,3)}_{-1} - \underbrace{(9,14)}_{-5} = (2+14, 3+9) = \underbrace{(16,12)}_{4}$

[Bemerkung, dass diese Definitionen nicht rekursiv sind, und dass das gut ist, wegen der Zeitkomplexität etc.]

– Multiplikation

$(a,b)\cdot(\alpha,\beta) = (a-b)\cdot(\alpha-\beta) = a\alpha - a\beta - b\alpha + b\beta = (a\alpha+b\beta)-(a\beta+b\alpha) = (a\alpha+b\beta, a\beta+b\alpha)$

Beispiel: $\underbrace{(2,3)}_{-1} \cdot \underbrace{(9,14)}_{-5} = (2\cdot 9+3\cdot 14, 2\cdot 14+3\cdot 9) = \underbrace{(60,55)}_{5}$

[Bemerkung, dass es nicht schlimm ist, dass die Zahlen größer werden; Bemerkung, dass, wenn es einen doch stört, man „kürzen“ kann; Verweis auf Normalisierung weiter unten]

– Division

Die Division kann leider nicht so einfach hergeleitet werden.

- Der Weg über die Herleitung wie bei Addition und Multiplikation schlägt fehlt:

  $\frac{(a,b)}{(\alpha,\beta)} = \frac{a-b}{\alpha-\beta} = ?$

- Der alternative Weg, Division als Multiplikation mit dem Kehrbruch zu definieren, schlägt ebenfalls fehl, da es nicht möglich ist, den Kehrbruch einer ganzen Zahl zu definieren:

  $\frac{1}{z}$ ist, außer für $z = \pm 1$ und $z = 0$, keine ganze Zahl!

- Wir müssen daher die Division ein bisschen umständlich definieren:

  $\frac{x}{y} = \frac{|x|}{|y|} \cdot \operatorname{sgn} x \cdot \operatorname{sgn} y$

  wobei wir mit $\frac{|x|}{|y|}$ folgendes meinen:

  $\frac{|x|}{|y|} = \left(\frac{|x|}{|y|}, 0\right)$, wobei mit der Division auf der rechten Seite die bereits definierte Division über die natürlichen Zahlen gemeint ist. [XXX formal nicht so einfach, die $|x|$ und $|y|$ ganze Zahlen, nicht natürliche Zahlen sind. Aber einfacher Isomorphismus zwischen den nichtnegativen natürlichen Zahlen und den nichtnegativen ganzen Zahlen. Ähnlich wie $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. Kasten?]

- Es fehlen noch die Definitionen der Betragsfunktion $|\cdot|$ und der Signumfunktion sgn.

  Die Betragsfunktion können wir auf die Signumfunktion zurückführen: $|x| := x \cdot \operatorname{sgn} x$

  $$\operatorname{sgn}(a,b) := \begin{cases} -1 & \text{für } a < b \\ 0 & \text{für } a = b \\ 1 & \text{für } a > b \end{cases}$$

  (Diese Definition bedient sich der Vergleichsoperatoren über die natürlichen Zahlen.)

– Vergleichsoperatoren

- **Gleichheit und Ungleichheit**

  Anders als bei den natürlichen Zahlen sind bei unserer Definition der ganzen Zahlen die Definitionen der Gleichheit und Ungleichheit nicht sofort offensichtlich.

  Herleitung:

  $(a, b) = a - b = \alpha - \beta = (\alpha, \beta)$

  Herüberbringen von b und β ermöglicht es, die Gleichheit auf den ganzen Zahlen auf die Gleichheit auf den natürlichen Zahlen zurückzuführen:

  $a + \beta = \alpha + b$

  Kurz: $(a, b) = (\alpha, \beta) \Leftrightarrow a + \beta = \alpha + b$

- **Kleinergleich**

  Wie bei den natürlichen Zahlen wollen wir auch bei den ganzen Zahlen nicht jede der fehlenden Vergleichsoperatoren ($<$, $\leq$, $\geq$, $>$) einzeln definieren, sondern nur $\leq$ erklären. Die anderen Vergleichsoperatoren ergeben sich dann daraus.

  Zur Herleitung erfolgt analog zur Definition der Gleichheit:

  $(a, b) = a - b \leq \alpha - \beta = (\alpha, \beta)$

  Herüberbringen von b und $\beta \ldots$

  $a + \beta \leq \alpha + b$

  Kurz: $(a, b) \leq (\alpha, \beta) \Leftrightarrow a + \beta \leq \alpha + b$

– Eindeutigkeit der Repräsentation

Das Problem wurde schon kurz zu Beginn des Kapitels und bei der Definition der Gleichheit angerissen: Bei unser Definition der ganzen Zahlen ist die Repräsentation einer Zahl nicht eindeutig.

Das erklärt auch, wieso wir die Gleichheitsrelation definieren mussten.

[XXX noch mehr darauf eingehen, wieso das ein Problem ist]

Es gibt nun zwei klassische Wege, das Problem zu lösen.

- **Normalisierung**

  Beim Weg über die Normalisierung definiert man eine Normalisierungsfunktion, die einer beliebigen Repräsentation einer ganzen Zahl eine eindeutige Repräsentation zuweist.

  Eine Normalisierungsfunktion könnte beispielsweise sein:

  $$n\colon (a,b) \mapsto n(a,b) := \begin{cases} (a-b,0) & \text{für } a \geq b \\ (0,b-a) & \text{für } a < b \end{cases}$$

  Danach definiert man die Menge der ganzen Zahlen und die Verknüpfungen neu:

  $\mathbb{Z}' := \{n(x) \mid x \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{Z}$

  $x +_{\mathbb{Z}'} y := n(x +_{\mathbb{Z}} y)$

  $x -_{\mathbb{Z}'} y := n(x -_{\mathbb{Z}} y)$

  $x \cdot_{\mathbb{Z}'} y := n(x \cdot_{\mathbb{Z}} y)$

  etc.

  Nachteil an dieser Methode kann sein, dass sie dem persönlichen Geschmack nicht entspricht: Es sieht so aus, als ob die ursprünglichen Definitionen bzw. die Ideen hinter den Definitionen unzureichend sind und eine nachträgliche Anpassung benötigen.

- **Äquivalenzklassen**

  Ein alternativer Weg geht über Äquivalenzklassen. Die Idee ist, eine Zahl als die Menge aller Repräsentationen zu definieren, die äquivalent (=) zur Zahl sind. Man schreibt $[x]$, wenn man die Äquivalenzklasse meint.

  In Formeln: $[x] = \{r \in \mathbb{Z} \mid r = x\}$

  Beispiel: $[(3,0)] = \{(3,0),(4,1),(5,2),\ldots\}$

  Diese Mengen sind unendlich groß; das ist aber kein Problem, da man zum Rechnen nur ein einziges Element benötigt.

  Die Menge der ganzen Zahlen definiert man dann auf:

  $\mathbb{Z}' := \{[x] \mid x \in \mathbb{Z}\}$

  Auch muss man die Verknüpfungen anpassen:

  $[x] +_{\mathbb{Z}'} [y] := [x +_{\mathbb{Z}} y]$ etc.

  Der Einfachheit wegen kann man zusätzlich noch die Zahlensymbole neu definieren:

$$0_{\mathbb{Z}'} := [0_{\mathbb{Z}}]$$
$$1_{\mathbb{Z}'} := [1_{\mathbb{Z}}] \text{ etc.}$$

[Äquivalenzklassen auch bei den Brüchen und surreallen Zahlen]

[Äquivalenzklassen auch im Alltag; beispielsweise die Zahl 3 als Menge aller Mengen mit drei Elementen]

1.2.5 Rationale Zahlen

Zur Definition der rationalen Zahlen werden wir ähnlich verfahren wie bei der Definition der ganzen Zahlen als Paare zweier natürlicher Zahlen.

Dieser Ansatz ist bei den rationalen Zahlen über die Repräsentation über die Bruchschreibweise offensichtlich.

Also: $\mathbb{Q} := \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$

Beispiel: $-2{,}5 = \frac{-5}{2} = (-5, 2) = ((0,5), (2,0))$

Anders als bei der Definition der ganzen Zahlen müssen wir hier eine Einschränkung treffen – Null darf nicht im Nenner stehen.

Die Repräsentation ist wie bei den ganzen Zahlen nicht eindeutig: In $\mathbb{Q}$ kommen ungekürzte Brüche vor und negative gekürzte Brüche haben jeweils zwei Repräsentationen, $(-a, b)$ und $(a, -b)$. Zur Lösung werden wir Äquivalenzklassen einsetzen.

Die Definition der Rechenoperatoren übernehmen wir von der Einführung in der 6. Klasse.

Addition

Herleitung über Bildung des Hauptnenners:

$(a, b) + (\alpha, \beta) = \frac{a}{b} + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{a\beta}{b\beta} + \frac{\alpha b}{b\beta} = \frac{a\beta + \alpha b}{b\beta} = (a\beta + \alpha b, b\beta)$

Die Addition über den rationalen Zahlen führen wir also auf die Addition über den ganzen Zahlen zurück, die ihrerseits auf die Addition über den natürlichen Zahlen zurückführt. [Bemerkung irgendwo, dass es keine Rolle spielt, welche Repräsentation der natürlichen Zahlen zugrundeliegt.]

Subtraktion

Herleitung über Negation:

$(a, b) - (\alpha, \beta) = (a, b) + [-(\alpha, \beta)] = (a, b) + (-\alpha, \beta) = (a\beta - \alpha b, b\beta)$

Alternativ:

$(a, b) - (\alpha, \beta) = (a, b) + [-(\alpha, \beta)] = (a, b) + (\alpha, -\beta) = (-a\beta + \alpha b, -b\beta)$

Die beiden Definitionen sind äquivalent, was Ausklammern von (-1) im Zähler und Kürzen mit (-1) bestätigt.

Multiplikation

$(a, b) \cdot (\alpha, \beta) = \frac{a}{b} \frac{\alpha}{\beta} = \frac{a\alpha}{b\beta} = (a\alpha, b\beta)$

Es zeigt sich eine beeindruckende Symmetrie zur Definition der Addition bei den ganzen Zahlen: Vertauscht man $\cdot$ durch $+$, erhält man die Definition der Addition über die ganzen Zahlen! [XXX wieso?]

Division

Herleitung über das Inverse:

$\frac{1}{(a, b)} = \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a} = (b, a)$

$(a, b) : (\alpha, \beta) = (a, b) \cdot (\beta, \alpha) = (a\beta, b\alpha)$

[XXX wieder beeindruckende Symmetrie]

Vergleichsoperatoren

– Gleichheit

$(a, b) = \frac{a}{b} = \frac{\alpha}{\beta} = (\alpha, \beta)$

Herüberbringen von b und β bringt:

$a\beta = \alpha b$

Kurz: $(a, b) = (\alpha, \beta) \Leftrightarrow a\beta = b\alpha$

– Kleinergleich

$(a,b) = \frac{a}{b} < \frac{\alpha}{\beta} = (\alpha,\beta) \Leftrightarrow$

$a\beta < b\alpha$, falls $b\beta > 0$

$a\beta > b\alpha$, falls $b\beta < 0$

(Der Fall $b\beta = 0$ kann nicht auftreten, da $b, \beta \neq 0$.) 27.08.2006

1.3 Stichpunkte

1.3.1 Einleitung

Im Schulunterricht wird üblicherweise nicht darüber gesprochen, **was** Zahlen eigentlich sind. Oft werden die Zahlen mit ihren Dezimalrepräsentationen identifiziert, wodurch die originellen Ideen, die hinter der Formalisierung der verschiedenen Zahlenmengen stecken, untergehen.

An ihrer Stelle lehrt man algorithmisches Denken: Wie multipliziert man zwei ganze Zahlen schriftlich? Wie addiert man zwei Brüche?

Fragen seitens der Schüler kommen, wenn überhaupt, erst bei der Einführung der irrationalen Zahlen – „was **ist** $\sqrt{2}$?“. Dass sie genausowenig wissen, was schon lange bekannte Zahlen **sind** – „was **ist** 2?“ –, ist vielen von ihnen nicht mehr bewusst.

Ich habe dieses Facharbeitsthema deswegen gewählt, weil ich die zugrundeliegenden Ideen aufdecken wollte; die Art und Weise, wie bekannte mathematische Konzepte formalisiert werden und so Informationen sehr dicht „gepackt“ werden können, fasziniert mich sehr.

Diese Arbeit ist in fünf Abschnitte gegliedert. Im ersten Abschnitt stelle ich die natürlichen Zahlen vor. Dazu gehören Definitionen der Zahlen, Rechenregeln und Relationen, wobei ich besonders auf die Ideen, die hinter den Definitionen stecken, eingehen werden. Dabei wird sich herausstellen, dass kleine Kinder noch viel näher an der mathematischen Formalisierung liegen als der Schulunterricht.

Im zweiten Abschnitt werden die ganzen Zahlen behandelt. Dabei werde ich zwei Formalisierungsansätze vorstellen und ihre Vor- und Nachteile abwägen. Einen Ansatz werde ich genauer ausführen und auf ihm auch die Operatoren und Relationen definieren.

Eine Realisierung der rationalen Zahlen wird im dritten Abschnitt vorgestellt. Verglichen mit den ganzen Zahlen kommen dabei keine neuen grundlegenden Ideen vor.

Die Vorstellung von zwei Formalisierungen der reellen Zahlen erfolgt im vierten Abschnitt und ist sehr kurz, da für eine eingehende Behandlung der reellen Zahlen ein ausgeschärfter Formalismus notwendig ist, der in der Schule nicht behandelt wird.

Den letzten Abschnitt bildet die Behandlung der surrealen Zahlen, einem alternativen Ansatz, der einige Unzulänglichkeiten des konventionellen Aufbaus der Zahlenbereiche löst. Da Rechnungen bei den surrealen Zahlen vergleichsweise lang sind, werde ich mich vor allem auf Anwendungen der surrealen Zahlen konzentrieren, deren Darlegung nur Grundlagen der surrealen Zahlen erfordert.

1.3.2 Natürliche Zahlen

In diesem ersten Teil der Facharbeit soll der Aufbau der natürlichen Zahlen mathematisch formalisiert werden. Fragen wie „was ist 1?“, „was bedeutet es, wenn man zu einer Zahl Eins addiert?“, „woran erkennt man, ob eine Zahl kleiner als eine andere ist?“ werden in diesem Teil beleuchtet.

Die erste Frage, was 1 sei, ist ein Spezialfall der allgemeineren Frage „was sind die Elemente von $\mathbb{N}$?“.

Um diese Frage mathematisch rigoros zu klären, darf man nur wenig voraussetzen. Beispielsweise ist die denkbare Definition von $\mathbb{N}$ als die Menge der ganzen Zahlen, die größer oder gleich Eins sind – $\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} \,|\, n \geq 1\}$ –, unpraktisch, da sie bereits Definitionen von $\mathbb{Z}$ und der Größergleichrelation ($\geq$) voraussetzt.

Wie sich herausstellen wird, gibt es mehrere Möglichkeiten, die natürlichen Zahlen zu realisieren. Von diesen ist keine besonders ausgezeichnet; je nach Situation und persönlichem Geschmack kann man frei zwischen den verschiedenen Realisierungen wählen.

Im Folgenden schließe ich die Null mit ein, wenn ich von „natürlichen Zahlen“ spreche.

Natürliche Zahlen nach Peano

Der italienische Mathematiker Giuseppe Peano (1858–1932) entdeckte/erfand 1889 eine Formalisierung der natürlichen Zahlen ([[PeanoPerson]], S. 4), die man heute als Standardformalisierung begreift. Später bettete Richard Dedekind (1831–1916) [[NWikiDe-DedekindPerson]], deutscher Mathematiker, die Arbeit Peanos in die Mengenlehre ein.

Bei der Definition der natürlichen Zahlrepräsentanten nach Peano legt man zunächst fest, dass es einen kleinsten natürlichen Zahlrepräsentanten gibt. Diesem Repräsentanten gibt man die Bezeichnung „Null" und verwendet zur Notation den üblichen Glyphen für Null, „0".

Dann fordert man eine Nachfolgerfunktion S (engl. successor function), die jedem Repräsentanten einer natürlichen Zahl, n, ihren eindeutigen Nachfolgerrepräsentanten $S(n)$ (manchmal schreibt man auch „$\mathrm{Succ}(n)$" oder „n'"; übliche Schreibweise: „$n + 1$") zuordnet. [[NWikiDePeano]]

(Man kann an dieser Stelle noch nicht „$n + 1$" schreiben, da man weder definiert hat, was unter „1" zu verstehen ist, noch was die Bedeutung des Pluszeichens ist.)

Die Forderung an die Nachfolgerfunktion S, dass der Nachfolger jedes Zahlrepräsentanten eindeutig ist, kann man in Symbolen schreiben: $S(n) = S(m) \Rightarrow n = m$.

Diese zwei Objekte – einen kleinsten natürlichen Zahlrepräsentant, den man mit „0" bezeichnet, und eine Nachfolgerfunktion S – genügen bereits, um die Menge der Repräsentanten natürlicher Zahlen zu formulieren:

$\mathbb{N}_0 = \{0, S(0), S(S(0)), S(S(S(0))), \ldots\}$

Der besseren Lesbarkeit halber gibt man den Zahlrepräsentanten $S(0)$, $S(S(0))$, ... noch zusätzliche Bezeichnungen: $S(0)$ schreibt man auch als „1", $S(S(0))$ als „2", usw.

Wie sich herausstellen wird, sobald man Rechenoperationen eingeführt hat, haben die Objekte, denen man die Bezeichnungen „0", „1", „2", usw. gegeben hat, auch tatsächlich die Eigenschaften, die ihre Bezeichnungen suggerieren. Ohne Definition der Rechenoperatoren sind es aber lediglich Elemente einer Menge, denen man bekannte Namen gegeben hat.

Definition der Zahlensymbole für natürliche Zahlen

$$
\begin{array}{lll}
0 & & \text{wird vorausgesetzt} \\
1 & := & S(0) \\
2 & := & S(1) = S(S(0)) \\
3 & := & S(2) = S(S(S(0))) \\
4 & := & S(3) = S(S(S(S(0)))) \\
 & \vdots &
\end{array}
$$

Die Nachfolgerfunktion drückt die Idee des Zählens aus: $S(n)$ ist der Repräsentant der Zahl, die man erhält, wenn man von n ausgehend eins hochzählt.

$\mathbb{N}_0$ definiert man dann als die Menge der Zahlrepräsentanten, die man erreicht, wenn man, von 0 beginnend, schrittweise hochzählt, also sukzessive die Nachfolgerfunktion anwendet.

Meine Arbeit hat keinen absoluten Anspruch; ich definiere nicht die Zahlen selbst, sondern mögliche Repräsentanten der Zahlen. Dementsprechend beantwortet diese Arbeit auch nicht, wie in der Einleitung vereinfachend geschrieben, Fragen wie „was **ist** 2?“, sondern Fragen wie „wie kann 2 mathematisch repräsentiert werden?“.

Für die Praxis ist die Unterscheidung zwischen dem Repräsentanten einer Zahl und der Zahl selbst bei den natürlichen Zahlen von geringem Belang. Da aber die Unterscheidung bei den ganzen, rationalen und surrealen Zahlen eine wichtige Rolle spielen wird, nutze ich schon hier die sprachlich sauberere Darstellung.

– Rechenoperatoren

In den folgenden Abschnitten sollen die Definitionen der Grundrechenarten und der Relationen für natürliche Zahlen aufgestellt werden. Von vornherein problematisch ist dabei die Frage, inwieweit man sicher gehen kann, dass die hier vorgestellten Vorschriften auch wirklich zu den Vorschriften äquivalent sind, die man kennt und im Alltag benutzt.

Genauer liegt das Problem darin, dass die normalen, bekannten Vorschriften zunächst nicht axiomatisch präzisiert vorliegen: Die Symbolmanipulationsvorschriften wie beispielsweise schriftliche Addition und schriftliche Subtraktion erlernt man in der Grundschule nicht über formale, abstrakte Definitionen, sondern „spielerisch“ und anhand konkreter Beispiele. Auch sind die Regeln, die Taschenrechner benutzen, im Allgemeinen nicht einsehbar.

Man könnte meinen, dass die Überprüfung vieler Einzelfälle die Korrektheit der hier vorgestellten Definitionen, also die Übereinstimmung der Ergebnisse der Anwendung der Definitionen mit der Erfahrung, also mit den Ergebnissen der Anwendung der erlernten Symbolmanipulationsvorschriften oder dem Taschrenrechner, bezeugt.

Für einen mathematischen Beweis genügt das jedoch nicht, da man durch Überprüfung von Einzelfällen nur die Korrektheit dieser Einzelfälle bestätigen kann – nicht aber der unendlich vielen anderen Fälle, die man nicht überprüfen konnte.

Alternativ könnte man versuchen, die bekannten Vorschriften zu formalisieren, wobei man die Korrektheit jedes Schritts einzeln beweisen müsste. Man müsste also Schritt für Schritt die bekannten Vorschriften, die auf der sehr hohen Ebene der Symbolmanipulation von Ziffern vorliegen, auf das Zählkonzept, also auf bestimmte Arten und Weisen der Anwendung der Nachfolgerfunktion, zurückführen – ein umständlicher Prozess.

Umständlich wäre dieses Vorgehen deswegen, da man kompliziertere Konzepte, die es in der Realisierung der natürlichen Zahlen nach Peano nicht gibt, wie beispielsweise die Dezimalrepräsentation, formalisiert einführen müsste. Das Dezimalsystem vereinfacht zwar den alltäglichen Umgang mit Zahlen in der Hinsicht, dass sich das Rechnen mit Dezimalrepräsentationen schneller gestaltet als direkt mit der Peano-Repräsentation, wie gleich klar werden wird, erlaubt jedoch keine grundlegend neuen Operationen und ist insofern, was die Darstellung der Ideen hinter den Definitionen angeht, unnötig.

In dieser Arbeit wird es genügen müssen, die Definitionen über bereits bekanntes Wissen über Termumformungen herzuleiten und stellenweise die Gültigkeit bestimmter Gesetze zu beweisen.

Da das Muster der Eigenschaftsbeweise bei den natürlichen Zahlen immer das Prinzip der vollständigen Induktion ist und die Beweise in vielen anderen Quellen bereits ausführlich dargelegt werden (beispielsweise [[NBew]]), werde ich bei den natürlichen Zahlen weitgehend auf Beweise verzichten. Die Beweise bei den ganzen Zahlen dagegen bringen einen echten Erkenntnisgewinn und fungieren darüberhinaus als Beispiele der Anwendung der Rechengesetze, weswegen ich bei den ganzen Zahlen Beweise nicht aussparen werde.

Addition

In diesem Abschnitt wird eine mögliche Definition der Addition hergeleitet. Diese Additionsvorschrift wird von einer für den Schulunterricht ungewöhnlichen Form sein; weswegen ich die Zulässigkeit der Vorschrift genauer thematisieren werde.

Schließlich wird die hergeleitete Definition der Addition mit den Rechenmethoden von Kindern und Erwachsenen verglichen.

Herleitung der Additionsvorschrift

Um eine mathematische Formalisierung der Addition auf den natürlichen Zahlen herzuleiten, kann man zunächst den einfachen Fall der Addition von Null betrachten. Die Addition von Null soll, bildlich gesprochen, ohne Auswirkung sein; man definiert daher:

$n + 0 := n$ mit $n \in \mathbb{N}_0$.

Erst ab dieser Stelle hat das Element aus $\mathbb{N}_0$, dem man den Namen „Null“ gegeben hat, auch wirklich die Bedeutung der Null.

Zur Herleitung der Definition der Addition einer Zahl ungleich Null kann man das bekannte Wissen über Termumformungen nutzen. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit werde ich öfter das „bekannte Wissen über Termumformungen“ nutzen; diese Rechnungen finden außerhalb des bereits definierten Formalismus statt – beispielsweise nutzen sie Operatoren, die noch nicht definiert wurden, oder Umformungsregeln, deren Gültigkeit ohne Beweis vorausgesetzt werden. Diese Rechnungen dienen nur der schriftlichen Fixierung des Herleitungswegs.

$$\begin{aligned} & n + k = && \textit{(Schreiben von } k \textit{ als Nachfolger von } m\textit{)} \\ = \; & n + (m+1) = && \textit{(Anwenden des Assoziativgesetzes)} \\ = \; & (n+m)+1 && \end{aligned}$$

Addiert man also zu einem Zahlrepräsentanten n den Nachfolgerrepräsentanten $S(m)$ eines Zahlrepräsentanten m, so erhält man als Ergebnis den Nachfolgerrepräsentanten $S(n+m)$ der Summe $n+m$; man führt die Addition aufs Zählen zurück. In Symbolen:

Definition der Addition auf den natürlichen Zahlen

$$\begin{array}{llll} \text{I.} & n + 0 & := & n \\ \text{II.} & n + S(m) & := & S(n+m) \end{array}$$

mit $n, m \in \mathbb{N}_0$.

Es mag zunächst ungewohnt erscheinen, dass man, obwohl man die Bedeutung der Addition gerade erst definiert, auch auf der rechten Seite der Definition addiert – in der Schule kommt diese Art von Definition („rekursive Definitionen“) üblicherweise nicht vor; formal zulässig ist sie aber durchaus.

Nutzbarkeit der Definition als Arbeitsvorschrift

In diesem Abschnitt werde ich zeigen, dass die angegebene rekursive Definition der Addition nicht nur formal zulässig ist, sondern auch nützt – dass sie also nicht nur $n + S(m)$ mit $S(n + m)$ in Beziehung setzt, sondern die Addition auch wirklich aufs Zählen zurückführt.

Ein Beispiel für eine Definition, die lediglich formal zulässig ist, aber nicht nützt, ist $n + m := m + n$. Mit dieser Definition wüsste man zwar, dass die Summationsreihenfolge unerheblich ist, eine konkrete Arbeitsvorschrift – ein Algorithmus –, wie man zwei Zahlrepräsentanten addieren sollte, liefert die Vorschrift jedoch nicht.

Um als Arbeitsvorschrift einsetzbar zu sein, muss die Additionsregel, unabhängig von der Wahl der Summanden, nach einer endlichen Anzahl wiederholter Anwendungen „terminieren“, d.h. jede Rechnung muss einen Schluss haben.

Ein Zahlenbeispiel verdeutlicht diesen Sachverhalt:

$$\begin{aligned}
& 2 + 3 = && \text{(Schreiben des zweiten Summanden als Nachfolger)} \\
= \; & 2 + S(2) = && \text{(Anwenden der Additionsvorschrift)} \\
= \; & S(2 + 2) = && \text{(Schreiben des zweiten Summanden als Nachfolger)} \\
= \; & S(2 + S(1)) = && \text{(Erneutes Anwenden der Additionsvorschrift)} \\
= \; & S(S(2 + 1)) = && \text{(Schreiben des zweiten Summanden als Nachfolger)} \\
= \; & S(S(2 + S(0))) = && \text{(Erneutes Anwenden der Additionsvorschrift)} \\
= \; & S(S(S(2 + 0))) = && \text{(Anwenden von Regel I. der Additionsvorschrift)} \\
= \; & S(S(S(2))) = && \text{(Schreiben als Dezimalzahl)} \\
= \; & S(S(3)) = S(4) = 5
\end{aligned}$$

Schrittweise wird also die Anwendung der Nachfolgerfunktion S aus dem zweiten Summanden „herausgezogen“ und auf die gesamte Summe bezogen, bis eine Summe auftritt, bei der zweite Summand 0 ist.

Man kann beweisen, dass, egal welche zwei Zahlrepräsentanten $n, m \in \mathbb{N}_0$ man addiert, nach einer endlichen Anzahl von Schritten immer die Addition von Null auftritt und so eine endlose Wiederholung der Additionsvorschrift verhindert wird:

Die problematisch erscheinende, rekursive Regel II. der Definition greift, wenn der zweite Summand nicht Null, sondern ein Nachfolger ist. Der Definition zufolge addiert man dann zum ersten Summanden den Vorgänger des zweiten Summanden; jede wiederholte Anwendung der Additionsvorschrift ergibt eine Summe, bei der der zweite Summand kleiner ist als der jeweils ursprüngliche Summand.

Da jede natürliche Zahl selbst nur endlich groß ist, ist nach einer endlichen Anzahl Schritte eine Rechnung erreicht, bei der der zweite Summand Null ist, und die einfache Vorschrift $n + 0 := n$ greift; „die Rekursion ist gebrochen", die Additionsvorschrift kann daher sinnvoll als Arbeitsvorschrift eingesetzt werden.

Vergleich der Idee hinter der Definition mit den Rechenmethoden von Kindern und Erwachsenen

Die Idee hinter dieser Definition ist, dass das Zählen „herausgezogen" wird, ähnlich wie es kleine Kinder machen: Um beispielsweise zu 2 3 zu addieren, beginnen Kinder zunächst bei Null (geschlossene Hand).

Dann zählen sie zweimal, also bis zu $S(S(0)) = 2$. Bei der 2 angelangt zählen sie schließlich noch dreimal weiter und gelangen auf diese Weise zu $S(S(\underbrace{S(S(S(0)))}_{3})) = 5$.

Ältere Kinder und Erwachsene dagegen nutzen nicht mehr direkt das Zählen bzw. die Nachfolgerfunktion zur Addition, sondern betreiben Symbolmanipulation: Tabellen wie in Abb. [[BILD:NSymbTab]] auf S. [[LINK:NSymbTab]] dargestellt sind verinnerlicht, und kompliziertere Rechnungen denkt man sich als aus den auswendig gelernten Rechnungen mit bekannten Ergebnissen zusammengesetzt.

Addition mehrerer Summanden

Die Addition mehrerer Summanden muss man nicht eigens definieren, da sie sich aus der Definition der Addition zweier Summanden ergibt:

$x + y + z = (x + y) + z$

Bei der Addition ist die Wahl der Klammerung beliebig, da die $\mathbb{N}_0$-Addition assoziativ ist. (Diese Eigenschaft habe ich hier jedoch nicht bewiesen; ein Beweis findet sich in [[NBew]] auf S. 4.)

Subtraktion

+	0	1	2	3	4 ⋯
0	0	1	2	3	4 ⋯
1	1	2	3	4	5 ⋯
2	2	3	4	5	6 ⋯
3	3	4	5	6	7 ⋯
4	4	5	6	7	8 ⋯
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

·	0	1	2	3	4 ⋯
0	0	0	0	0	0 ⋯
1	0	1	2	3	4 ⋯
2	0	2	4	6	8 ⋯
3	0	3	6	9	12 ⋯
4	0	4	8	12	16 ⋯
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

Abbildung 1: Grundlagen der Symbolmanipulationen des Alltags

Eine mögliche Definition der Subtraktion wird in diesem Abschnitt vorgestellt. Wie auch die Additionsvorschrift wird die hergeleitete Subtraktionsvorschrift rekursiv sein.

Herleitung der Subtraktionsvorschrift

Zur Herleitung der Subtraktionsvorschrift für die natürlichen Zahlen kann man wie bei der Herleitung der Additionsvorschrift vorgehen und zunächst den einfachen Fall der Subtraktion von Null betrachten. Die Subtraktion von Null soll (bildlich gesprochen) keine Auswirkung haben; man definiert daher:

$n - 0 := n$ mit $n \in \mathbb{N}_0$.

Zur Herleitung des anderen Falls, der Subtraktion eines Zahlrepräsentanten v ungleich Null von einem natürlichen Zahlrepräsentanten u, kann man den Term $u-v$ ansetzen und dann das bereits bekannte Wissen über äquivalente Termumformungen nutzen:

$$\begin{aligned}
& u - v = && \textit{(Schreiben von } u \textit{ als Nachfolger von } n\textit{)} \\
= \;& (n+1) - v = && \textit{(Schreiben von } v \textit{ als Nachfolger von } m\textit{)} \\
= \;& (n+1) - (m+1) = && \textit{(Ausmultiplizieren der Klammern)} \\
= \;& n + 1 - m - 1 = && \textit{(Vereinfachen)} \\
= \;& n - m &&
\end{aligned}$$

Zieht man also vom Nachfolgerrepräsentanten $S(n)$ eines Zahlrepräsentanten n den Nachfolgerrepräsentanten $S(m)$ eines Zahlrepräsentanten m ab, so ist das Ergebnis das gleiche, als wenn man von n m abzieht. In Symbolen:

Definition der Subtraktion auf den natürlichen Zahlen

$$\begin{array}{lllll} \text{I.} & n & - & 0 & := n \\ \text{II.} & S(n) & - & S(m) & := n - m \text{ (nur für } n \geq m \text{ definiert)} \end{array}$$

mit $n, m \in \mathbb{N}_0$.

Die Angabe, der Ausdruck auf der rechten Seite von Regel II. sei nur für $n \geq m$ definiert, ist rein informeller Natur. Würde man diese Angabe als Bestandteil der Definition ansehen, so wäre die Definition an dieser Stelle ohne Sinn, da die Bedeutung des Größergleichzeichens noch nicht definiert wurde.

Diese Definition ist, wie auch die Additionsvorschrift, rekursiv – auf der rechten Seite von Regel II. der Definition steht das Minuszeichen, dessen Bedeutung erst durch die Definition selbst definiert wird.

Die Art und Weise, wie die Subtraktionsvorschrift „arbeitet“, verdeutlicht ein Zahlenbeispiel:

$$\begin{array}{lll} & 5 - 3 = & \textit{(Schreiben als Nachfolger)} \\ = & S(4) - S(2) = & \textit{(Anwenden der Subtraktionsvorschrift)} \\ = & 4 - 2 = & \textit{(Schreiben als Nachfolger)} \\ = & S(3) - S(1) = & \textit{(Anwenden der Subtraktionsvorschrift)} \\ = & 3 - 1 = & \textit{(Schreiben als Nachfolger)} \\ = & S(2) - S(0) = & \textit{(Anwenden der Subtraktionsvorschrift)} \\ = & 2 - 0 = & \textit{(Anwenden von Regel I. der Subtraktionsvorschrift)} \\ = & 2 & \end{array}$$

Nutzbarkeit der Definition als Arbeitsvorschrift

Anders als die Additionsvorschrift, die für alle Paare natürlicher Zahlen anwendbar ist, ergibt die Subtraktion auf den natürlichen Zahlen nur dann Sinn, wenn der Minuend größergleich dem Subtrahend ist.

Um zu überprüfen, ob die soeben hergeleitete Subtraktionsvorschrift auch diese Eigenschaft hat, und nicht etwa auch für Differenzen, bei denen der Minuend kleiner als der Subtrahend ist, Ergebnisse liefert, ist es hilfreich, vor einem allgemeinen Beweis zunächst ein Zahlenbeispiel zu betrachten:

$$\begin{array}{lll} & 1 - 4 = & \textit{(Schreiben als Nachfolger)} \\ = & S(0) - S(3) = & \textit{(Anwenden der Subtraktionsvorschrift)} \\ = & 0 - 3 = ? & \end{array}$$

Auf den Ausdruck der letzten Zeile, $0 - 3$, passt weder die Vorschrift $n - 0 := n$, da der Subtrahend nicht Null ist, noch die Vorschrift für den zweiten Fall, da man den Minuenden, 0, nicht als Nachfolger schreiben kann.

Allgemein: Setzt man die Differenz $n - m$ an, wobei n größergleich m ist, so sind Minuend und Subtrahend der sich durch wiederholte Anwendungen der Subtraktionsvorschrift ergebenden Folgerechnungen jeweils um eins kleiner.

Nach einer endlichen Anzahl Schritte ergibt sich eine Differenz, bei der der Subtrahend Null ist; Regel I. greift und die Rekursion ist gebrochen. Die Subtraktionsvorschrift entspricht also für den Fall, dass der Subtrahend kleinergleich dem Minuend ist, der Erwartung, ist in diesem Sinne also korrekt.

Ist nun aber der Subtrahend größer als der Minuend, so tritt nach einer endlichen Anzahl Schritte ein Fall der Form „$0 - k$“ (mit $k \in \mathbb{N}^+$) auf, für den keine Regel definiert ist; die Subtraktion einer größeren Zahl von einer kleineren Zahl ist also der hergeleiteten Subtraktionsvorschrift nach (wie auch gewünscht) nicht definiert.

Somit ist die hergeleitete Definition der Subtraktion nicht nur formal zulässig, sondern auch als brauchbare Arbeitsvorschrift verwendbar.

Idee hinter der Definition

Hinter der hergeleiteten Definition der Subtraktion steckt die Idee der „Relativität“ der Subtraktion: Der Unterschied – die Differenz – zweier Zahlen ist von den absoluten Zahlwerten unabhängig.

Kleine Kinder subtrahieren, indem sie zunächst zum Minuenden hochzählen und dann so oft, wie der Subtrahend groß ist, rückwärts zählen. Dieses Vorgehen wird Grundlage der Realisierung der ganzen Zahlen sein, spiegelt sich in der hergeleiteten Definition der Subtraktion auf den natürlichen Zahlen jedoch nicht unmittelbar wieder.

Subtraktion mehrerer Zahlen

Die Subtraktion mehrerer Zahlen muss man, analog zur Addition mehrerer Summanden, nicht eigens definieren, da sie sich aus der Definition der Subtraktion einer Zahl ergibt:

$a - b - c = (a - b) - c$

Anders als bei der Addition ist bei der Subtraktion die Klammerung nicht frei wählbar; man hat daher definiert, dass man von links nach rechts rechnet (in der Informatik sagt man, das Minuszeichen „assoziiere nach links“):

$a - b - c - d = (a - b) - c - d = [(a - b) - c] - d$

Multiplikation

In diesem Abschnitt wird die Multiplikation auf den natürlichen Zahlen vorgestellt. Drei Interpretationsvorschläge der Vorschrift werden gegeben.

Herleitung der Multiplikationsvorschrift

Zur Herleitung der Multiplikationsvorschrift für die natürlichen Zahlen kann man wie bei der Herleitung der Addition und der Subtraktion zwischen dem einfachen Fall der Multiplikation mit Null und dem komplizierteren Fall der Multiplikation mit einer Zahl ungleich Null unterscheiden.

Die Multiplikation eines jeden Zahlrepräsentanten $n \in \mathbb{N}_0$ mit Null soll Null ergeben. In Symbolen:

$n \cdot 0 := 0$ mit $n \in \mathbb{N}_0$.

Zur Herleitung der Vorschrift für den anderen Fall – der zweite Faktor ist ungleich Null – kann man das bereits bekannte Wissen über Termumformungen, insbesondere über das Distributivgesetz nutzen:

$$\begin{array}{lll} & n \cdot k = & \textit{(Schreiben von } k \textit{ als Nachfolger von} m\textit{)} \\ = & n \cdot (m+1) = & \textit{(Ausmultiplizieren)} \\ = & n \cdot m + n \cdot 1 = & \textit{(Vereinfachen des zweiten Summanden)} \\ = & n \cdot m + n & \end{array}$$

Dieses Ergebnis deckt sich mit der Art und Weise, wie Multiplikation in der Grundschule [[NMultGrund]] eingeführt wird:

$$\begin{array}{llllll} & n \cdot k & = & \underbrace{n + n + \cdots + n + n}_{k \text{ Mal}} & \Leftrightarrow & \textit{(Schreiben von } k \textit{ als Nachfolger} \\ \Leftrightarrow & n \cdot (m+1) & = & \underbrace{n + n + \cdots + n + n}_{(m+1) \text{ Mal}} & \Leftrightarrow & \textit{(Herausziehen eines Summande} \\ \Leftrightarrow & n \cdot (m+1) & = & \underbrace{\underbrace{n + n + \cdots + n + n}_{m \text{ Mal}} + n}_{(m+1) \text{ Summanden}} & \Leftrightarrow & \textit{(Schreiben als Produkt)} \\ \Leftrightarrow & n \cdot (m+1) & = & nm + n & & \end{array}$$

Also:

Definition der Multiplikation auf den natürlichen Zahlen

$$\begin{array}{rlcl} \text{I.} & n \cdot 0 & := & 0 \\ \text{II.} & n \cdot S(m) & := & n \cdot m + n \end{array}$$

mit $n, m \in \mathbb{N}_0$.

Nutzbarkeit der Definition als Arbeitsvorschrift

Auch diese Definition ist rekursiv, da auf der rechten Seite von Regel II. das Malzeichen verwendet wird, dessen Bedeutung aber erst durch die Definition festgelegt wird.

Wie auch die rekursiven Definitionen der Addition und Subtraktion terminiert auch die Definition der Multiplikation für alle $n, m \in \mathbb{N}_0$, da der sich ergebende zweite Faktor mit jeder wiederholten Anwendung der Multiplikationsvorschrift jeweils um eins kleiner ist; nach einer endlichen Anzahl von Schritten ergibt sich ein Produkt, dessen zweiter Faktor Null ist, womit Regel I., $n \cdot 0 := 0$, greift und die Rekursion gebrochen ist. Die Definition kann man also als Arbeitsvorschrift einsetzen.

Ein Zahlenbeispiel demonstriert das:

$$\begin{array}{rll} & 2 \cdot 3 = & \textit{(Schreiben des zweiten Faktors als Nachfolger)} \\ = & 2 \cdot S(2) = & \textit{(Anwenden der Multiplikationsvorschrift)} \\ = & 2 \cdot 2 + 2 = & \textit{(Schreiben des zweiten Faktors als Nachfolger)} \\ = & 2 \cdot S(1) + 2 = & \textit{(Erneutes Anwenden der Multiplikationsvorschrift)} \\ = & 2 \cdot 1 + 2 + 2 = & \textit{(Schreiben des zweiten Faktors als Nachfolger)} \\ = & 2 \cdot S(0) + 2 + 2 = & \textit{(Erneutes Anwenden der Multiplikationsvorschrift)} \\ = & 2 \cdot 0 + 2 + 2 + 2 = & \textit{(Anwenden von Regel I. der Multiplikationsvorschrift)} \\ = & 0 + 2 + 2 + 2 = & \textit{(Ausrechnen der Summe über mehrmaliges Anwenden der} \\ = & 6 & \end{array}$$

Idee hinter der Definition

Hinter der Definition steckt die Auffassung der Multiplikation als wiederholte Addition, wobei der zweite Faktor angibt, wie oft der erste wiederholt wird.

Genauso möglich ist eine Definition der Multiplikation, bei der der erste Faktor angibt, wie oft der zweite wiederholt wird:

$$\begin{array}{rlcl} \text{I.} & 0 \cdot n & := & 0 \\ \text{II.} & S(m) \cdot n & := & m \cdot n + m \end{array}$$

Der Beweis, dass diese alternative Definition der Multiplikation zu der zuvor hergeleiteten äquivalent ist, läuft über vollständige Induktion über zwei Variablen und ist daher recht lang, weswegen ich ihn hier nicht ausführe. Finden kann man den Beweis beispielsweise in [[NBewMultKomm]].

Division

In diesem Abschnitt wird eine Definition der Division hergeleitet und ihre rekursive Natur genauer thematisiert. Anschließend wird die hergeleitete Vorschrift mit der Art und Weise, wie kleine Kinder dividieren, verglichen.

Herleitung der Divisionsvorschrift

Auch zur Herleitung der Definition der Division auf den natürlichen Zahlen kann man zwei Fälle, Dividend gleich Null und Dividend ungleich Null, unterscheiden.

Die Division von Null durch jede positive natürliche Zahl soll Null sein. In Symbolen:

$0 : m := 0$ mit $m \in \mathbb{N}^+$.

Zur Herleitung der Divisionsvorschrift für den anderen Fall, Dividend ungleich Null, kann man das bereits bekannte Wissen über äquivalente Umformungen von Brüchen nutzen:

$$\begin{aligned}
&\frac{n}{m} = && \textit{(Hinzufügen und Abziehen von } m \textit{ im Zähler)}\\
= \;& \frac{n+(m-m)}{m} = && \textit{(Stellen von } (+m) \textit{ an den Beginn)}\\
= \;& \frac{m+(n-m)}{m} = && \textit{(Aufspalten des Bruchs nach dem ersten Summanden)}\\
= \;& \frac{m}{m} + \frac{n-m}{m} = && \textit{(Vereinfachen des ersten Summanden)}\\
= \;& 1 + \frac{n-m}{m}
\end{aligned}$$

Also:

Definition der Division auf den natürlichen Zahlen

I. $0 : m := 0$

II. $n : m := 1 + (n-m) : m$ (nur für $n \geq m$ definiert)

mit $n, m \in \mathbb{N}^+$.

Nutzbarkeit der Definition als Arbeitsvorschrift

Die rekursive Definition terminiert unabhängig von der Wahl von Dividend und Divisor. Um diese Aussage zu überprüfen, ist es zweckmäßig, zwei Fälle zu unterscheiden – den Fall, bei dem der

Divisor ein Teiler des Dividenden ist, die Division also „aufgeht“, und den Fall, bei der die Division nicht aufgeht.

Die Unterteilung in zwei Fälle ist nur eine Darstellungshilfe; formal ist sie problematisch, da an dieser Stelle das Teilerkonzept noch nicht definiert wurde und darüberhinaus sich das Teilerverhältnis ja gerade aus der Eigenschaft der Division, entweder aufzugehen oder nicht aufzugehen, ergibt.

Folgendes Zahlenbeispiel demonstriert die Anwendung der Divisionsvorschrift für den ersten Fall:

$$
\begin{aligned}
& 4 : 2 = && \textit{(Anwenden der Divisionsvorschrift)} \\
= \; & 1 + (4 - 2) : 2 = && \textit{(Ausrechnen des Dividenden durch mehrmaliges Anwend} \\
= \; & 1 + 2 : 2 = && \textit{(Anwenden der Divisionsvorschrift)} \\
= \; & 1 + 1 + (2 - 2) : 2 = && \textit{(Ausrechnen des Dividenden durch mehrmaliges Anwend} \\
= \; & 1 + 1 + 0 : 2 = && \textit{(Anwenden von Regel I. der Divisionsvorschrift)} \\
= \; & 1 + 1 = 1 + S(0) = && \textit{(Anwenden der Additionsvorschrift)} \\
= \; & S(1 + 0) = S(1) = 2
\end{aligned}
$$

Für den zweiten Fall – die Division geht nicht auf – terminiert das Verfahren ebenfalls, lässt aber, anders als bei der Anwendung der Divisionsvorschrift auf Divisionen, die aufgehen, das Ergebnis undefiniert:

$$
\begin{aligned}
& 4 : 3 = && \textit{(Anwenden der Divisionsvorschrift)} \\
= \; & 1 + (4 - 3) : 3 = && \textit{(Ausrechnen des Dividenden durch mehrmaliges Anwen} \\
= \; & 1 + 1 : 3 = && \textit{(Anwenden der Divisionsvorschrift)} \\
= \; & 1 + 1 + \underbrace{(1 - 3)}_{\text{nicht definiert}} : 3
\end{aligned}
$$

Allgemein: Bei jeder wiederholten Anwendung der Divisionsvorschrift ergibt sich ein kleinerer Dividend. Ist der Divisor ein Teiler des ursprünglichen Dividenden, so ist nach endlich vielen Schritten ein Quotient erreicht, dessen Dividend Null ist, womit Regel I. der Divisionsvorschrift greift und die Rekursion gebrochen ist.

Im anderen Fall tritt nach endlich vielen wiederholten Anwendungen der Divisionsvorschrift eine Subtraktion auf, deren Wert (wie gewünscht) nicht definiert ist.

Da also unabhängig von Dividend und Divisor die Rekursion nach endlich vielen Schritten gebrochen wird, ist die hergeleitete Definition als Arbeitsvorschrift verwendbar.

Vergleich mit der Divisionsmethode von Kindern

Kinder veranschaulichen sich das Dividieren durch Aufteilen einer gegebenen Menge mit so vielen Gegenständen, wie der Dividend groß ist, auf so viele Plätze, wie der Divisor groß ist. Geht die Division auf, liegen nach Abschluss des Verfahrens auf jedem Platz gleich viele Gegenstände; die Anzahl der Gegenstände pro Platz ist das Ergebnis der Division.

Diese Divisionsmethode spiegelt sich, mit einer kleinen Veränderung, auch in der hergeleiteten Divisionsvorschrift wieder: Während Kinder üblicherweise bei jedem Schritt nur einen einzigen Gegenstand auf einen Platz verteilen, kann man sich die hergeleitete Vorschrift so veranschaulichen, als ob sie pro Schritt auf alle Plätze jeweils einen Gegenstand verteilt.

Die Division $n : m$ bedeutet also, dass insgesamt n Gegenstände auf m Plätze verteilt werden. Die rechte Seite der Regel II., $1 + (n - m) : m$, bedeutet dann, dass m Gegenstände verteilt wurden, und für den nächsten Schritt dementsprechend nur noch $n - m$ Gegenstände übrig sind. Dass jeder Platz jeweils einen Gegenstand erhalten hat, begründet das Hinzustellen des Summanden 1.

– Relationen

In den folgenden Abschnitten wird definiert, was es bedeutet, wenn zwei Zahlrepräsentanten zueinander kleinergleich, kleiner, gleich, größer oder größergleich sind.

Die Definition der Gleichheit ist oberflächlich betrachtet trivial, führt jedoch das Konzept der „strukturellen Gleichheit“ ein, das bei den ganzen, rationalen und surrealen Zahlen eine wichtige Rolle spielt.

Bei der Definition der Kleinergleichrelation wird sich eine bemerkenswerte Symmetrie zeigen.

Gleichheit

Bei den natürlichen Zahlen wie hier vorgestellt ergibt sich die Gleichheit aus der sog. strukturellen Gleichheit (structural equality). „Strukturelle Gleichheit“ bedeutet, dass man die Gleichheit nicht etwa über bestimmte Eigenschaften der Zahlen festlegt (man könnte beispielsweise definieren: „Zwei Zahlen sind genau dann äquivalent, wenn ihre Quersummen gleich sind.“), sondern dass die Gleichheit unmittelbar aus dem Aufbau der Objekte – aus ihrer Identität – folgt.

Zwei Zahlen sind also genau dann gleich, wenn die Nachfolgerfunktion gleich oft angewendet wurde. In Symbolen:

$$\begin{aligned} 0 &= 0 &\Leftrightarrow&\ \text{(wahr)} \\ S(n) &= S(m) &\Leftrightarrow&\ n = m \end{aligned}$$

Das mag zunächst trivial erscheinen; bei der Definition der ganzen, rationalen und surrealen Zahlen aber muss man um die strukturelle Gleichheit wissen, da dort die strukturelle Gleichheit keine sinnvolle Äquivalenzrelation darstellt.

Kleiner-, Kleinergleich-, Größergleich- und Größerrelation

Weniger trivial als die Definition der Gleichheitsrelation sind die Definitionen von Kleiner-, Kleinergleich-, Größergleich- und Größerrelation.

Anstatt die Definitionen der Relationen alle eigens herzuleiten, ist es praktischer, zunächst zu untersuchen, in welcher Beziehung die Relationen zueinander stehen – insbesondere, ob man einige Relationen durch andere ausdrücken kann.

Dabei erkennt man, dass man alle Relationen durch die Kleinergleichrelation ausdrücken kann ([[STondering]], S. 10):

Ausdruck der Kleiner-, Größer- und Größergleichrelation der natürlichen Zahlen durch die Kleinergleichrelation

$$\begin{aligned} n &< m &:\Leftrightarrow&\ n \leq m \text{ und } n \neq m \\ n &> m &:\Leftrightarrow&\ n \not\leq m \\ n &\geq m &:\Leftrightarrow&\ n > m \text{ oder } n = m \end{aligned}$$

mit $n, m \in \mathbb{N}_0$.

Definiert man also die Kleinergleichrelation ($\leq$), so ergibt sich die Bedeutung der anderen Relationen „automatisch".

Zur Herleitung der Kleinergleichrelation kann man ähnlich wie zur Herleitung der Rechenoperatoren verfahren; man betrachtet also zunächst einfache Fälle, auf die man den komplizierten Fall zurückführt.

Im Fall der Kleinergleichrelation sind die Vergleich von und mit Null einfach; man definiert:

$0 \leq n :\Leftrightarrow$ (wahr) mit $n \in \mathbb{N}_0$.

$n \not\leq 0 :\Leftrightarrow$ (wahr) mit $n \in \mathbb{N}^+$, oder, umgeformt: $S(n) \not\leq 0$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ – jeder Nachfolger ist größer als Null.

Zur Herleitung der Definition für die anderen Fälle kann man $u \leq v$ ansetzen und dann das bereits bekannte Wissen über Äquivalenzumformungen von Ungleichungen nutzen:

$$\begin{array}{rcclcl} & u & \leq & v & \Leftrightarrow & \textit{(Schreiben von } u \textit{ und } v \textit{ als Nachfolger)} \\ \Leftrightarrow & n+1 & \leq & m+1 & \Leftrightarrow & \textit{(Abziehen von } 1 \textit{ auf beiden Seiten)} \\ \Leftrightarrow & n & \leq & m & & \end{array}$$

Anders geschrieben:

Definition der Kleinergleichrelation auf den natürlichen Zahlen					
I.	0	$\leq$	m	$:\Leftrightarrow$	(wahr)
II.	$S(n)$	$\not\leq$	0	$:\Leftrightarrow$	(wahr)
III.	$S(n)$	$\leq$	$S(m)$	$:\Leftrightarrow$	$n \leq m$
mit $n, m \in \mathbb{N}_0$.					

Beispiele:

$$\begin{array}{rrcll} & 1 & \leq & 3 & \Leftrightarrow \quad \textit{(Schreiben als Nachfolger)} \\ \Leftrightarrow & S(0) & \leq & S(2) & \Leftrightarrow \quad \textit{(Anwenden der Kleinergleichrelationsvorschrift)} \\ \Leftrightarrow & 0 & \leq & 2 & \Leftrightarrow \text{(wahr)} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcll} & 3 & > & 1 & \Leftrightarrow \quad \textit{(Schreiben als Kleinergleichrelation)} \\ \Leftrightarrow & 3 & \not\leq & 1 & \Leftrightarrow \quad \textit{(Schreiben als Nachfolger)} \\ \Leftrightarrow & S(2) & \not\leq & S(0) & \Leftrightarrow \quad \textit{(Anwenden der Kleinergleichrelationsvorschrift)} \\ \Leftrightarrow & 2 & \not\leq & 0 & \Leftrightarrow \text{(wahr)} \end{array}$$

Die hier definierte Kleinergleichrelation ist, wie sie es auch sein sollte, reflexiv ($n \leq n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$), antisymmetrisch (aus $n \leq m$ und $m \leq n$ folgt $n = m$) und transitiv (aus $x \leq y$ und $y \leq z$ folgt $x \leq z$). Da sich die Beweise dieser Eigenschaften aus vollständiger Induktion über mehrere Variablen ergeben, sind sie vergleichsweise lang, weswegen ich sie hier nicht ausführe.

Idee hinter der Definition

Die Idee, die hinter der hergeleiteten Kleinergleichrelationsvorschrift steckt, ist die gleiche wie die der Subtraktionsvorschrift, die „Relativität“: Ob zwei Zahlen zueinander kleinergleich sind, hängt nicht von ihren absoluten Zahlenwerten ab.

Dass der Subtraktions- und der Kleinergleichrelationsvorschrift die gleiche Idee zugrundeliegt, kann man schon an der Symmetrie der Notationen der Definitionen erkennen:

Regel II. der Subtraktionsvorschrift: $S(n) - S(m) \quad := \quad n - m$
Regel III. der Kleinergleichrelationsvorschrift: $S(n) \leq S(m) \quad :\Leftrightarrow \quad n \leq m$

– Natur des Anfangselements und der Nachfolgerfunktion

Die Existenz eines Anfangselements, das man mit „Null“ bezeichnet, und einer Nachfolgerfunktion S genügen, um eine Menge der Repräsentanten natürlicher Zahlen zu konstruieren.

An das Anfangselement stellt man dabei keinerlei Forderungen – es ist lediglich ein Symbol, ähnlich wie es die Elemente von Ergebnisräumen in der Kombinatorik sind.

Die einzige Bedingung, die eine Funktion erfüllen muss, damit man sie als Nachfolgerfunktion zur Konstruktion der natürlichen Zahlrepräsentanten nutzen kann, ist, dass der Nachfolgerrepräsentant $S(n)$ eines Zahlrepräsentanten n eindeutig ist – für jeden Nachfolgerrepräsentant $S(n)$ gibt es genau einen Zahlrepräsentanten n, von dem $S(n)$ der Nachfolger ist. In Symbolen: $S(n) = S(m) \Rightarrow n = m$

Über die Identität des Anfangselements und der Nachfolgerfunktion habe ich in den vorhergehenden Abschnitten keine Aussagen getroffen, 0 und S blieben also abstrakt. Insbesondere habe ich nirgendwo den Term $S(n)$ definiert.

Man kann aber auch 0 und S konkrete Werte zuweisen. Bekannt ist dieses Vorgehen aus der analytischen Geometrie, bei der man – je nach Vorliebe und Einsatzzweck – Vektoren beispielsweise konkret als Dreiertupel reeller Zahlen, Polynome bis zum Grad 3, oder Mengen parallelgleicher Pfeile begreift, oder aber abstrakt bleibt und allgemein rechnet – ohne Bezug auf eine bestimmte Realisierung der Axiome.

Der Vorteil der Konkretisierung liegt darin, dass man möglicherweise einfacher denken kann oder dass sich rechnerische Vorteile ergeben. Ein solcher rechnerischer Vorteil ergibt sich beispielsweise bei der üblichen mengentheoretischen Realisierung der natürlichen Zahlen, die ich im nächsten Abschnitt beschreiben werde.

Wichtig ist, dass einem bewusst ist, dass es keinesfalls notwendig ist, 0 und S zu konkretisieren. Anfangselement und Nachfolgerfunktion abstrakt zu lassen, ist genauso möglich und hat (je nach persönlichem Geschmack) den Vorteil, dass man die natürlichen Zahlen nicht in eine bestimmte Realisierung „zwingt“.

Mengentheoretische Realisierung der natürlichen Zahlen

Um 1900 herum war es den Mathematikern besonders wichtig, die Erkenntnisse der letzten Jahrhunderte zu formalisieren. Als zugrundeliegendes Axiomensystem nutzte man die Mengenlehre. ([[HilbertProg]], S. 1)

Die natürlichen Zahlen ergeben sich in den mengentheoretischen Umgebung dadurch, indem man das Anfangselement 0 und die Nachfolgerfunktion S sinnvoll konkretisiert. Eine für die Mengenlehre nützliche Konkretisierung enteckte/erfand Richard Dedekind [[NWikiDeDedekindPerson]] und lautet wie folgt:

Mengentheoretische Definition der natürlichen Zahlen

$0 := \{\}$

$S\colon M \mapsto S(M) := M \cup \{M\}$

Damit ergeben sich für die Zahlensymbole folgende Definitionen:

$$\begin{array}{lcl}
0 & = & \{\} \text{ (nach Definition)} \\
1 & = & S(0) = S(\{\}) = \{\} \cup \{\{\}\} = \{\{\}\} = \{0\} \\
2 & = & S(1) = S(\{0\}) = \{0\} \cup \{\{0\}\} = \{0, \{0\}\} = \{0, 1\} \\
3 & = & S(2) = S(\{0,1\}) = \{0,1\} \cup \{\{0,1\}\} = \{0, 1, \{0,1\}\} = \{0,1,2\} \\
4 & = & S(3) = \cdots = \{0,1,2,3\} \\
 & \vdots &
\end{array}$$

Die Menge der Repräsentanten natürlicher Zahlen ist dementsprechend:

$\mathbb{N}_0 = \{0, S(0), S(S(0)), S(S(S(0))), \ldots\} = \{\{\}, \{0\}, \{0,1\}, \{0,1,2\}, \ldots\}$

Man begreift Repräsentanten natürlicher Zahlen also als die Menge ihrer Vorgängerrepräsentanten.

Beispiel: $6 = \{0,1,2,3,4,5\} = \{n \in \mathbb{N}_0 \,|\, n < 6\}$.

Die Definitionen der Rechenoperatoren und Relationen kann man analog wie die Zahlensymbole in den Formalismus der Mengenlehre überführen; man also lediglich „0“ durch „$\{\}$“ ersetzen und statt „$S(M)$“ „$M \cup \{M\}$“ schreiben. Beispielsweise lautet die auf diese Weise übergeführte Definition der Addition wie folgt:

Mengentheoretische Definition der Addition auf den natürlichen Zahlen

$$\begin{array}{rlclcl}
\text{I.} & N & + & \{\} & = & N \\
\text{II.} & N & + & (M \cup \{M\}) & = & S(N+M) = (N+M) \cup \{N+M\}
\end{array}$$

mit $N, M \in \mathbb{N}_0$.

Dadurch, dass 0 und S jetzt nicht mehr rein abstrakt sind, sondern konkretisiert wurden, kann man einige der übertragenen Definitionen vereinfachen.

Beispielsweise kann man die Kleinergleichrelation ($\leq$) auf die (unechte) Teilmengenrelation ($\subseteq$) reduzieren. Diese Vereinfachung ist zulässig, da ein Repräsentant einer natürlichen Zahl in der mengentheoretischen Realisierung der Peano-Axiome die Menge der Repräsentanten all ihrer Vorgänger ist; ein Zahlenbeispiel verdeutlicht den Zusammenhang:

$$\begin{array}{rrcll} & 2 & \leq & 5 & \Leftrightarrow & \textit{(Schreiben als Mengen)} \\ \Leftrightarrow & \{0,1\} & \leq & \{0,1,2,3,4\} & \Leftrightarrow & \textit{(Ausnutzen von } (\leq) = (\subseteq)\textit{)} \\ \Leftrightarrow & \{0,1\} & \subseteq & \{0,1,2,3,4\} & \Leftrightarrow \text{(wahr)} & \end{array}$$

Verallgemeinerung der mengentheoretischen Realisierung der Peano-Axiome

Verbreitet ist auch noch eine Verallgemeinerung der im letzten Abschnitt vorgestellten mengentheoretischen Realisierung der natürlichen Zahlen. Betrachtet man die Anzahl der Elemente der mengentheoretischen Repräsentanten natürlicher Zahlen (die ja Mengen sind)...

$$\begin{array}{lcll} 0 & = & \{\}: & \text{keine Elemente} \\ 1 & = & \{0\}: & \text{ein Element} \\ 2 & = & \{0,1\}: & \text{zwei Elemente} \\ 3 & = & \{0,1,2\}: & \text{drei Elemente} \\ & \vdots & & \end{array}$$

...so fällt auf, dass der Repräsentant jeder Zahl genau so viele Elemente enthält, wie die Zahl, die er repräsentiert, groß ist.

Als Verallgemeinerung liegt nun nahe, einen Repräsentant einer natürlichen Zahl als die Menge aller Mengen, die so viele Elemente enthalten, wie die Zahl, die er repräsentiert, groß ist, zu begreifen. In Symbolen:

Verallgemeinerte mengentheoretische Definition der Zahlensymbole für natürliche Zahlen

$$\begin{aligned}
0 &:= \{M \mid M \text{ ist eine Menge und } M \text{ enthält keine Elemente}\} \\
1 &= \{M \mid M \text{ ist eine Menge und } M \text{ enthält ein Element}\} \\
2 &= \{M \mid M \text{ ist eine Menge und } M \text{ enthält zwei Elemente}\} \\
3 &= \{M \mid M \text{ ist eine Menge und } M \text{ enthält drei Elemente}\} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Die im letzten Abschnitt vorgestellten Repräsentanten natürlicher Zahlen der speziellen mengentheoretischen Realisierung der Peano-Axiome sind Elemente der verallgemeinerten Repräsentanten. Beispielsweise ist $3_{\text{speziell}} = \{0_{\text{spez.}}, 1_{\text{spez.}}, 2_{\text{spez.}}\}$ und $3_{\text{allgemein}} = \left\{ \underbrace{\{0_{\text{spez.}}, 1_{\text{spez.}}, 2_{\text{spez.}}\}}_{3_{\text{spez.}}}, \ldots \right.$ ander

Die Idee hinter dieser verallgemeinerten Realisierung liegt in der Abstraktion von Mengen auf ihre Mächtigkeit hin: Mengen, auch des Alltags (Taschen, Koffer), können unabhängig von der Art ihres Inhalts in der Zahl ihrer Elemente übereinstimmen.

Bei Kindern gilt diese Abstraktionsfähigkeit als eine Voraussetzung zum Rechnen ([[NMengAbst]], S. 5).

Visualisierung natürlicher Zahlen am Zahlenstrahl

Ein beliebtes Mittel zur Veranschaulichung natürlicher Zahlen ist der Zahlenstrahl. Dabei werden Zahlen mit Positionen auf dem Strahl identifiziert, und auch Addition und Subtraktion können durch Hinzunehmen eines zweiten Strahls und geeignetem Verschieben erklärt werden (Abb. [[BILD:NStrahl]] auf S. [[LINK:NStrahl]]).

Man sollte sich aber darüber bewusst sein, dass die oft ohne zu hinterfragen akzeptierte Äquidistanz der Zahlen auf dem Zahlenstrahl keineswegs aus der mathematischen Definition der natürlichen Zahlen nach Peano folgt.

Die Peano-Axiome fordern lediglich eine Nachfolgerfunktion S, die einem Zahlrepräsentanten n seinen eindeutigen Nachfolgerrepräsentanten $S(n)$ zuordnet. Möchte man das Konzept des Zahlenstrahls mittels der Peano-Axiomen formalisieren, so kann man für S beispielsweise folgende Funktion nehmen:

S: *Position* $\mapsto$ von *Position* ausgehend eine Längeneinheit weiter rechts

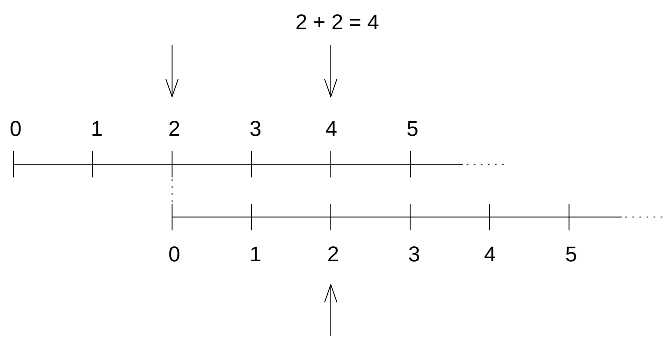

Abbildung 2: Veranschaulichung der Addition natürlicher Zahlen am Zahlenstrahl

---

Genauso verwendbar wäre aber eine Nachfolgerfunktion S, die abhängig vom Zahlrepräsentanten n, dem sie seinen Nachfolgerrepräsentanten $S(n)$ zuordnet, unterschiedlich weit nach rechts geht.

In der Tat nutzt man das Konzept des nicht-äquidistanten Zahlenstrahls, beispielsweise bei der Multiplikation und Division mittels Rechenschiebern [[NRechenschieber]]. Dort wird eine Zahl x nicht $x\,\mathrm{LE}$, sondern $\log x\,\mathrm{LE}$ (die Wahl der Basis unterliegt nur praktischen Überlegungen) von einem Ursprung entfernt aufgetragen.

Zur Multiplikation und Division werden dann die besonderen Eigenschaften der Logarithmusfunktion,

$\log x + \log y = \log(x \cdot y)$ und

$\log x - \log y = \log(x : y)$,

ausgenutzt; man führt also Multiplikation und Division auf Addition bzw. Subtraktion zurück. Addition und Subtraktion erfolgen wie beim äquidistanten Zahlenstrahl durch geeignetes Verschieben zweier Strähle. 04.11.2006

1.3.3 Ganze Zahlen

Zur Definition der ganzen Zahlen und der Operationen auf den ganzen Zahlen sind verschiedene Ansätze denkbar. Zwei Ansätze werden hier vorgestellt. Der eine ist vergleichsweise naheliegend, der andere komplizierter.

Beide haben ihre Vor- und Nachteile. Wie bei den natürlichen Zahlen ist keine Realisierung der ganzen Zahlen besonders „natürlich" oder auf eine andere Art und Weise ausgezeichnet; je nach Geschmack und Situationsanforderungen kann man zwischen den verschiedenen denkbaren Ansätzen frei wählen.

Ganze Zahlen als Verknüpfung der positiven natürlichen Zahlen mit zwei Symbolen

Man kann die ganzen Zahlen in drei Klassen einteilen: die negativen ganzen Zahlen, die Zahl Null, und die positiven ganzen Zahlen. Die positiven ganzen Zahlen unterscheiden sich von den negativen nur in ihrem Vorzeichen. Es liegt daher nahe, Repräsentanten positiver und negativer ganzer Zahlen als Verknüpfung eines Symbols $+$ bzw. $-$ mit den Repräsentanten natürlicher Zahlen anzusehen. In Symbolen:

$\mathbb{Z} := (\{+,-\} \times \mathbb{N}^+) \cup \{0\}$, wobei „$0$" auf der rechten Seite der Definition lediglich als Symbol, und nicht als den bereits definierten Repräsentanten der natürlichen Zahl Null, begriffen werden soll. Man nutzt zur Darstellung dieses Symbols trotzdem den üblichen Glyphen für Null, da dieses Symbol die Rolle der Null der ganzen Zahlen übernehmen wird; die Lesbarkeit wird durch die Assoziationen, die der vertraute Glyph weckt, erhöht.

Beispiele: $3_\mathbb{Z} = (+, 3_{\mathbb{N}^+}), \quad (-4)_\mathbb{Z} = (-, 4_{\mathbb{N}^+})$

Um die Elemente von $\mathbb{Z}$ mit denen von $\mathbb{N}_0$ unterscheiden zu können, werde ich Indizes nach Zahlsymbolen und Verknüpfungen nutzen. Beispielsweise meint „$3_\mathbb{Z}$" den Repräsentanten der ganzen Zahl Drei aus $\mathbb{Z}$, während „$3_{\mathbb{N}_0}$" für den Repräsentanten aus $\mathbb{N}_0$ steht. Wenn die Typzugehörigkeit aus dem Zusammenhang folgt, werde ich auf die Indizes der Übersichtlichkeit halber verzichten.

Diese mathematische Formalisierung des Begriffs der ganzen Zahlen kommt dem Alltag sehr nahe: Ganze Zahlen betrachtet man nicht als etwas von den natürlichen Zahlen völlig verschiedenes, sondern lediglich als eine naheliegende Erweiterung.

Dementsprechend führt man auch im Alltag die Rechenoperatoren und Relationen der ganzen Zahlen auf eine einfache Art und Weise auf die entsprechenden Regeln der natürlichen Zahlen zurück. Dies drückt sich beispielsweise in Regeln wie „minus mal minus ist plus" aus: Man ignoriert zunächst die Vorzeichen und rechnet über die Regeln der natürlichen Zahlen, und stellt dann dem Ergebnis noch ein Vorzeichen voraus.

– Vorteile dieser Definition

Diese Realisierung der ganzen Zahlen hat den Vorteil, dass die Repräsentation einer Zahl eindeutig ist: Jede ganze Zahl hat genau einen Repräsentanten in $\mathbb{Z}$.

(Das ist nicht selbstverständlich: Beispielsweise ist die Repräsentation einer Zahl bei der alternativ denkbaren Definition $\mathbb{Z}' = \{+, -\} \times \mathbb{N}_0$ nicht eindeutig, da es in $\mathbb{Z}'$ zwei Repräsentanten für Null gibt: $(+, 0_{\mathbb{N}_0})$ und $(-, 0_{\mathbb{N}_0})$.)

Das hat sprachliche Konsequenzen: Da jeder Zahl umkehrbar eindeutig genau eine Repräsentation – ein Element von $\mathbb{Z}$ – zugeordnet ist, kann man die ganzen Zahlen mit den Elementen von $\mathbb{Z}$ identifizieren, also die Unterscheidung von abstrakten Zahlen und Repräsentanten der Zahlen fallen lassen.

Außerdem muss man somit, wie auch bei den natürlichen Zahlen, nicht eigenhändig die Gleichheitsrelation definieren – die Gleichheitsrelation folgt aus der strukturellen Gleichheit; zwei Repräsentanten ganzer Zahlen, x und y, sind genau dann gleich, wenn sie in ihrer Identität übereinstimmen.

Anders ausgedrückt: $0 \in \mathbb{Z}$ ist nur zu sich selbst gleich. Für die anderen Repräsentanten gilt: Zwei Repräsentanten ganzer Zahlen, (s_1, n_1) und (s_2, n_2), sind genau dann gleich, wenn das Symbol übereinstimmt und die natürlichen Zahlrepräsentanten n_1 und m_2 gleich sind. In Symbolen:

$(s, n) \neq 0$

$(s_1, n_1) = (s_2, n_2) \Leftrightarrow s_1 = s_2$ und $n_1 = n_2$

– Nachteile dieser Definition

Nachteil dieser Realisierung der ganzen Zahlen ist, dass die Definitionen der Operatoren und Relationen auf den ganzen Zahlen nicht sehr elegant sind: Es sind viele Fallunterscheidungen notwendig, um die drei Klassen abzudecken. Beispielsweise ist die Addition nicht so einfach wie bei den natürlichen Zahlen als $n + 0 := n$, $n + S(m) := S(n + m)$ definierbar, sondern benötigt acht (!) Fallunterscheidungen:

$$x +_{\mathbb{Z}} y := \begin{cases} 0 & \text{für } x = -y \\ y & \text{für } x = 0 \text{ und } x \neq -y \\ (+, |x| +_{\mathbb{N}_0} |y|) & \text{für } x > 0 \text{ und } y \geq 0 \\ (+, |x| -_{\mathbb{N}_0} |y|) & \text{für } x > 0 \text{ und } y < 0 \text{ und } |x| > |y| \\ (-, |y| -_{\mathbb{N}_0} |x|) & \text{für } x > 0 \text{ und } y < 0 \text{ und } |x| < |y| \\ (-, |x| +_{\mathbb{N}_0} |y|) & \text{für } x < 0 \text{ und } y \leq 0 \\ (-, |x| -_{\mathbb{N}_0} |y|) & \text{für } x < 0 \text{ und } y > 0 \text{ und } |x| > |y| \\ (+, |y| -_{\mathbb{N}_0} |x|) & \text{für } x < 0 \text{ und } y > 0 \text{ und } |x| < |y| \end{cases}$$

mit:

$$-z := \begin{cases} 0_{\mathbb{Z}} & \text{für } z = 0_{\mathbb{Z}} \\ (-, n) & \text{für } z = (+, n) \\ (+, n) & \text{für } z = (-, n) \end{cases}$$

$$|z| := \begin{cases} 0_{\mathbb{N}_0} & \text{für } z = 0_{\mathbb{Z}} \\ n & \text{für } z = (s, n) \end{cases}$$

Diese Definition der Addition auf den ganzen Zahlen spiegelt die Idee wieder, dass man im Alltag die Operatoren auf den ganzen Zahlen auf Operatoren auf den natürlichen Zahlen zurückführt. Damit man korrekte Ergebnisse erhält, muss man dazu die Vorzeichen und absoluten Zahlenwerte der Operanden miteinander vergleichen.

– Abwägung der Vor- und Nachteile

Mir erscheint der Nachteil der uneleganten Definitionen für wichtiger als die Vorteile dieser Realisierung, weswegen ich die Realisierung der ganzen Zahlen als Verknüpfung der natürlichen Zahlrepräsentanten mit zwei Symbolen hier nicht weiter ausführen werde.

Stattdessen werde ich einen anderen Ansatz vorstellen, bei dem die Definitionen der Rechenoperatoren sehr elegant und kurz sind und ohne Fallunterscheidungen auskommen.

Da, wie erwähnt, keine Realisierung besonders ausgezeichnet ist, kann man nicht sagen, eine Realisierung sei allgemein „besser“ als eine andere. Vielmehr haben Realisierungen je nach Einssatzzweck und Geschmack Vor- und Nachteile.

Ganze Zahlen als Paare natürlicher Zahlen

Man kann ganze Zahlen auch durch Paare zweier natürlicher Zahlrepräsentanten repräsentieren: $\mathbb{Z} := \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$.

Dabei begreift man ein Paar $(n, m) \in \mathbb{Z}$ als Differenz der natürlichen Zahlrepräsentanten n und m, also als $n - m$; die „Relativität der Differenzoperation" wird unterstrichen (beispielsweise ist $8 - 3$ gleich $9 - 4$ gleich $10 - 5$). n bezeichne ich als „Vorwärtszählkomponente", m als „Rückwärtszählkomponente" des Paars (n, m).

Beispiele: $3_\mathbb{Z} \equiv (3_{\mathbb{N}_0}, 0_{\mathbb{N}_0}) \equiv (4_{\mathbb{N}_0}, 1_{\mathbb{N}_0}) \equiv (5_{\mathbb{N}_0}, 2_{\mathbb{N}_0}) \equiv \cdots, \qquad (-4)_\mathbb{Z} \equiv (0_{\mathbb{N}_0}, 4_{\mathbb{N}_0}) \equiv (1_{\mathbb{N}_0}, 5_{\mathbb{N}_0}) \equiv (2_{\mathbb{N}_0}, 6_{\mathbb{N}_0}) \equiv \cdots$

(Die genauere Bedeutung des $\equiv$-Zeichens werde ich gleich genauer erläutern; aus formalen Gründen darf man nicht das Gleichheitszeichen (=) an dieser Stelle nutzen. Statt $\mathbb{N}_0$ könnte man auch Elemente aus $\mathbb{N}^+$ oder aus bestimmten anderen Teilmengen von $\mathbb{N}_0$, $\{n \in \mathbb{N}_0 \,|\, n \geq k\}$ (mit k beliebig), zur Paarbildung heranziehen.)

Während man bei den natürlichen Zahlen nach Peano mittels einer Nachfolgerfunktion S nur vorwärts zählt, zählt man bei dieser Realisierung der ganzen Zahlen auch rückwärts:

Die erste Paarkomponente n eines Repräsentanten einer ganzen Zahl, (n, m), gibt an, wie oft, von der Null beginnend, vorwärts gezählt werden soll, und die zweite Komponente m gibt an, wie oft, ausgehend vom Ergebnis des Vorwärtszählens, man rückwärts zählen soll.

– Vor- und Nachteile dieser Definition

Bei dieser Realisierung der ganzen Zahlen ist die Zahlrepräsentation nicht eindeutig: So bedeuten beispielsweise die Paare $(8, 3)$, $(9, 4)$ und $(10, 5)$ dieselbe Zahl $5_\mathbb{Z}$. Dies ist nicht ganz unproblematisch, da viele Denkgewohnheiten nicht mehr sinnvoll anwendbar sind.

Auf der anderen Seite lässt diese Definition sehr elegante Definitionen der Rechenoperatoren und Relationen zu. Ich erachte diesen Vorteil für wichtiger als die Nachteile, die sich durch die nicht-eindeutige Zahlrepräsentation ergeben, und werde daher diesen Ansatz hier näher ausführen. Auch werde ich zwei Methoden vorstellen, die das Problem der nicht-eindeutigen Zahlrepräsentation lösen.

– Relationen

Bei der Definition der Rechenoperatoren und Relation auf den ganzen Zahlen greift man auf die Verknüpfungen der natürlichen Zahlen zurück. Anders als bei der zuerst vorgestellten Realisierung der ganzen Zahlen sind die Definitionen sehr kurz und kommen ohne Fallunterscheidungen aus.

Die Problematik, inwieweit man sicher sein kann, dass die hier präsentierten Vorschriften den bekannten Vorschriften entsprechen, die ich im Rahmen der natürlichen Zahlen auf S. [[LINK:NProbGleich]] erläutert habe, betrifft die ganzen Zahlen (natürlich) ebenfalls.

Äquivalenzrelation

Wie angedeutet, ist bei der Realisierung der ganzen Zahlen als Paare natürlicher Zahlrepräsentanten die Repräsentation einer Zahl nicht eindeutig. Man möchte nun trotzdem ganze Zahlen hinsichtlich ihrer Gleichheit vergleichen können; dazu muss man also eine Gleichheitsrelation definieren.

Anders als bei der Realisierung der natürlichen Zahlen nach Peano, bei der die Zahlrepräsentation eindeutig ist und damit die Gleichheitsbeziehung unmittelbar aus der strukturellen Gleichheit folgt, muss man bei der Realisierung der ganzen Zahlen als Paare natürlicher Zahlrepräsentanten die Äquivalenzrelation eigens definieren.

Anders formuliert möchte man gerne sagen, dass zwei Repräsentanten ganzer Zahlen, die hinsichtlich ihrer Identität unterschiedlich sind – beispielsweise $(8, 3)$ und $(9, 4)$ –, trotzdem äquivalent sind. Man schreibt dann $(8, 3) \equiv (9, 4)$; die Äquivalenzrelation ($\equiv$) muss man aber noch definieren.

Zur Herleitung der Äquivalenzbeziehung kann man die Grundidee der Definition von $\mathbb{Z}$ aufgreifen: Ein Repräsentant einer ganzen Zahl, (n, m) mit $n, m \in \mathbb{N}_0$, begreift man als die Differenz $n - m$.

Es liegt daher nahe, zwei Zahlrepräsentanten (n, m) und (ν, μ) mit $n, m, \nu, \mu \in \mathbb{N}_0$ genau dann als äquivalent zu erklären, wenn $n - m =_{\mathbb{N}_0} \nu - \mu$ ist.

Problem an dieser Definition ist, dass die Subtraktion $n - m$ bzw. $\nu - \mu$ nicht für alle $n, m \in \mathbb{N}_0$ bzw. $\nu, \mu \in \mathbb{N}_0$ definiert ist.

Möchte man beispielsweise die Gleichheit von $(-2)_{\mathbb{Z}} \equiv (3_{\mathbb{N}_0}, 5_{\mathbb{N}_0})$ zu einem anderen Ganzzahlrepräsentant untersuchen, müsste man, wenn man dieser Definition folgt, die Differenz aus $3_{\mathbb{N}_0}$ und $5_{\mathbb{N}_0}$

berechnen. $3_{\mathbb{N}_0} - 5_{\mathbb{N}_0}$ ist aber nicht definiert; die Definition ist also unzureichend, da sie nicht auf alle Repräsentanten ganzer Zahlen anwendbar ist.

Mittels des Wissens über Äquivalenzumformungen von Gleichungen kann man die Definition aber so umformen, dass sie für alle Repräsentanten ganzer Zahlen anwendbar wird:

$$\begin{array}{rcll} n - m & = & \nu - \mu \quad \Leftrightarrow & \text{(Herüberbringen von } m \text{ und } \mu\text{)} \\ \Leftrightarrow \quad n + \mu & = & \nu + m & \end{array}$$

Dieser Ausdruck ist für alle $n, m, \nu, \mu \in \mathbb{N}_0$ definiert. Man kann daher definieren: Zwei Repräsentanten ganzer Zahlen, (n, m) und (ν, μ) mit $n, m, \nu, \mu \in \mathbb{N}_0$, sind genau dann äquivalent, wenn der natürliche Zahlrepräsentant $n + \mu$ gleich dem natürlichen Zahlrepräsentant $\nu + n$ ist. In Symbolen:

Definition der Äquivalenz auf den ganzen Zahlen

$(n, m) \equiv_{\mathbb{Z}} (\nu, \mu) :\Leftrightarrow n + \mu =_{\mathbb{N}_0} \nu + m$ mit $(n, m), (\nu, \mu) \in \mathbb{Z}$.

Die Ungleichheit ($\not\equiv$) ergibt sich als die logische Umkehrung dieser Definition:

$(n, m) \not\equiv_{\mathbb{Z}} (\nu, \mu) :\Leftrightarrow n + \mu \neq_{\mathbb{N}_0} \nu + m$ mit $(n, m), (\nu, \mu) \in \mathbb{Z}$.

Bei dieser Definition der Äquivalenz ist also nicht die Identität der Zahlrepräsentanten entscheidend (wie sie es bei der Realisierung der natürlichen Zahlen nach Peano ist und dort auch sinnvoll ist), sondern vielmehr der Vergleich zweier natürlicher Zahlrepräsentanten, die sich auf eine bestimmte Art und Weise aus den Repräsentanten der ganzen Zahlen ergeben.

Es ist wichtig, die strukturelle Gleichheit ($=$) von der hier definierten Äquivalenzrelation ($\equiv$) zu unterscheiden. Beispielsweise ist $(3, 5)$ hinsichtlich der strukturellen Gleichheit, die die Identität der Repräsentanten vergleicht, nicht zu $(4, 6)$ gleich ($(3, 5) \neq (4, 6)$), da $3 \neq 4$ und $5 \neq 6$, wohl aber hinsichtlich der Äquivalenzrelation $\equiv$, die anhand der hergeleiteten Vorschrift vergleicht: $(3, 5) \equiv (4, 6)$, da $\underbrace{3 + 6}_{9} =_{\mathbb{N}_0} \underbrace{4 + 5}_{9}$.

Hinsichtlich der strukturellen Gleichheit ist $(3, 5)$ nur zu sich selbst, und zu keinem anderen Paar natürlicher Zahlrepräsentanten, gleich; hinsichtlich der Äquivalenzrelation ist $(3, 5)$ zu sich und zu unendlich vielen weiteren Paaren äquivalent.

Illustration des Äquivalenzkonzepts anhand der Kongruenz in der Geometrie

Äquivalenzrelationen führt man nicht nur im Kontext des formalen Aufbaus der Zahlen ein, sondern auch in anderen Teilgebieten der Mathematik, beispielsweise in der Geometrie: Dort kann man Dreiecke als 3-Tupel der Eckpunktskoordinaten begreifen. Die strukturelle Gleichheit drückt dann aus, dass zwei Dreiecke (A, B, C) und (X, Y, Z) mit den Eckpunkten A, B, C bzw. X, Y, Z genau aufeinander liegen, also dass $(A, B, C) = (X, Y, Z)$ gilt, was bedeutet, dass $A = X$, $B = Y$ und $C = Z$ gelten.

Eine mögliche Äquivalenzrelation ist in diesem Kontext dann die Kongruenzrelation, bei der nicht die absolute Lage der Dreiecke relevant ist, sondern nur entscheidend ist, ob die Dreiecke durch Kongruenzabbildungen zur Deckung gebracht werden können. [[CAequi]]

Formalisieren könnte man die Definition der Kongruenzrelation beispielsweise wie folgt:

$(A, B, C) \equiv (X, Y, Z) :\Leftrightarrow \overline{AB} = \overline{XY}$ und $\overline{BC} = \overline{YZ}$ und $\overline{CA} = \overline{ZX}$

Wie auch bei der Äquivalenz ganzer Zahlrepräsentanten muss man dabei zwischen der strukturellen Gleichheit und der Kongruenz unterscheiden; die Verwechslungsgefahr ist aber in der Geometrie geringer, da der Umgang mit Dreiecken viel anschaulicher ist als der formale Aufbau der Zahlenmengen.

Eigenschaften der Äquivalenzrelation

Von einer Äquivalenzrelation erwartet man, dass sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist [[CAequi]]. Die hergeleitete Äquivalenzrelationsvorschrift der ganzen Zahlen erfüllt diese drei Bedingungen:

- Reflexivität bedeutet, dass jeder Repräsentant einer Zahl zu sich selbst äquivalent ist.

  Beweis:

  $$\begin{array}{ccccl} & (n, m) & \equiv_{\mathbb{Z}} & (n, m) & \Leftrightarrow \qquad \textit{(Anwenden der Äquivalenzrelationsvorsc} \\ \Leftrightarrow & n + m & =_{\mathbb{N}_0} & n + m & \Leftrightarrow \text{(wahr)} \end{array}$$

- Symmetrie bedeutet, dass, wenn ein Repräsentant x zu einem Repräsentanten y äquivalent ist, auch y zu x äquivalent ist.

  Die Symmetrie der aufgestellten Äquivalenzrelation folgt aus der Symmetrie der strukturellen Gleichheit (=):

$$\begin{array}{rrcll}
 & x & \equiv_{\mathbb{Z}} & y & \Leftrightarrow \quad \textit{(Schreiben als Paare)} \\
\Leftrightarrow & (n,m) & \equiv_{\mathbb{Z}} & (\nu,\mu) & \Leftrightarrow \quad \textit{(Anwenden der Äquivalenzrelationsvorschrift)} \\
\Leftrightarrow & n+\mu & =_{\mathbb{N}_0} & \nu+m & \Leftrightarrow \quad \textit{(Vertauschen der beiden Seiten)} \\
\Leftrightarrow & \nu+m & =_{\mathbb{N}_0} & n+\mu & \Leftrightarrow \quad \textit{(Rückwärtiges Anwenden der Äquivalenzrelation} \\
\Leftrightarrow & (\nu,\mu) & =_{\mathbb{N}_0} & (n,m) & \Leftrightarrow \quad \textit{(Schreiben als „}x\textit{“ und „}y\textit{“)} \\
\Leftrightarrow & y & \equiv_{\mathbb{Z}} & x &
\end{array}$$

- Transitivität bedeutet, dass, wenn ein Repräsentant x zu einem Repräsentant y äquivalent ist, und wenn y zu einem Repräsentant z äquivalent ist, auch x zu z äquivalent ist. In Symbolen: $x \equiv y$ und $y \equiv z \Rightarrow x \equiv z$ mit $x, y, z \in \mathbb{Z}$.

  Voraussetzungen:

  $$\begin{array}{lrcccrcl}
  \text{I.} & x = (n,m) & \equiv_{\mathbb{Z}} & (\nu,\mu) = y & \Leftrightarrow & n+\mu & = & \nu+m \\
  \text{II.} & y = (\nu,\mu) & \equiv_{\mathbb{Z}} & (a,b) = z & \Leftrightarrow & \nu+b & = & a+\mu
  \end{array}$$

  Behauptung: $x = (n,m) \equiv (a,b) = z$

  Beweis:

  $$\begin{array}{lrcll}
  \text{I.} \Leftrightarrow & x & \equiv & y & \Leftrightarrow \quad \textit{(Anwenden der Äquivalenzrela} \\
  \Leftrightarrow & n+\mu & = & \nu+m & \Leftrightarrow \quad \textit{(Addieren von } (\nu+b) \textit{ zu beide} \\
  \Leftrightarrow & n+\mu+\nu+b & = & \nu+m+\nu+b & \Leftrightarrow \quad \textit{(Schreiben von „}\nu+b\textit{“ der rec} \\
  \Leftrightarrow & n+\mu+\nu+b & = & \nu+m+a+\mu & \Leftrightarrow \quad \textit{(Abziehen von } (\mu+\nu) \textit{ auf beid} \\
  \Leftrightarrow & n+b & = & m+a & \Leftrightarrow \quad \textit{(Umdrehen der Summationsr} \\
  \Leftrightarrow & n+b & = & a+m & \Leftrightarrow \quad \textit{(Rückwärtiges Anwenden der} \\
  \Leftrightarrow & (n,m) & \equiv & (a,b) & \Leftrightarrow \text{Beh.}
  \end{array}$$

Definition der Zahlensymbole für ganze Zahlen

Die Äquivalenzrelation ist auch wichtig zur Definition der Bedeutung der Zahlensymbole. Im Einführungsbeispiel auf S. [[LINK:ZPaarEinf]] vermied ich es, Zahlensymbole mit der strukturellen Gleichheit ($=$) zu erklären, ich ließ also die Identität der Zahlensymbole undefiniert:

$3_{\mathbb{Z}} \equiv (3_{\mathbb{N}_0}, 0_{\mathbb{N}_0}) \equiv (4_{\mathbb{N}_0}, 1_{\mathbb{N}_0}) \equiv (5_{\mathbb{N}_0}, 2_{\mathbb{N}_0}) \equiv \cdots, \quad (-4)_{\mathbb{Z}} \equiv (0_{\mathbb{N}_0}, 4_{\mathbb{N}_0}) \equiv (1_{\mathbb{N}_0}, 5_{\mathbb{N}_0}) \equiv (2_{\mathbb{N}_0}, 6_{\mathbb{N}_0}) \equiv \cdots$

Stattdessen nutzte ich die Äquivalenzrelation ($\equiv$). Das hat den Grund, dass es unendlich viele mögliche Paare natürlicher Zahlrepräsentanten gibt, die hinsichtlich der Äquivalenzrelation ($\equiv$) alle dieselbe ganze Zahl repräsentieren.

Hinsichtlich der Rechenoperatoren ($+$, $-$, $\cdot$, $:$) und Relationen ($<$, $\leq$, $>$, $\geq$) „verhalten“ sich all diese unendlich vielen Repräsentanten gleich. Willkürlich für jede Zahl einen Repräsentanten herauszusuchen, den man dann zur Definition der Bedeutung des entsprechenden Zahlsymbols nutzen würde, erscheint daher nicht sinnvoll.

(Ich werde beim Abschnitt über die Wiederherstellung der Repräsentationseindeutigke auf S. [[LINK:ZRep]] zeigen, dass dieses Vorgehen durchaus Sinn ergeben kann, vorausgesetzt, dass man noch ein paar andere Dinge beachtet.)

Den Problemen kann man also aus dem Weg gehen, indem man die Bedeutung der Zahlsymbole hinsichtlich der strukturellen Gleichheit vorerst nicht definiert und nur die Äquivalenzrelation zur Definition nutzt:

Definition der Zahlensymbole für ganze Zahlen

$$0_{\mathbb{Z}} :\equiv (0_{\mathbb{N}_0}, 0_{\mathbb{N}_0})_{\mathbb{Z}}$$

$$\begin{array}{lll}
1_{\mathbb{Z}} & :\equiv & (1_{\mathbb{N}_0}, 0_{\mathbb{N}_0})_{\mathbb{Z}} \\
2_{\mathbb{Z}} & :\equiv & (2_{\mathbb{N}_0}, 0_{\mathbb{N}_0})_{\mathbb{Z}} \\
3_{\mathbb{Z}} & :\equiv & (3_{\mathbb{N}_0}, 0_{\mathbb{N}_0})_{\mathbb{Z}} \\
 & \vdots &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{lll}
(-1)_{\mathbb{Z}} & :\equiv & (0_{\mathbb{N}_0}, 1_{\mathbb{N}_0})_{\mathbb{Z}} \\
(-2)_{\mathbb{Z}} & :\equiv & (0_{\mathbb{N}_0}, 2_{\mathbb{N}_0})_{\mathbb{Z}} \\
(-3)_{\mathbb{Z}} & :\equiv & (0_{\mathbb{N}_0}, 3_{\mathbb{N}_0})_{\mathbb{Z}} \\
 & \vdots &
\end{array}$$

Man trifft zunächst keine Entscheidung über die Identität der Zahlensymbole, die folgenden Ausdrücke sind also undefiniert:

$0_{\mathbb{Z}} = ?$, $1_{\mathbb{Z}} = ?$, $2_{\mathbb{Z}} = ?$, $\ldots$

Um die folgenden Definitionen der Relationen und Rechenoperatoren anwenden zu können, ist es notwendig, für ganze Zahlen bestimmte Repräsentanten auszuwählen. Da, wie ich stellenweise auch beweisen werde, sich alle Repräsentanten einer ganzen Zahl „gleich verhalten“, kann diese Wahl willkürlich erfolgen; was das konkret bedeutet, wird im nächsten Abschnitt klar werden.

Kleiner-, Kleinergleich-, Größergleich- und Größerrelation

Wie bei der Definition der natürlichen Zahlen in dieser Arbeit kann man auch bei den ganzen Zahlen die Kleiner- ($<$), Größergleich- ($\geq$) und Größerrelation ($>$) auf die Kleinergleichrelation ($\leq$) zurückführen. ([[STondering]], S. 10)

Bei der Realisierung der ganzen Zahlen als Paare natürlicher Zahlrepräsentanten ergibt sich dabei eine sprachliche Unsauberkeit: Da, wie bereits erläutert, die strukturelle Gleichheit keine sinnvolle Äquivalenzrelation auf den ganzen Zahlen darstellt, ist auch die Relation „kleiner oder strukturell gleich“ nicht besonders sinnvoll –

beispielsweise wäre $(3,5)$ nicht kleinergleich zu $(4,6)$, obwohl beide Paare (-2) repräsentieren.

Stattdessen meine ich im Folgenden mit der „Kleinergleichrelation" die Relation „kleiner oder äquivalent"; dementsprechend müsste es auch „Kleineräquivalentrelation" heißen. In der Literatur wird dieser Begriff aber nicht genutzt. Ich folge der Konvention und schreibe „Kleinergleichrelation" bzw. „$\leq$". Analoges gilt für die Größergleichrelation.

Zur Herleitung der Kleinergleichrelation kann man analog zur Herleitung der Äquivalenzrelation die Paare als Differenzen begreifen und das bereits bekannte Wissen über Äquivalenzumformungen von Ungleichungen nutzen:

$$\begin{array}{rcccll} & (n,m) & \leq_{\mathbb{Z}} & (\nu,\mu) & \Leftrightarrow & \textit{(Umschreiben als Differenzen)} \\ \Leftrightarrow & n-m & \leq_{\mathbb{N}_0} & \nu-\mu & \Leftrightarrow & \textit{(Herüberbringen von } m \textit{ und } \mu\textit{)} \\ \Leftrightarrow & n+\mu & \leq_{\mathbb{N}_0} & \nu+m & & \end{array}$$

Der Ausdruck der vorherigen Zeile ist für alle $n,m,\nu,\mu \in \mathbb{N}_0$ definiert; man kann also definieren:

Definition der Kleinergleichrelation auf den ganzen Zahlen

$(n,m) \leq_{\mathbb{Z}} (\nu,\mu) :\Leftrightarrow n +_{\mathbb{N}_0} \mu \leq_{\mathbb{N}_0} \nu +_{\mathbb{N}_0} m$

mit $(n,m),(\nu,\mu) \in \mathbb{Z}$.

Beispiel:

$$\begin{array}{rcccll} & 3_{\mathbb{Z}} & \leq_{\mathbb{Z}} & 5_{\mathbb{Z}} & \Leftrightarrow & \textit{(Schreiben als Paare natürlicher Zahlre} \\ \Leftrightarrow & (5_{\mathbb{N}_0}, 2_{\mathbb{N}_0}) & \leq_{\mathbb{Z}} & (6_{\mathbb{N}_0}, 1_{\mathbb{N}_0}) & \Leftrightarrow & \textit{(Anwenden der Definition der Kleinergle} \\ \Leftrightarrow & 5_{\mathbb{N}_0} + 1_{\mathbb{N}_0} & \leq_{\mathbb{N}_0} & 6_{\mathbb{N}_0} + 2_{\mathbb{N}_0} & \Leftrightarrow & \textit{(Ausrechnen der beiden Seiten)} \\ \Leftrightarrow & 6_{\mathbb{N}_0} & \leq_{\mathbb{N}_0} & 8_{\mathbb{N}_0} & \Leftrightarrow \text{(wahr)} & \end{array}$$

Um die Kleinergleichrelationsvorschrift anwenden zu können, muss man als ersten Schritt sich für eine bestimmte Repräsentierung der zu vergleichenden Zahlen entscheiden. Im Beispiel wurde für $3_{\mathbb{Z}}$ willkürlich der Repräsentant $(5_{\mathbb{N}_0}, 2_{\mathbb{N}_0})$, und für $5_{\mathbb{Z}}$ der Repräsentant $(6_{\mathbb{N}_0}, 1_{\mathbb{N}_0})$ gewählt; man hätte aber auch beliebige andere Repräsentanten von $3_{\mathbb{Z}}$ bzw. $5_{\mathbb{Z}}$ nehmen können.

Ich verzichte an dieser Stelle auf die Beweise der Reflexivität ($x \leq x$ für alle $x \in \mathbb{Z}$), Antisymmetrie (aus $x \leq y$ und $y \leq x$ folgt $x \equiv y$) und Transitivität (aus $x \leq y$ und $y \leq z$ folgt $x \leq z$). Die Grundidee der Beweise liegt darin, die Gleichungen so umzuformen, dass man auf die Eigenschaften der Kleinergleichrelation der natürlichen Zahlen zurückgreifen kann.

– Rechenoperatoren

Unter der Realisierung der ganzen Zahlen als Paare natürlicher Zahlrepräsentanten lassen sich die Operatoren auf ihnen sehr elegant definieren.

Addition

Zur Herleitung der Additionsvorschrift kann man zwei Repräsentanten ganzer Zahlen, (n, m) und (ν, μ) mit $n, m, \nu, \mu \in \mathbb{N}_0$, betrachten, und dann das bereits bekannte Wissen über äquivalente Termumformungen nutzen:

$$\begin{aligned}
& (n-m)+(\nu-\mu)= && \textit{(Weglassen der Plusklammern)} \\
= \;& n-m+\nu-\mu= && \textit{(Gruppieren nach Vorzeichen)} \\
= \;& n+\nu-m-\mu= && \textit{(Ausklammern der negativen Summanden)} \\
= \;& n+\nu-(m+\mu)= && \textit{(Klammern der positiven Summanden)} \\
= \;& (n+\nu)-(m+\mu)
\end{aligned}$$

Also erhält man folgende kurze Definition der Addition, die ohne Fallunterscheidungen auskommt:

> **Definition der Addition auf den ganzen Zahlen**
>
> $(n, m) +_{\mathbb{Z}} (\nu, \mu) := (n +_{\mathbb{N}_0} \nu, m +_{\mathbb{N}_0} \mu)$
>
> mit $(n, m), (\nu, \mu) \in \mathbb{Z}$.

Beispiel:

$$\begin{aligned}
& (-2)_{\mathbb{Z}}+(-5)_{\mathbb{Z}} \equiv && \textit{(Schreiben als Paare natürlicher Zahlrepräsentant} \\
\equiv \;& (2_{\mathbb{N}_0}, 4_{\mathbb{N}_0}) +_{\mathbb{Z}} (9_{\mathbb{N}_0}, 14_{\mathbb{N}_0}) = && \textit{(Anwenden der Additionsvorschrift)} \\
= \;& (2_{\mathbb{N}_0}+9_{\mathbb{N}_0}, 4_{\mathbb{N}_0}+14_{\mathbb{N}_0}) = && \textit{(Ausrechnen der Paarkomponenten)} \\
= \;& (11_{\mathbb{N}_0}, 18_{\mathbb{N}_0}) \equiv && \textit{(Schreiben als Dezimalzahl)} \\
\equiv \;& (-7)_{\mathbb{Z}}
\end{aligned}$$

Bei der Definition der Zahlensymbole auf S. [[LINK:ZSym]] schrieb ich, jeder der unendlich vielen Repräsentanten einer ganzen Zahl „verhalte“ sich bei den Rechenoperationen gleich. Diese Aussage kann man jetzt, mit definierter Additionsvorschrift, überprüfen, indem man exemplarisch das Beispiel erneut ausrechnet, jetzt aber andere Repräsentationen von (-2) und (-5) wählt:

$$\begin{aligned}
& (-2)_{\mathbb{Z}}+(-5)_{\mathbb{Z}} \equiv && \textit{(Schreiben als Paare natürlicher Zahlrepräsentanten} \\
\equiv \;& (4_{\mathbb{N}_0}, 6_{\mathbb{N}_0}) + (2_{\mathbb{N}_0}, 7_{\mathbb{N}_0}) = && \textit{(Anwenden der Additionsvorschrift)} \\
= \;& (4_{\mathbb{N}_0}+2_{\mathbb{N}_0}, 6_{\mathbb{N}_0}+7_{\mathbb{N}_0}) = && \textit{(Ausrechnen der Paarkomponenten)} \\
= \;& (6_{\mathbb{N}_0}, 13_{\mathbb{N}_0}) \equiv && \textit{(Schreiben als Dezimalzahl)} \\
\equiv \;& (-7)_{\mathbb{Z}}
\end{aligned}$$

Allgemein (mit $a, b \in \mathbb{N}_0$ beliebig):

$$\begin{aligned}
& (n+a, m+a) + (\nu+b, \mu+b) = && \textit{(Anwenden der Additionsvorschrift)} \\
= \; & (n+a+\nu+b, m+a+\mu+b) \equiv && \\
\equiv \; & (n+\nu, m+\mu) && \text{da } \textit{(Anwenden der Äquivalenzdefinition)}\text{:}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (n+a+\nu+b) + (m+\mu) = n+m+\nu+\mu+a+ \\
= \; & (m+a+\mu+b) + (n+\nu) = n+m+\nu+\mu+a+
\end{aligned}$$

da die $\mathbb{N}_0$-Addition kommutiert und assoziiert.

Die hier aufgeführte Definition der Addition auf den ganzen Zahlen ist zur verinnerlichten Vorschrift äquivalent. Um diese Tatsache einzusehen, kann man beweisen, dass die bekannten Gesetze, die die Addition betreffen, wie beispielsweise das Kommutativ- oder Assoziativgesetz, auch von der hergeleiteten Additionsvorschrift erfüllt werden.

(Formal reicht reicht das noch nicht aus, um zu beweisen, dass die verinnerlichte Vorschrift wirklich der hier gegebenen entspricht; vielmehr dienen die Beweise nur der Einübung der Additionsvorschrift und zeigen darüberhinaus noch einige interessante Konsequenzen der Nichteindeutigkeit der Zahlrepräsentation.)

- Beweis der Gültigkeit des Kommutativgesetzes $(n, m) + (\nu, \mu) = (\nu, \mu) + (n, m)$:

$$\begin{aligned}
& (n, m) + (\nu, \mu) = && \textit{(Anwenden der Additionsvorschrift)} \\
= \; & (n+\nu, m+\mu) = && \textit{(Anwenden des } \mathbb{N}_0\textit{-Kommutativgesetzes innerhalb der} \\
= \; & (\nu+n, \mu+m) = && \textit{(Schreiben als Summe zweier ganzer Zahlrepräsentant} \\
= \; & (\nu, \mu) + (n, m) &&
\end{aligned}$$

- Beweis der Gültigkeit des Assoziativgesetzes $[(n_1, m_1) + (n_2, m_2)] + (n_3, m_3) = (n_1, m_1) + [(n_2, m_2) + (n_3, m_3)]$:

$$\begin{aligned}
& [(n_1, m_1) + (n_2, m_2)] + (n_3, m_3) = && \textit{(Anwenden der Additionsvorschrift)} \\
= \; & (n_1+n_2, m_1+m_2) + (n_3, m_3) = && \textit{(Erneutes Anwenden der Additionsvor} \\
= \; & ((n_1+n_2)+n_3, (m_1+m_2)+m_3) = && \textit{(Anwenden des Assoziativgesetzes der} \\
= \; & (n_1+(n_2+n_3), m_1+(m_2+m_3)) = && \textit{(Schreiben als Summe)} \\
= \; & (n_1, m_1) + (n_2+n_3, m_2+m_3) = && \textit{(Schreiben des zweiten Summanden a} \\
= \; & (n_1, m_1) + [(n_2, m_2) + (n_3, m_3)] &&
\end{aligned}$$

- Überprüfung der Neutralität von Null, $(n, m) + 0_{\mathbb{Z}} = (n, m)$:

$$\begin{array}{rll} & (n,m) + 0_{\mathbb{Z}} \equiv & \textit{(Schreiben von } 0_{\mathbb{Z}} \textit{ als Paar)} \\ \equiv & (n,m) + (a,a) = & \textit{(}a \in \mathbb{N}_0 \textit{ beliebig)} \\ & & \textit{(Anwenden der Additionsvorschrift)} \\ = & (n+a, m+a) \equiv & \\ \equiv & (n,m) & \text{da } (n+a)+m = (m+a)+n \end{array}$$

Die Neutralität von Null gilt also nur in abgeschwächter Form, nämlich hinsichtlich der Äquivalenz (≡), nicht aber hinsichtlich der strukturellen Gleichheit (=).

Streng genommen ist sogar die Formulierung des Neutralitätsgesetzes, wie hier von mir verwendet, an dieser Stelle formal ohne Sinn, da $0_{\mathbb{Z}}$ über die strukturelle Gleichheit (=) in Beziehung gesetzt wird, obwohl ich die Identität von $0_{\mathbb{Z}}$ noch nicht definiert habe – bei der Definition der Zahlensymbole für die ganzen Zahlen auf S. [[LINK:ZSym]] habe ich lediglich definiert, dass $0_{\mathbb{Z}}$ äquivalent zu $(0,0)$ ist, aber keine Aussage über die Identität von $0_{\mathbb{Z}}$ getroffen.

Auch gibt es nicht nur ein neutrales Element, sondern unendlich viele: $0_{\mathbb{Z}} \equiv (0_{\mathbb{N}_0}, 0_{\mathbb{N}_0}) \equiv (1_{\mathbb{N}_0}, 1_{\mathbb{N}_0}) \equiv (2_{\mathbb{N}_0}, 2_{\mathbb{N}_0}) \equiv (3_{\mathbb{N}_0}, 3_{\mathbb{N}_0}) \equiv \ldots$

Ab S. [[LINK:ZRep]] werden zwei Verfahren vorgestellt, mit denen man die Zahlrepräsentation eindeutig machen kann. Damit wird auch die Neutralität von Null hinsichtlich der strukturellen Gleichheit wiederhergestellt und auch wird es nur noch ein einziges neutrales Element geben.

- Der Beweis, dass z das inverse Element zu $-z$ ist, kann man erst später erbringen, da die Negation an dieser Stelle noch nicht definiert ist. Der Beweis folgt auf S. [[LINK:ZNeg]].

Die Idee hinter der Definition der Addition kann man erkennen, wenn man die Bedeutung der Komponenten der Paare, die die ganzen Zahlen repräsentieren, betrachtet: Ein Paar (n,m) gibt an, dass man von Null beginnend n Mal vorwärts, und dann vom Ergebnis des Vorwärtszählens m mal rückwärts zählt.

Das Ergebnis der Addition von (n,m) und (ν,μ), also $(n,m)+(\nu,\mu) = (n+\nu, m+\mu)$, fasst also die Vorwärtszähl- und die Rückwärtszählkomponenten der beiden Summanden zusammen; das Ergebnis der Addition ist die Zahl, die man erhält, wenn man von Null ausgehend zuerst n Mal vorwärts zählt, dann weitere ν Male vorwärts zählt, und dann zunächst m Mal, dann μ Mal rückwärts zählt.

Ingesamt zählt man also, von Null beginnend, $n + \nu$ Mal vorwärts, und von dem Ergebnis des Vorwärtszählens ausgehend $m + \mu$ Mal rückwärts.

Subtraktion

Um die Subtraktionsvorschrift über den ganzen Zahlen herzuleiten, kann man das bereits bekannte Wissen über äquivalente Termumformungen nutzen oder den Weg über die Negation gehen.

- **Herleitung mittels äquivalenter Termumformungen**

  Man betrachtet zwei Repräsentanten ganzer Zahlen, (n, m) und (ν, μ) mit $n, m, \nu, \mu \in \mathbb{N}_0$, und nutzt das Wissen über äquivalente Termumformungen:

  $$\begin{array}{lll} & (n-m)-(\nu-\mu) = & \textit{(Weglassen der Plusklammer, Ausmultiplizieren der} \\ = & n-m-\nu+\mu = & \textit{(Gruppieren nach Vorzeichen)} \\ = & n+\mu-m-\nu = & \textit{(Ausklammern von Summanden gleicher Vorzeichen} \\ = & (n+\mu)-(m+\nu) & \end{array}$$

  Man erhält also folgende kurze Definition der Subtraktion auf den ganzen Zahlen, die wie die hergeleitete Definition der Addition ohne Fallunterscheidungen auskommt:

  $(n, m) - (\nu, \mu) := (n + \mu, m + \nu)$

- **Herleitung mittels Negation**

  Alternativ kann man die Subtraktionsvorschrift auch unter Ausnutzung der bekannten Regel $a - b = a + (-b)$ herleiten, also unter Rückgriff auf die Negation. Dazu muss man freilich zunächst die Negationsvorschrift herleiten, beispielsweise über das Wissen über äquivalente Termumformungen:

  $$\begin{array}{lll} & -(n-m) = & \textit{(Ausmultiplizieren der Minusklammer)} \\ = & -n-(-m) = & \textit{(Ausnutzen des Zusammenhangs von Subtraktion und N} \\ = & -n+m = & \textit{(Umdrehen der Summationsreihenfolge)} \\ = & m+(-n) = & \textit{(Schreiben als Differenz)} \\ = & m-n & \end{array}$$

  Also: $-(n, m) := (m, n)$

  Mit hergeleiteter Negationsvorschrift kann man jetzt auch Beweisen, dass $-z = (m, n)$ das bezüglich der Addition inverse Element zu $z = (n, m)$:

$$
\begin{aligned}
& z+(-z)= && \textit{(Schreiben als Paare natürlicher Zahlrepräsentante}\\
=\ & (n,m)+[-(n,m)]= && \textit{(Anwenden der Negationsvorschrift)}\\
=\ & (n,m)+(m,n)= && \textit{(Anwenden der Additionsvorschrift)}\\
=\ & (n+m,m+n)\equiv && \\
\equiv\ & (0,0)\equiv 0_{\mathbb{Z}} && \text{da } (n+m)+0=0+(m+n)
\end{aligned}
$$

An der Verwendung des $\equiv$-Zeichens kann man erkennen, dass es nicht nur ein inverses Element gibt, sondern unendlich viele. Das steht im Einklang mit meiner Behauptung, alle Repräsentanten einer Zahl „verhalten“ sich gleich.

Mit bekannter Negationsvorschrift kann man nun die Subtraktionsvorschrift herleiten:

$$
\begin{aligned}
& (n,m)-(\nu,\mu)= && \textit{(Schreiben als Summe)}\\
=\ & (n,m)+[-(\nu,\mu)]= && \textit{(Anwenden der Negationsvorschrift)}\\
=\ & (n,m)+(\mu,\nu)= && \textit{(Anwenden der Additionsvorschrift)}\\
=\ & (n+\mu,m+\nu)
\end{aligned}
$$

Beide Wege führen also zur gleichen Subtraktionsvorschrift. Das ist auch nicht weiter verwunderlich, da man beim ersten Herleitungsweg, der Herleitung mittels äquivalenter Termumformungen, implizit auch die Negation nutzte.

Definition der Subtraktion auf den ganzen Zahlen

$(n,m) -_{\mathbb{Z}} (\nu,\mu) := (n +_{\mathbb{N}_0} \mu, m +_{\mathbb{N}_0} \nu)$

mit $(n,m),(\nu,\mu) \in \mathbb{Z}$.

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
& (-2)_{\mathbb{Z}}-(-5)_{\mathbb{Z}}\equiv && \textit{(Schreiben als Paare natürlicher Zahlrepräsentanten}\\
\equiv\ & (2_{\mathbb{N}_0},4_{\mathbb{N}_0})-(9_{\mathbb{N}_0},14_{\mathbb{N}_0})= && \textit{(Anwenden der Subtraktionsvorschrift)}\\
=\ & (2_{\mathbb{N}_0}+14_{\mathbb{N}_0},4_{\mathbb{N}_0}+9_{\mathbb{N}_0})= && \textit{(Ausrechnen der Paarkomponenten)}\\
=\ & (16_{\mathbb{N}_0},13_{\mathbb{N}_0})\equiv && \textit{(Schreiben als Dezimalzahl)}\\
\equiv\ & 3_{\mathbb{Z}}
\end{aligned}
$$

Die hergeleitete Subtraktionsvorschrift ist, wie sie es auch sollte, antikommutativ; es gilt also nicht $x-y=y-x$ (für allgemeines $x,y\in\mathbb{Z}$), sondern $x-y=-(y-x)$:

$$\begin{aligned}
& -(y-x) = && \textit{(Schreiben von } x \textit{ und } y \textit{ als Paare)}\\
= \;& -[(\nu,\mu)-(n,m)] = && \textit{(Anwenden der Subtraktionsvorschrift)}\\
= \;& -(\nu+m,\mu+n) = && \textit{(Anwenden der Negationsvorschrift)}\\
= \;& (\mu+n,\nu+m) = && \textit{(Vertauschen der Summanden)}\\
= \;& (n+\mu,m+\nu) = && \textit{(Rückwärtiges Anwenden der Subtraktionsvorschrift)}\\
= \;& (n,m)-(\nu,\mu) = && \textit{(Schreiben der Paare als } x \textit{ und } y\textit{)}\\
= \;& x-y
\end{aligned}$$

In die Subtraktionsvorschrift kann man die Idee hineininterpretieren, dass die Bedeutung der Paarkomponenten des Subtrahenden vertauscht wird: Während das Paar (ν,μ) in der Addition $(n,m)+(\nu,\mu)$ bedeutet, dass man ν Mal vorwärts und μ Mal rückwärts zählt, bedeutet es bei der Subtraktion $(n,m)-(\nu,\mu)$ dagegen, dass man μ Mal vorwärts und ν Mal rückwärts zählt.

Besonders deutlich wird das an einem Zahlenbeispiel, bei dem man als zweite Paarkomponente des Subtrahenden $0_{\mathbb{N}}$ wählt:

$$\begin{aligned}
& (-1)_{\mathbb{Z}} - 6_{\mathbb{Z}} \equiv && \textit{(Schreiben als Paare)}\\
\equiv \;& (2_{\mathbb{N}_0},3_{\mathbb{N}_0}) - (6_{\mathbb{N}_0},0_{\mathbb{N}_0}) = && \textit{(Anwenden der Subtraktionsvorschrift)}\\
= \;& (2+0,3+6) = && \textit{(Ausrechnen der Paarkomponenten)}\\
= \;& (2_{\mathbb{N}_0},9_{\mathbb{N}_0}) \equiv (-7)_{\mathbb{Z}}
\end{aligned}$$

Man erkennt, dass $6_{\mathbb{N}_0}$, das im Subtrahenden die erste Paarkomponente ist und somit angibt, wie oft man vorwärts zählt, nach Anwenden der Subtraktionsvorschrift an zweiter Stelle im Paar $(2+0,3+6)$ steht und somit angibt, wie oft man rückwärts zählt.

Multiplikation

Zur Herleitung der Multiplikationsvorschrift kann man zwei Repräsentanten ganzer Zahlen, (n,m) und (ν,μ), mit $n,m,\nu,\mu \in \mathbb{N}_0$ betrachten und dann das Wissen über äquivalente Termumformungen nutzen:

$$\begin{aligned}
& (n-m)\cdot(\nu-\mu) = && \textit{(Ausmultiplizieren)}\\
= \;& n\nu - n\mu - m\nu + m\mu = && \textit{(Gruppieren nach Vorzeichen)}\\
= \;& n\nu + m\mu - n\mu - m\nu = && \textit{(Ausklammern nach Vorzeichen)}\\
= \;& (n\nu+m\mu)-(n\mu+m\nu)
\end{aligned}$$

Man erhält also folgende kurze Definition der Multiplikation auf den ganzen Zahlen:

Definition der Multiplikation auf den ganzen Zahlen

$(n,m) \cdot_{\mathbb{Z}} (\nu,\mu) := (n\nu +_{\mathbb{N}_0} m\mu, n\mu +_{\mathbb{N}_0} m\nu)$

mit $(n,m),(\nu,\mu) \in \mathbb{Z}$.

Diese Definition ist, wie auch die Definitionen der Addition und Subtraktion, ohne Fallunterscheidungen.

Beispiel:

$$\begin{aligned}
& (-2)_{\mathbb{Z}} \cdot (-5)_{\mathbb{Z}} \equiv && \textit{(Schreiben als Paare natürlicher} \\
\equiv\ & (2_{\mathbb{N}_0}, 4_{\mathbb{N}_0}) \cdot\ (9_{\mathbb{N}_0}, 14_{\mathbb{N}_0}) = && \textit{(Anwenden der Multiplikationsvo} \\
=\ & (2_{\mathbb{N}_0} \cdot 9_{\mathbb{N}_0} + 4_{\mathbb{N}_0} \cdot 14_{\mathbb{N}_0}, 2_{\mathbb{N}_0} \cdot 14_{\mathbb{N}_0} + 4_{\mathbb{N}_0} \cdot 9_{\mathbb{N}_0}) = && \textit{(Ausrechnen der Summanden)} \\
=\ & (18_{\mathbb{N}_0} + 56_{\mathbb{N}_0}, 28_{\mathbb{N}_0} + 36_{\mathbb{N}_0}) = && \textit{(Ausrechnen der Paarkomponent} \\
=\ & (74_{\mathbb{N}_0}, 64_{\mathbb{N}_0}) \equiv && \textit{(Schreiben als Dezimalzahl)} \\
\equiv\ & 10_{\mathbb{Z}}
\end{aligned}$$

Um die Kommutativität und Assoziativität der hier definierten Ganzzahlmultiplikation zu beweisen, kann man xy und yx bzw. $x(yz)$ und $(xy)z$ nach der hergeleiteten Multiplikationsvorschrift ausrechnen und die Ergebnisse miteinander vergleichen, ähnlich wie beim Beweis der Antikommutativität der Ganzzahlsubtraktion (erbracht auf S. [[LINK:ZSubAnti]]).

Die Beweise bringen aber für den weiteren Verlauf dieser Arbeit keinen Erkenntnisgewinn, weswegen ich sie hier nicht ausführe.

Die Definition spiegelt die bekannten Regeln „minus mal minus ist plus“ und „minus mal plus ist minus“ wieder: Das Produkt aus (n, m) und (ν, μ), $(n\nu + m\mu, n\mu + m\nu)$, enthält als Vorwärtszählkomponente $n\nu + m\nu$ und als Rückwärtszählkomponente $n\mu + m\nu$.

n und ν sind die Vorwärtszählkomponenten der beiden Faktoren und wiegen im Produkt somit positiv („plus mal plus ergibt plus“), weshalb das Produkt $n\nu$ auch in der Vorwärtszählkomponente des Produkts vorkommt. m und ν sind die Rückwärtszählkomponenten der beiden Faktoren; nach „minus mal minus ergibt plus“ kommen sie ebenfalls in der Vorwärtszählkomponente des Produkts vor.

Die beiden Summanden der Rückwärtszählkomponente des Produkts sind die Produkte jeweils entgegengesetzter Paarkomponenten – „plus mal minus ergibt minus“, „minus mal plus ergibt minus“.

Größerwerden der Paarkomponenten

Da die Definitionen der Addition, Subtraktion und der Multiplikation der ganzen Zahlen auf die $\mathbb{N}_0$-Addition und -Multiplikation, nicht aber auf die $\mathbb{N}_0$-Subtraktion zurückgreifen, wachsen mit jeder Rechenoperation die Paarkomponenten monoton.

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
& 3_{\mathbb{Z}} \equiv && \textit{(Addieren eines Nullterms)}\\
\equiv\ & 3_{\mathbb{Z}} + \overbrace{3_{\mathbb{Z}} - 2_{\mathbb{Z}} - 1_{\mathbb{Z}}}^{\equiv 0_{\mathbb{Z}}} \equiv && \textit{(Schreiben als Paare natürlicher Zahlrepräsent}\\
\equiv\ & (3,0) + (3,0) - (2,0) - (1,0) = && \textit{(Anwenden der Additionsvorschrift)}\\
=\ & (6,0) - (2,0) - (1,0) = && \textit{(Anwenden der Subtraktionsvorschrift)}\\
=\ & (6,2) - (1,0) = && \textit{(Erneutes Anwenden der Subtraktionsvorschrif}\\
=\ & (6,3) \equiv && \textit{(Schreiben als Dezimalzahl)}\\
\equiv\ & 3_{\mathbb{Z}}
\end{aligned}
$$

Die Addition eines Nullterms ändert also, wie auch gewünscht, den Zahlenwert hinsichtlich der Äquivalenz nicht, $(3,0) \equiv (6,3)$; die Paarkomponenten wurden im Verlauf der Rechnung jedoch mit jedem Schritt größer.

Abgesehen davon, dass für bestimmte Einsatzzwecke das ständige Anwachsen der Paarkomponenten unhandlich ist – beispielsweise für eine Computerimplementierung –, stört das von einem rein mathematischen Standpunkt aus gesehen nicht.

Hat der persönliche Geschmack trotzdem kleine Paarkomponenten lieber, so kann man „kürzen“, indem man von beiden Paarkomponenten eine beliebige natürliche Zahl subtrahiert (genauer: ein natürlicher Zahlrepräsentant, für den die Subtraktion auf den natürlichen Zahlen noch definiert ist).

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
& 3_{\mathbb{Z}} \equiv (6_{\mathbb{N}_0}, 3_{\mathbb{N}_0}) \equiv && \textit{(Abziehen von } 2 \textit{ von den Paarkomponenten)}\\
\equiv\ & (4_{\mathbb{N}_0}, 1_{\mathbb{N}_0}) \equiv 3_{\mathbb{Z}} && \text{da } \underbrace{6 +_{\mathbb{N}_0} 1}_{7} = \underbrace{4 +_{\mathbb{N}_0} 3}
\end{aligned}
$$

„Vollständig gekürzt“ ist ein Repräsentant dann, wenn eine seiner beiden Paarkomponenten Null ist; beispielsweise ist der „vollständig gekürzte“ Repräsentant von $3_{\mathbb{Z}}$ $(3_{\mathbb{N}_0}, 0_{\mathbb{N}_0})$.

Beweis der Gültigkeit der Umformungsregel $(-x)\,(-y) = xy$

Bei der Vorstellung der rationalen Zahlen werde ich später die bekannte Vereinfachungsregel $(-x)\,(-y) = xy$ nutzen. Die Gültigkeit dieser Umformung werde ich hier beweisen:

$$\begin{array}{lll} & (-x)\,(-y) = & \textit{(Schreiben als Paare)} \\ = & [-(n,m)]\,[-(\nu,\mu)] = & \textit{(Anwenden der Negationsvorschrift)} \\ = & (m,n)\cdot(\mu,\nu) = & \textit{(Anwenden der Multiplikationsvorschrift)} \\ = & (m\mu+n\nu, m\nu+n\mu) = & \textit{(Vertauschen der Summanden nach dem Kommutativg} \\ = & (n\nu+m\mu, n\mu+m\nu) = & \textit{(Schreiben als Produkt durch rückwärtiges Anwenden} \\ = & (n,m)\cdot(\nu,\mu) = & \textit{(Schreiben als „}x\textit{“ und „}y\textit{“)} \\ = & xy & \end{array}$$

Division

In diesem Abschnitt wird eine Definition der Division auf den ganzen Zahlen hergeleitet. Das erfolgt in großen Teilen analog zur Herleitung der Divisionsvorschrift auf den natürlichen Zahlen (S. [[LINK:NDivision]]), führt jedoch noch auf zwei Probleme, die die $\mathbb{N}_0$-Division nicht hat.

Zur Herleitung der Definition der Division auf den ganzen Zahlen kann man ähnlich vorgehen wie bei der Herleitung der Division auf den natürlichen Zahlen: Man betrachtet zwei Repräsentanten ganzer Zahlen, x und χ mit $x, \chi \in \mathbb{Z}$ und $\chi \not\equiv 0$, und setzt dann den Bruch $\frac{x}{\chi}$ an. Dann versucht man den Bruch so in zwei Teile aufzuspalten, dass der eine Teil 1 ist und der andere Teil rekursiv in weiteren Schritten berechnet werden kann.

Als Grundfall kann man den Fall nehmen, bei dem der Dividend Null ist: $0_{\mathbb{Z}} : \chi := 0_{\mathbb{Z}}$ für $\chi \not\equiv 0$.

Für den anderen Fall – der Dividend ist nicht Null – kann man sich des Wissens über äquivalente Termumformungen bedienen und erhält so eine provisorische Divisionsvorschrift:

$$\begin{array}{lll} & \dfrac{x}{\chi} = & \textit{(Hinzufügen und Abziehen von } \chi \textit{ im Zähler)} \\ = & \dfrac{x+\chi-\chi}{\chi} = & \textit{(Stellen von } (+\chi) \textit{ an den Beginn)} \\ = & \dfrac{\chi+x-\chi}{\chi} = & \textit{(Aufspalten des Bruchs nach dem ersten Summanden)} \\ = & \dfrac{\chi}{\chi}+\dfrac{x-\chi}{\chi} = & \textit{(Vereinfachen des ersten Bruchs)} \\ = & 1+\dfrac{x-\chi}{\chi} & \end{array}$$

Die Idee hinter der provisorische Definition $x : \chi = 1 + (x - \chi) : \chi$ illustriert ein Zahlenbeispiel:

$$\begin{aligned}
& 12_{\mathbb{Z}} : 4_{\mathbb{Z}} \equiv && \textit{(Anwenden der provisorischen Divisionsvorsch} \\
\equiv\ & 1_{\mathbb{Z}} + (12_{\mathbb{Z}} - 4_{\mathbb{Z}}) : 4_{\mathbb{Z}} \equiv && \textit{(Ausrechnen des Dividenden)} \\
\equiv\ & 1_{\mathbb{Z}} + 8_{\mathbb{Z}} : 4_{\mathbb{Z}} \equiv && \textit{(Erneutes Anwenden der provisorischen Divisi} \\
\equiv\ & 1_{\mathbb{Z}} + 1_{\mathbb{Z}} + (8_{\mathbb{Z}} - 4_{\mathbb{Z}}) : 4_{\mathbb{Z}} \equiv && \textit{(Ausrechnen des Dividenden)} \\
\equiv\ & 1_{\mathbb{Z}} + 1_{\mathbb{Z}} + 4_{\mathbb{Z}} : 4_{\mathbb{Z}} \equiv && \textit{(Erneutes Anwenden der provisorischen Divisi} \\
\equiv\ & 1_{\mathbb{Z}} + 1_{\mathbb{Z}} + 1_{\mathbb{Z}} + (4_{\mathbb{Z}} - 4_{\mathbb{Z}}) : 4_{\mathbb{Z}} \equiv && \textit{(Ausrechnen des Dividenden)} \\
\equiv\ & 1_{\mathbb{Z}} + 1_{\mathbb{Z}} + 1_{\mathbb{Z}} + 0_{\mathbb{Z}} : 4_{\mathbb{Z}} \equiv && \textit{(Erneutes Anwenden der provisorischen Divisi} \\
\equiv\ & 1_{\mathbb{Z}} + 1_{\mathbb{Z}} + 1_{\mathbb{Z}} + 0_{\mathbb{Z}} \equiv && \textit{(Ausrechnen der Summe)} \\
\equiv\ & 3_{\mathbb{Z}}
\end{aligned}$$

Die Idee hinter dieser provisorischen Divisionsvorschrift ist also, dass man den Bruch so lange kleiner macht, bis er Null wird, und bei jedem Schritt des Kleinermachens eine Eins anhäuft.

Die in der Herleitung benutzten Termumformungen sind zwar korrekt, die provisorische Divisionsvorschrift ist aber trotzdem noch nicht vollständig, da sie, wenn entweder der Dividend oder der Divisor (aber nicht beide) negativ ist, nicht terminiert, wie folgendes Zahlenbeispiel exemplarisch zeigt:

$$\begin{aligned}
& (-12) : 4 \equiv && \textit{(Anwenden der provisorischen Divisionsvorschrift} \\
\equiv\ & 1 + [(-12) - 4] : 4 \equiv && \textit{(Ausrechnen des Dividenden)} \\
\equiv\ & 1 + (-16) : 4 \equiv && \textit{(Erneutes Anwenden der provisorischen Divisions} \\
\equiv\ & 1 + 1 + [(-16) - 4] : 4 \equiv && \textit{(Ausrechnen des Dividenden)} \\
\equiv\ & 1 + 1 + (-20) : 4 \equiv && \textit{(Erneutes Anwenden der provisorischen Divisions} \\
\equiv\ & 1 + 1 + 1 + [(-20) - 4] : 4 \equiv && \textit{(Ausrechnen des Dividenden)} \\
\equiv\ & 1 + 1 + 1 + (-24) : 4 \equiv \\
\equiv\ & \cdots
\end{aligned}$$

Die Zahl der bei jedem Schritt hinzugefügten Einser wächst also über alle Grenzen; entsprechend wird der Zähler des jeweils übrig bleibenden Bruchs ohne Beschränkung kleiner.

Für den Fall, dass entweder Zähler oder Nenner negativ ist, also für $x\chi < 0$, darf man also nicht versuchen, den Bruch immer kleiner zu machen und dabei Einser anzuhäufen, sondern man muss den Bruch immer größer machen und dabei (-1)-er anhäufen. In Symbolen:

$$
\begin{aligned}
& \frac{x}{\chi} = && \textit{(Hinzufügen und Abziehen von } \chi \textit{ im Zähler)} \\
= \; & \frac{x+\chi-\chi}{\chi} = && \textit{(Stellen von } (-\chi) \textit{ an den Beginn)} \\
= \; & \frac{(-\chi)+x+\chi}{\chi} = && \textit{(Aufspalten des Bruchs nach dem ersten Summanden)} \\
= \; & \frac{-\chi}{\chi} + \frac{x+\chi}{\chi} = && \textit{(Vereinfachen des ersten Summanden)} \\
= \; & -1 + \frac{x+\chi}{\chi}
\end{aligned}
$$

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
& (-12) : 4 \equiv && \textit{(Anwenden der neuen Divisionsvorschrift} \\
\equiv \; & (-1) + [(-12)+4] : 4 \equiv && \textit{(Ausrechnen des Dividenden)} \\
\equiv \; & (-1) + (-8) : 4 \equiv && \textit{(Erneutes Anwenden der neuen Divisions} \\
\equiv \; & (-1) + (-1) + [(-8)+4] : 4 \equiv && \textit{(Ausrechnen des Dividenden)} \\
\equiv \; & (-1) + (-1) + (-4) : 4 \equiv && \textit{(Erneutes Anwenden der neuen Divisions} \\
\equiv \; & (-1) + (-1) + (-1) + [(-4)+4] : 4 \equiv && \textit{(Ausrechnen des Dividenden)} \\
\equiv \; & (-1) + (-1) + (-1) + 0 : 4 \equiv && \textit{(Erneutes Anwenden der provisorischen} \\
\equiv \; & (-1) + (-1) + (-1) + 0 \equiv && \textit{(Ausrechnen der Summe)} \\
\equiv \; & -3
\end{aligned}
$$

Die beiden Teildefinitionen für $x\chi > 0$ und $x\chi < 0$ kann man zur vollständigen Definition der Division der ganzen Zahlen zusammenfassen:

Definition der Division auf den ganzen Zahlen

$$
x :_{\mathbb{Z}} \chi :\equiv \begin{cases} \text{undefiniert} & \text{für } \chi \equiv 0 \\ 0 & \text{für } x \equiv 0 \text{ und } \chi \not\equiv 0 \\ 1 + (x-\chi) :_{\mathbb{Z}} \chi & \text{für } x\chi > 0 \\ (-1) + (x+\chi) :_{\mathbb{Z}} \chi & \text{für } x\chi < 0 \end{cases}
$$

mit $x, \chi \in \mathbb{Z}$.

Interessanterweise stimmt diese Definition der Division auf den ganzen Zahlen mit der Definition der Division auf den natürlichen Zahlen dieser Arbeit (S. [[LINK:NDiv]]) bis auf Typunterschiede ($\mathbb{Z}$ statt $\mathbb{N}_0$) und die Regel für den Fall $x\chi < 0$ (ein Fall, der bei den natürlichen Zahlen nicht auftreten kann) überein!

Anders als die Definitionen der Addition, Subtraktion und Multiplikation greift diese Definition der Division weder auf die Paarkomponenten von x und χ, noch auf die Rechenoperationen der natürlichen Zahlen zurück. Eine Konsequenz daraus ist, dass sie auch nicht die Identität von $x : \chi$ definiert, sondern lediglich eine Äquivalenzbeziehung angibt, vergleichbar mit der Definition der Zahlensymbole ganzer Zahlen auf S. [[LINK:ZSym]].

Stattdessen beschreibt die Definition einen rekursiven Algorithmus; man muss daher noch überprüfen, ob die Definition in allen Fällen, also unabhängig von Dividend und Divisor, als Arbeitsvorschrift einsetzbar ist. Dazu muss nach einer endlichen Anzahl von wiederholten Anwendungen der Vorschrift der Fall $x \equiv 0$ auftreten, wodurch die Rekursion gebrochen wird.

Wenn der Divisor ein Teiler des Dividenden ist, tritt – wie bei der Divisionsvorschrift der natürlichen Zahlen – nach endlich vielen Schritten ein Fall auf, bei dem der Dividend Null ist und so die Rekursion gebrochen wird. Bei den natürlichen Zahlen nähert man sich dabei dem Null-Dividenden nur aus dem Positiven an; bei der Ganzzahldivision gibt es aber auch die Möglichkeit, dass der Dividend oder der Divisor negativ ist, was erfordert, dass man sich aus dem Negativen annähern muss.

Ist jedoch der Divisor nicht Teiler des Dividenden, so tritt bei der Ganzzahldivision ein Problem auf, dass es bei der Division auf den natürlichen Zahlen nicht gibt, was folgendes Zahlenbeispiel exemplarisch zeigt:

$$\begin{aligned}
& 4 : 3 \equiv && \textit{(Anwenden der Divisionsvorschrift)} \\
\equiv\ & 1 + (4-3) : 3 \equiv && \textit{(Ausrechnen des Dividenden)} \\
\equiv\ & 1 + 1 : 3 \equiv && \textit{(Anwenden der Divisionsvorschrift)} \\
\equiv\ & 1 + 1 + (1-3) : 3 \equiv && \textit{(Ausrechnen des Dividenden)} \\
\equiv\ & 1 + 1 + (-2) : 3 \equiv && \textit{(Anwenden der Divisionsvorschrift)} \\
\equiv\ & 1 + 1 + (-1) + [(-2)+3] : 3 \equiv && \textit{(Ausrechnen des Dividenden)} \\
\equiv\ & 1 + 1 + (-1) + 1 : 3 \equiv && \text{Wiederauftreten der Division } 1:3 \\
\equiv\ & \cdots
\end{aligned}$$

Der Fall, bei dem der Dividend Null ist, wird also „verfehlt“. Bei der $\mathbb{N}_0$-Division ist das kein Problem, da dort eine Subtraktion wie $1-3$, deren Ergebnis als Dividend dienen würde, nicht definiert ist und somit das Verfahren abgebrochen wird. Bei den ganzen Zahlen ist aber $1-3$ definiert, was dazu führt, dass beim weiteren Anwenden der Divisionsvorschrift niemals ein Fall auftritt, bei dem der Dividend Null ist; stattdessen wechselt der Dividend bei jedem weiteren Schritt sein Vorzeichen.

Ist der Divisor also kein Teiler des Dividenden, so ist die hergeleitete Divisionsvorschrift nicht als Arbeitsvorschrift einsetzbar. Da dieses Problem nur Fälle betrifft, bei denen die Ganzzahldivision sowieso nicht anwendbar ist, spielt es in der Praxis keine große Rolle. Möchte man trotzdem die Definition mathematisch einwandfrei formulieren, so muss man sie um eine weitere Fallunterscheidung ergänzen:

$$x :_{\mathbb{Z}} \chi :\equiv \begin{cases} \text{undefiniert} & \text{für } \chi \equiv 0 \\ \text{undefiniert} & \text{für } |x| < |\chi| \\ 0 & \text{für } x \equiv 0 \text{ und } \chi \not\equiv 0 \\ 1 + (x - \chi) :_{\mathbb{Z}} \chi & \text{für } x\chi > 0 \\ (-1) + (x + \chi) :_{\mathbb{Z}} \chi & \text{für } x\chi < 0 \end{cases}$$

mit $x, \chi \in \mathbb{Z}$ und $|z| = \begin{cases} z & \text{für } z \geq 0 \\ -z & \text{für } z < 0 \end{cases}$

– Eindeutigkeit der Repräsentation

Das Problem der fehlenden Eindeutigkeit der Zahlrepräsentation ist schon mehrmals angeklungen. Für sich genommen ist die fehlende Eindeutigkeit kein Problem, sondern zunächst nur eine Tatsache.

Betrachtet man aber die Konsequenzen, die sich aus der fehlenden Repräsentationseindeutigkeit ergeben, wird klar, wieso man sich eine eindeutige Repräsentation wünscht: Anstatt einfach auf die strukturelle Gleichheit zurückgreifen zu können, muss man eine Äquivalenzrelation definieren, um so von „Gleichheit“ sprechen zu können, wie man es gewohnt ist.

Ein Zahlenbeispiel demonstriert die Unzulänglichkeit der strukturellen Gleichheit:

$$\left.\begin{array}{l} 2_{\mathbb{Z}} + 2_{\mathbb{Z}} \equiv (3_{\mathbb{N}_0}, 1_{\mathbb{N}_0}) + (3_{\mathbb{N}_0}, 1_{\mathbb{N}_0}) = (6_{\mathbb{N}_0}, 2_{\mathbb{N}_0}) \equiv 4_{\mathbb{Z}} \\ 2_{\mathbb{Z}} \cdot 2_{\mathbb{Z}} \equiv (3_{\mathbb{N}_0}, 1_{\mathbb{N}_0}) \cdot (3_{\mathbb{N}_0}, 1_{\mathbb{N}_0}) = (9_{\mathbb{N}_0} + 1_{\mathbb{N}_0}, 3_{\mathbb{N}_0} + 3_{\mathbb{N}_0}) = (10_{\mathbb{N}_0}, 6_{\mathbb{N}_0}) \equiv 4_{\mathbb{Z}} \end{array}\right\} \begin{array}{l} (6_{\mathbb{N}_0}, 2_{\mathbb{N}_0}) \neq (10 \\ \text{lediglich: } (6_{\mathbb{N}_0}, \end{array}$$

Außerdem ist nicht klar, welches Element aus $\mathbb{Z}$ man nun betrachtet, wenn man beispielsweise von $3_{\mathbb{Z}}$ spricht: Meint man $(3_{\mathbb{N}_0}, 0_{\mathbb{N}_0})$, $(4_{\mathbb{N}_0}, 1_{\mathbb{N}_0})$ oder einen andere der unendlich vielen Repräsentanten $(3_{\mathbb{N}_0} + a, 0_{\mathbb{N}_0} + a)$ (mit $a \in \mathbb{N}_0$ beliebig)?

Aus diesem Grund entschied ich mich bei der Definition der Zahlensymbole der ganzen Zahlen, die Identität der Symbole ungeklärt zu lassen (bspw. $3_{\mathbb{Z}} := ?$) und nur Äquivalenzen ($3_{\mathbb{Z}} :\equiv (3, 0)$) zu erklären.

Ein weiterer Nachteil der fehlenden Repräsentationseindeutigkeit ist, dass man – anders als beispielsweise bei der Definition von $\mathbb{Z}$ als $\mathbb{Z} := (\mathbb{N}^+ \times \{+,-\}) \cup \{0\}$, die ich wegen ihrer Unhandlichkeit verworfen hatte – eine ganze Zahl nicht mit einem Element aus $\mathbb{Z}$ identifizieren kann: Welches Element der unendlich vielen denkbaren Elementen, die alle zueinander äquivalent sind, sollte man nehmen?

Es gibt nun zwei klassische Wege, um von der Menge der nichteindeutigen Repräsentanten der ganzen Zahlen, $\mathbb{Z}$, zu einer Menge von eindeutigen Repräsentanten $\mathbb{Z}^*$ zu kommen. Dabei muss man die Definitionen der Rechenoperatoren und Relationen nicht erneut herleiten, sondern kann sie mit kleinen Anpassungen übernehmen.

Ohne weitere Angaben meine ich auch im Folgenden mit „Repräsentanten ganzer Zahlen" immer Elemente aus $\mathbb{Z}$, nicht aus $\mathbb{Z}^*$.

Eindeutigkeit durch Normalisierung

Bei der Normalisierungsmethode zeichnet man unter allen Repräsentanten einer ganzen Zahl einen Repräsentanten aus. Dazu definiert man eine Normalisierungsfunktion n, die jedem Repräsentanten einer ganzen Zahl, x, den entsprechenden ausgezeichneten Repräsentanten $n(x)$ zuordnet.

Bekannt ist dieses Vorgehen aus der analytischen Geometrie bei den Normierungen nach Hesse: Unter den unendlich vielen möglichen Richtungsvektoren einer Ebene zeichnet man den aus, dessen Länge 1 ist und der in eine bestimmte, festgelegte Richtung zeigt.

Die Rechenoperatoren passt man nun so an, dass sie zunächst vorgehen wie bereits definiert, dann aber das Ergebnis normalisieren, indem sie die Normalisierungsfunktion auf das Ergebnis anwenden.

Außerdem erklärt man die Bedeutung der Zahlsymbole als Anwendung $n(x)$ der Normalisierungsfunktion n auf einen beliebigen Repräsentanten der Zahl, x. Dabei spielt es keine Rolle, welchen Repräsentanten man als Argument der Normalisierungsfunktion nutzt, da die Normalisierungsfunktion ja allen Repräsentanten den jeweils ausgezeichneten zuordnet.

Beispiel: $3_{\mathbb{Z}^*} := n((3,0)) = n((4,1)) = n((5,2)) = n(\cdots)$

In der Wahl der Normalisierungsfunktion n ist man weitgehend frei; einzige Bedingung ist, dass Repräsentanten unterschiedlicher

$$\left.\begin{array}{l}\mathbb{Z} \ni (0,0)\\ \mathbb{Z} \ni (1,1)\\ \mathbb{Z} \ni (2,2)\\ \vdots\end{array}\right\} \rightarrow (0,0) \in \mathbb{Z}^* \qquad \left.\begin{array}{l}\mathbb{Z} \ni (3,0)\\ \mathbb{Z} \ni (4,1)\\ \mathbb{Z} \ni (5,2)\\ \vdots\end{array}\right\} \rightarrow (3,0) \in \mathbb{Z}^*$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathbb{Z} \ni (1,0)\\ \mathbb{Z} \ni (2,1)\\ \mathbb{Z} \ni (3,2)\\ \vdots\end{array}\right\} \rightarrow (1,0) \in \mathbb{Z}^* \qquad \left.\begin{array}{l}\mathbb{Z} \ni (4,0)\\ \mathbb{Z} \ni (5,1)\\ \mathbb{Z} \ni (6,2)\\ \vdots\end{array}\right\} \rightarrow (4,0) \in \mathbb{Z}^*$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathbb{Z} \ni (2,0)\\ \mathbb{Z} \ni (3,1)\\ \mathbb{Z} \ni (4,2)\\ \vdots\end{array}\right\} \rightarrow (2,0) \in \mathbb{Z}^* \qquad \left.\begin{array}{l}\mathbb{Z} \ni (5,0)\\ \mathbb{Z} \ni (6,1)\\ \mathbb{Z} \ni (7,2)\\ \vdots\end{array}\right\} \rightarrow (5,0) \in \mathbb{Z}^*$$

Abbildung 3: Repräsentantenauszeichnung durch die Normalisierungsfunktion

---

Zahlen unterschiedliche ausgezeichnete Repräsentanten zugeordnet werden müssen – aus $n(x) = n(y)$ muss $x \equiv y$ folgen und umgekehrt.

Eine geeignete Normalisierungsfunktion ist beispielsweise folgende, die jeden Repräsentanten einer ganzen Zahl auf den entsprechenden „vollständig gekürzten“ Repräsentanten zuordnet:

$$\begin{aligned} n\colon\ & \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \text{ (Zielmenge)} \\ & (\nu,\mu) \mapsto n((\nu,\mu)) := \begin{cases} (\nu-\mu, 0) & \text{für } \nu \geq \mu \\ (0, \mu-\nu) & \text{für } \nu < \mu \end{cases} \end{aligned}$$

Beispiele (vgl. Abb. [[BILD:ZNorm]] auf S. [[LINK:ZNorm]]):

$$n(3_{\mathbb{Z}}) = n((5_{\mathbb{N}_0}, 2_{\mathbb{N}_0})) = n((7_{\mathbb{N}_0}, 4_{\mathbb{N}_0})) = n(\cdots) = (3_{\mathbb{N}_0}, 0_{\mathbb{N}_0})_{\mathbb{Z}^*} =: 3_{\mathbb{Z}^*}$$

$$n((-2)_{\mathbb{Z}}) = n((2_{\mathbb{N}_0}, 4_{\mathbb{N}_0})) = n((5_{\mathbb{N}_0}, 7_{\mathbb{N}_0})) = n(\cdots) = (0_{\mathbb{N}_0}, 2_{\mathbb{N}_0})_{\mathbb{Z}^*} =: (-2)_{\mathbb{Z}^*}$$

Allgemein gilt: Sind zwei Zahlen x und y äquivalent ($x \equiv y$; und nur dann), so sind die entsprechenden normierten Repräsentanten $n(x)$ und $n(y)$ hinsichtlich ihrer Identität gleich ($n(x) = n(y)$).

Die Menge der eindeutigen Repräsentanten der ganzen Zahlen, $\mathbb{Z}^*$, leitet sich aus der Menge der nicht-eindeutigen Repräsentanten, $\mathbb{Z}$, ab und ist eine echte Teilmenge von $\mathbb{Z}$:

$\mathbb{Z}^* := \{n(x) \,|\, x \in \mathbb{Z}\} \subsetneq \mathbb{Z}$

Anders ausgedrückt ist $\mathbb{Z}^*$ die Wertemenge der Normalisierungsfunktion n.

Die Rechenoperatoren und Relationen überträgt man wie folgt:

$x +_{\mathbb{Z}^*} y := n(x +_{\mathbb{Z}} y), \qquad x -_{\mathbb{Z}^*} y := n(x -_{\mathbb{Z}} y), \qquad x \cdot_{\mathbb{Z}^*} y := n(x \cdot_{\mathbb{Z}} y),$
$x :_{\mathbb{Z}^*} y := n(x :_{\mathbb{Z}} y)$

$x \leq_{\mathbb{Z}^*} y :\Leftrightarrow n(x) \leq_{\mathbb{Z}} n(y)$

Das ursprüngliche Problem, weswegen man einen Weg suchte, die Zahlrepräsentation eindeutig zu machen, nämlich die subjektiv empfundene Unschönheit der „aufgezwungenen" Unterscheidung zwischen struktureller Gleichheit (=) und Äquivalenz (≡), ist damit gelöst, wie folgendes Beispiel exemplarisch demonstriert:

$$\begin{aligned} & 2_{\mathbb{Z}^*} + 2_{\mathbb{Z}^*} &= n(2_{\mathbb{Z}}) + n(2_{\mathbb{Z}}) &= n(2_{\mathbb{Z}} + 2_{\mathbb{Z}}) &= \underbrace{n((6,2))}_{n(4_{\mathbb{Z}})} &= (4,0) = \\ = & 2_{\mathbb{Z}^*} \cdot 2_{\mathbb{Z}^*} &= n(2_{\mathbb{Z}}) \cdot n(2_{\mathbb{Z}}) &= n(2_{\mathbb{Z}} \cdot 2_{\mathbb{Z}}) &= \underbrace{n((10,6))}_{n(4_{\mathbb{Z}})} &= (4,0) \end{aligned}$$

$2_{\mathbb{Z}} + 2_{\mathbb{Z}} = (6,2)$ ist zwar (wenn man für $2_{\mathbb{Z}}$ den im Beispiel verwendeten Repräsentanten $(3,1)$ nimmt) hinsichtlich der strukturellen Gleichheit ungleich zu $2_{\mathbb{Z}} \cdot 2_{\mathbb{Z}} = (10,6)$, die zugehörigen ausgezeichneten Repräsentanten $n(2_{\mathbb{Z}} + 2_{\mathbb{Z}}) = (4,0)$ und $n(2_{\mathbb{Z}} \cdot 2_{\mathbb{Z}}) = (4,0)$ sind es aber, wie gewünscht, sehr wohl – und das unabhängig von der Wahl, welchen Repräsentanten man für $2_{\mathbb{Z}}$ nimmt.

Nachteil dieser Methode kann sein, dass sie dem persönlichen Geschmack nicht entspricht: Der Weg über eine Normalisierungsfunktion kann den Anschein erwecken, die „eigentliche", „ursprüngliche" Definition genüge nicht, und man müsse sie nachträglich „reparieren"; man könnte der Meinung sein, die ursprüngliche Definition enthalte irgendeinen „Fehler", den man finden und beheben sollte, anstatt um diesen „Fehler" herumzuarbeiten, indem man eine Normalisierungsfunktion einführt, die das Problem wieder „richtet".

Eindeutigkeit durch Äquivalenzklassen

Ein alternativer Weg, eine Menge von eindeutigen Repräsentanten zu erhalten, führt über die Bildung von sog. Äquivalenzklassen.

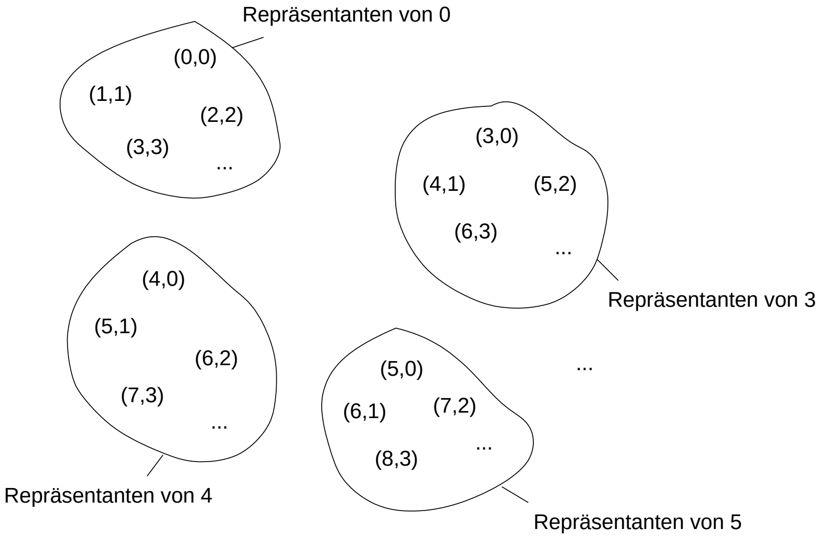

Abbildung 4: Bildung von Klassen äquivalenter Repräsentanten

Die Idee ist, die Menge der unendlich vielen, nicht-eindeutigen Repräsentanten einer Zahl selbst als eindeutigen Repräsentanten anzusehen (vgl. Abb. [[BILD:ZAeq]] auf S. [[LINK:ZAeq]]).

Beispiel: $3_{\mathbb{Z}^*} := \{(3_{\mathbb{N}_0}, 0_{\mathbb{N}_0}), (4_{\mathbb{N}_0}, 1_{\mathbb{N}_0}), (5_{\mathbb{N}_0}, 2_{\mathbb{N}_0}), \ldots\}$

Die Menge aller (nicht-eindeutigen) Repräsentanten einer Zahl nennt man „Äquivalenzklasse“ und kennzeichnet sie über eckige Klammern: $[x] := \{x' \in \mathbb{Z} \,|\, x' \equiv x\}$ mit $x \in \mathbb{Z}$.

Beispiel: $[(3_{\mathbb{N}_0}, 0_{\mathbb{N}_0})] = [(4_{\mathbb{N}_0}, 1_{\mathbb{N}_0})] = [(5_{\mathbb{N}_0}, 2_{\mathbb{N}_0})] = [\cdots] = \{\, (3_{\mathbb{N}_0}, 0_{\mathbb{N}_0}), \, (4_{\mathbb{N}_0}, 1_{\mathbb{N}_0}), \, (5_{\mathbb{N}_0}, 2_{\mathbb{N}_0}),$
$3_{\mathbb{Z}^*}$

Allgemein gilt: Sind zwei Zahlrepräsentanten x und y äquivalent ($x \equiv y$), so sind die entsprechenden Äquivalenzklassen $[x]$ und $[y]$ hinsichtlich ihrer Identität gleich ($[x] = [y]$). Umgekehrt sind $[x]$ und $[y]$ disjunkt, wenn $x \not\equiv y$.

Bereits bekannt ist dieses Vorgehen aus der Geometrie: Dort begreift man einen Vektor als die Menge aller Pfeile, die parallel zum Vektor sind und genauso lang wie der Vektor sind. Jeder der parallelgleichen Pfeile ist ein nicht-eindeutiger Repräsentant; ein Vektor selbst ist also die Menge der nicht-eindeutigen Repräsentanten.

Auch die verallgemeinerte mengentheoretische Realisierung der natürlichen Zahlen (S. [[LINK:NVerallg]]) kann man über das Äquivalenzklassenkonzept formulieren: Eine Zahl n begreift man als die Äquivalenzklasse aller Mengen mit n Elementen.

Dabei ist es nicht schlimm, dass die Äquivalenzklassen unendlich groß sind, da man, wie ich gleich zeigen werde, zum Rechnen jeweils nur ein einziges Element benötigt.

Die Menge der eindeutigen Repräsentanten ganzer Zahlen definiert man als die Menge der Äquivalenzklassen der nicht-eindeutigen Repräsentanten. In Symbolen:

$\mathbb{Z}^* := \{[x] \,|\, x \in \mathbb{Z}\}$

Ungewohnt daran kann sein, dass $\mathbb{Z}^*$ eine Menge von Mengen ist. Üblicherweise behandelt man in der Schule diesen Fall nicht; mathematisch besonders ist er jedoch nicht.

Während die durch Normalisierung gebildete Menge eindeutiger Repräsentanten, $\{n(x) \,|\, x \in \mathbb{Z}\}$, eine echte Teilmenge der Menge der nicht-eindeutigen Repräsentanten, $\mathbb{Z}$, ist, ist das durch Äquivalenzklassenbildung gebildete $\mathbb{Z}^*$ keine Teilmenge von $\mathbb{Z}$.

Zur Erklärung der Rechenregeln und Relationen auf $\mathbb{Z}^*$ „zieht“ man die Äquivalenzklassenbildung „heraus“:

$[x] +_{\mathbb{Z}^*} [y] := [x +_{\mathbb{Z}} y], \quad [x] -_{\mathbb{Z}^*} [y] := [x -_{\mathbb{Z}} y], \quad [x] \cdot_{\mathbb{Z}^*} [y] := [x \cdot_{\mathbb{Z}} y],$
$[x] :_{\mathbb{Z}^*} [y] := [x :_{\mathbb{Z}} y]$

$[x] \leq [y] :\Leftrightarrow x \leq y$

Die Bedeutung der Zahlensymbole definiert man über die entsprechenden Äquivalenzklassen:

$0_{\mathbb{Z}^*} := [0_{\mathbb{Z}}], \quad 1_{\mathbb{Z}^*} := [1_{\mathbb{Z}}], \quad 2_{\mathbb{Z}^*} := [2_{\mathbb{Z}}], \quad 3_{\mathbb{Z}^*} := [3_{\mathbb{Z}}], \ \ldots$

Wie auch der Weg über eine Normalisierungsfunktion löst auch der Weg über Äquivalenzklassen das ursprüngliche Problem des „Zwangs“, zwischen struktureller Gleichheit (=) und Äquivalenz (≡) unterscheiden zu müssen.

Das Zahlenbeispiel, das ich in diesem Abschnitt schon mehrmals zur Illustration des Problems der fehlenden Repräsentationseindeutigkeit bzw. zu dessen Lösung genutzt habe, lautet übertragen auf den Äquivalenzklassenansatz wie folgt:

$$\begin{array}{rlllllllll} & 2_{\mathbb{Z}^*} + 2_{\mathbb{Z}^*} & = & [2_{\mathbb{Z}}] + [2_{\mathbb{Z}}] & = & [2_{\mathbb{Z}} + 2_{\mathbb{Z}}] & = & [(6,2)_{\mathbb{Z}}] & = & \{(4,0),(5,1),(6,2),(7,3),\ldots\} \\ = & 2_{\mathbb{Z}^*} \cdot 2_{\mathbb{Z}^*} & = & [2_{\mathbb{Z}}] \cdot [2_{\mathbb{Z}}] & = & [2_{\mathbb{Z}} \cdot 2_{\mathbb{Z}}] & = & [(10,6)_{\mathbb{Z}}] & = & \{(4,0),(5,1),(6,2),(7,3),\ldots\} \end{array}$$

$2_{\mathbb{Z}} + 2_{\mathbb{Z}} = (6, 2)$ ist zwar (wenn man für $2_{\mathbb{Z}}$ den im Beispiel verwendeten Repräsentanten $(3, 1)$ nimmt) hinsichtlich der strukturellen Gleichheit ungleich zu $2_{\mathbb{Z}} \cdot 2_{\mathbb{Z}} = (10, 6)$, die zugehörigen Äquivalenzklassen sind jedoch – wie gewünscht – strukturell gleich, da sie alle denkbaren Repräsentanten enthalten.

Wiederherstellung der Neutralität der Null

Bei der Überprüfung der Neutralität der Null hinsichtlich der Addition auf S. [[LINK:ZNeutr]] schrieb ich, dass, wenn man die Eindeutigkeit der Zahlrepräsentation hergestellt hat, auch das Neutralitätsgesetz in der starken Form $x + 0 = x$ anstatt der abgeschwächten Form $x + 0 \equiv x$ gilt.

Der Beweis dieser Aussage unter der durch Äquivalenzklassenbildung oder Normalisierung erreichten Eindeutigkeit der Zahlrepräsentation ist einfach: $[x]+0_{\mathbb{Z}^*} = [x]+[0_{\mathbb{Z}}] = [x + 0_{\mathbb{Z}}] = [x]$, da wie auf S. [[LINK:ZNeutr]] bewiesen, $x + 0_{\mathbb{Z}} \equiv x$.

Für das durch Normalisierung gebildete $\mathbb{Z}^*$ verläuft der Beweis analgo: $n(x) + 0_{\mathbb{Z}^*} = n(x) + n(0_{\mathbb{Z}}) = n(x + 0_{\mathbb{Z}}) = n(x)$.

Auch schrieb ich, dass es nach der Herstellung der Eindeutigkeit der Zahlrepräsentation nur noch ein neutrales Element geben wird. Dieses Element kann man nun benennen: Es ist $0_{\mathbb{Z}^*} = [0_{\mathbb{Z}}]$ bzw. $0_{\mathbb{Z}^*} = n(0_{\mathbb{Z}})$.

– Einbettung der natürlichen Zahlen in die ganzen Zahlen

Oft liest man Aussagen wie „die ganze Zahlen umfassen die natürlichen Zahlen“ oder, präziser, „die Menge der natürlichen Zahlen ist eine Teilmenge der Menge der ganzen Zahlen“ (vgl. Abb. [[BILD:Teilmeng]] auf S. [[LINK:Teilmeng]]). Während die erste Aussage Platz für Intepretationsspielraum lässt und bei geeigneter Wahl der Interpretation in der Tat richtig ist, wie ich gleich zeigen werde, ist die zweite offensichtlich falsch:

Betrachtet man die beiden Mengen $\mathbb{N}_0$ und $\mathbb{Z}$ wie in dieser Arbeit definiert von ihrer Struktur her, so ist klar, dass $\mathbb{N}_0$ nicht Teilmenge von $\mathbb{Z}$ sein kann, sind doch die Elemente von $\mathbb{Z}$ Paare natürlicher Zahlrepräsentanten, während die Elemente von $\mathbb{N}_0$ nicht Paare, sondern das Resultat wiederholter Anwendung einer Nachfolgerfunktion S sind.

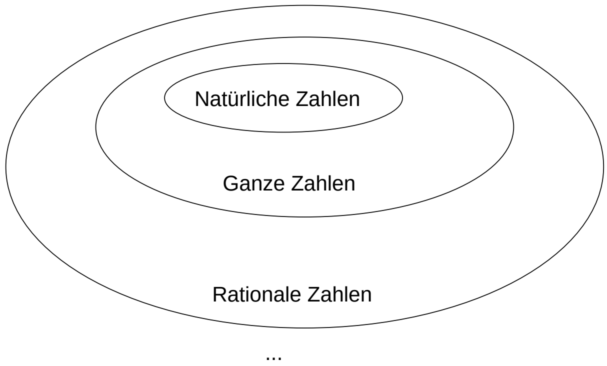

Abbildung 5: Bekannte Darstellung der Teilmengenverhältnisse

Um den eigentlich gemeinten Inhalt der Aussage zu treffen, muss man die Aussage anders formulieren: Es gibt eine umkehrbar eineindeutige Abbildung, also eine Bijektion, die den Elementen von $\mathbb{N}_0$ „entsprechende“ Elemente von $\mathbb{Z}$ zuordnet, wobei „entsprechend“ in dem Sinn zu verstehen ist, dass die „Bedeutung“ erhalten bleibt, also dass die „Bedeutung“ der Elemente der Definitionsmenge der Abbildung der der entsprechenden Elemente der Wertemenge entspricht.

Dabei lässt sich die Forderung an die Bijektion, dass die „Bedeutung“ bei der Transformation erhalten bleibt, mathematisch präzisieren: Im dem Kontext dieser Arbeit erhält eine Abbildung f die „Bedeutung“ genau dann, wenn gilt: $f(n +_{\mathbb{N}_0} m) = f(n) +_{\mathbb{Z}} m$ und $f^{-1}(n +_{\mathbb{Z}} m) = f^{-1}(n) +_{\mathbb{N}_0} f^{-1}(m)$ (und analog für die anderen Operatoren und für die Relationen).

So eine Abbildung nennt man auch „Isomorphismus“, und man sagt: „Die Menge der Repräsentanten natürlicher Zahlen, $\mathbb{N}_0$, ist isomorph zu einer bestimmten Teilmenge $\mathbb{N}_{0_\mathrm{z}}$ von $\mathbb{Z}$.“

Ein denkbarer Isomorphismus f, der die Repräsentanten natürlicher Zahlen aus $\mathbb{N}_0$ auf entsprechende Repräsentanten ganzer Zahlen aus $\mathbb{N}_{0_\mathrm{z}}$ abbildet, ist beispielsweise:

Einbettung der natürlichen Zahlen in die ganzen Zahlen

$$
\begin{array}{ll}
f\colon & \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_{0_{\mathrm{z}}} \subsetneq \mathbb{Z} \text{ (Wertemenge)} \\
 & n \mapsto f(n) := (n, 0)_{\mathbb{Z}} \\
 & \\
f^{-1}\colon & \mathbb{Z} \supsetneq \mathbb{N}_{0_{\mathrm{z}}} \to \mathbb{N}_0 \text{ (Wertemenge)} \\
 & (n, 0)_{\mathbb{Z}} \mapsto f^{-1}((n, 0)_{\mathbb{Z}}) := n
\end{array}
$$

Beispiele: $f(3_{\mathbb{N}_0}) = (3_{\mathbb{N}_0}, 0)_{\mathbb{Z}} \equiv 3_{\mathbb{Z}}, \qquad f^{-1}(3_{\mathbb{Z}}) = f^{-1}((3_{\mathbb{N}_0}, 0)_{\mathbb{Z}}) = 3_{\mathbb{N}_0}$

Dass f die Bedeutung erhält, muss noch bewiesen werden. Aus Platzgründen führe ich hier nur die Beweise der Addition und Subtraktion aus; die anderen Beweise (auch die der Bedeutungserhaltung der Relationen) verlaufen analog.

$$
\begin{array}{lll}
 & f(n) +_{\mathbb{Z}} f(m) = & \textit{(Anwenden der Funktionsvorschrift)} \\
= & (n, 0) +_{\mathbb{Z}} (m, 0) = & \textit{(Anwenden der } \mathbb{Z}\textit{-Additionsvorschrift)} \\
= & (n + m, 0 + 0) = & \textit{(Ausrechnen der zweiten Paarkomponente)} \\
= & (n + m, 0) = & \\
= & f(n +_{\mathbb{N}_0} m) &
\end{array}
$$

Auch die Umkehrfunktion des Isomorphismus f erhält die Bedeutung:

$$
\begin{array}{ll}
 & f^{-1}(\,(n, 0)_{\mathbb{Z}} +_{\mathbb{Z}} (m, 0)_{\mathbb{Z}}\,) = \\
= & f^{-1}((n + m, 0 + 0)) = \\
= & f^{-1}((n + m, 0)) = \\
= & n +_{\mathbb{N}_0} m = \\
= & f^{-1}((n, 0)_{\mathbb{Z}}) +_{\mathbb{N}_0} f^{-1}((m, 0)_{\mathbb{Z}})
\end{array}
$$

Streng genommen ist f bezüglich der strukturellen Gleichheit ($=$) kein Isomorphismus von $\mathbb{N}_0$ zu $\mathbb{N}_{0_{\mathrm{z}}}$, wie der Versuch, die Bedeutungserhaltung bei der Subtraktion zu beweisen, zeigt:

$$
\begin{array}{lll}
 & f(n) -_{\mathbb{Z}} f(m) = & \textit{(Anwenden der Funktionsvorschrift)} \\
= & (n, 0) -_{\mathbb{Z}} (m, 0) = & \textit{(Anwenden der } \mathbb{Z}\textit{-Subtraktionsvorschrift)} \\
= & (n + 0, m + 0) = & \textit{(Ausrechnen der Paarkomponenten)} \\
= & (n, m) &
\end{array}
$$

Es gibt kein $a \in \mathbb{N}_0$, für das $f(a) = (n, m)$ (mit m allgemein aus $\mathbb{N}_0$) gilt – anders formuliert ist $f^{-1}((n, m))$ nicht definiert. Die von der strukturellen Gleichheit auf die Äquivalenz abgeschwächte Isomorphieforderung – $f(n) -_{\mathbb{Z}} f(m) \equiv f(n -_{\mathbb{N}_0} m)$ – ist aber erfüllt:

$$
\begin{array}{lll}
 & f(n) -_{\mathbb{Z}} f(m) = \text{(siehe oben)} = (n, m) \equiv & \textit{(Abziehen von } m \textit{ von den Paarkompo} \\
\equiv & (n - m, m - m) = & \textit{(Ausrechnen der zweiten Paarkompo} \\
= & (n - m, 0) = & \\
= & f(n -_{\mathbb{N}_0} m) &
\end{array}
$$

Bettet man die natürlichen Zahlen nicht in $\mathbb{Z}$, sondern in $\mathbb{Z}^*$ ein, so stellt sich dieses Problem nicht, da der Übergang von (n, m) zu $(n-m, 0)$ schon in der Struktur von $\mathbb{Z}^*$ steckt, also durch die Normalisierungsfunktion bzw. durch die Äquivalenzklassenbildung erreicht wird.

Die Aussage, die ganzen Zahlen umfassten die natürlichen Zahlen, ist also korrekt, wenn man diese schwammig formulierte Aussage entsprechend interpretiert. Möchte man ohne Gefahr vor Missverständnissen reden, kann man die Aussage präzisieren: Es gibt einen Isomorphismus, über den man die Menge der Repräsentanten natürlicher Zahlen in die Menge der Repräsentanten ganzer Zahlen einbetten kann.

1.3.4 Rationale Zahlen

In diesem Kapitel werde ich die übliche Realisierung rationaler Zahlen und der Operatoren und Relationen auf den rationalen Zahlen darlegen. Wie auch die ausgeführte Realisierung der ganzen Zahlen als Paare natürlicher Zahlrepräsentanten führt die Realisierung der rationalen Zahlen, wie ich sie hier vorstellen werde, zu einer nicht-eindeutigen Zahlrepräsentation, weswegen man – wie bei den ganzen Zahlen – eine Äquivalenzrelation einführen muss, um sinnvoll von Gleichheit sprechen zu können.

Auf Beweise werde ich größtenteils verzichten, da sie ähnlich wie Beweise auf den ganzen Zahlen verlaufen und somit keinen großen Erkenntnisgewinn bringen.

Betrachtet man die übliche Schreibweise für rationale Zahlen, die Bruchschreibweise, so liegt der Schluss nahe, Repräsentanten rationaler Zahlen als Paare von Zähler und Nenner zu definieren.

In der Schule fordert man üblicherweise, dass der Zähler eine ganze Zahl und der Nenner eine natürliche Zahl größer Null ist. Hier werde ich für den Nenner ganze Zahlen nehmen, um formalen Problemen mit Operationen auf unterschiedlichen Typen (wie beispielsweise $3_{\mathbb{N}_0} + 5_{\mathbb{Z}}$) zu entgehen.

Die Menge der Repräsentanten rationaler Zahlen kann man ohne diese Beschränkung wie folgt definieren, wobei $[0_{\mathbb{Z}}]$ die Äquivalenzklasse aller Repräsentanten ganzer Zahlen, die äquivalent zu $0_{\mathbb{Z}}$ sind, meint:

$\mathbb{Q} := \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus [0_\mathbb{Z}])$ mit $[0_\mathbb{Z}] = \{x' \mid x' \equiv 0_\mathbb{Z}\}$.

Ein Paar zweier ganzer Zahlen $(p, q) \in \mathbb{Q}$ begreift man dabei als den Bruch $\frac{p}{q}$.

Beispiel: $\left(\frac{-5}{2}\right)_\mathbb{Q} \equiv ((-5)_\mathbb{Z}, 2_\mathbb{Z}) \equiv ((0_{\mathbb{N}_0}, 5_{\mathbb{N}_0}), (2_{\mathbb{N}_0}, 0_{\mathbb{N}_0}))$

(Die genauere Bedeutung von $\equiv$ auf den rationalen Zahlen werde ich weiter unten definieren.)

Diese Wahl der Menge der Repräsentanten rationaler Zahlen führt aus zwei Gründen zu nicht-eindeutigen Repräsentanten. Zum einen sind die Paarkomponenten Elemente aus $\mathbb{Z}$, dessen Zahlrepräsentation wie bereits erläutert nicht eindeutig ist. Würde man schon an dieser Stelle die Eindeutigkeit der Zahlrepräsentation fordern, und daher versuchen, ein $\mathbb{Q}^*$ mit $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Z}^* \times (\mathbb{Z}^* \setminus \{0_{\mathbb{Z}^*}\})$ zu definieren, so wäre die Zahlrepräsentation dieses $\mathbb{Q}^*$ trotzdem noch mehrdeutig:

Den Brüchen wohnt eine grundsätzlich verankerte Mehrdeutigkeit der Repräsentation inne: Zum einen sind Brüche beliebig erweiterbar – zu jedem vollständig gekürzten Bruch $\frac{p}{q}$ gibt es unendlich viele ungekürzte Brüche $\frac{kp}{kq}$ (mit k als beliebige ganze Zahl) und zum anderen kann man jeden negativen gekürzten Bruch $\frac{-p}{q}$ auch als $\frac{p}{-q}$ darstellen.

Um dennoch wieder zu einer eindeutigen Repräsentation zu gelangen, kann man, wie in dieser Arbeit schon bei den ganzen Zahlen ausgeführt, eine Normalisierungsfunktion einführen oder Äquivalenzklassen bilden.

Relationen

In diesem Abschnitt werde ich die Äquivalenz- und die Kleinergleich-, Kleiner-, Größer- und Größergleichrelation definieren. Anders als die Behandlung der Relationen der natürlichen Zahlen in der Grundschule, die überhaupt nicht formalisiert dargestellt werden und von Erwachsenen als „selbstverständlich“, „unmittelbar einleuchtend“, „keine Begründungen benötigend“ angesehen werden, werden die Relationen und Rechenregeln der rationalen Zahlen schon formalisierter dargestellt.

Dass die Rechenregeln der rationalen Zahlen nicht so selbstverständlich sind wie die der natürlichen Zahlen (die man verinnerlicht hat) oder die der ganzen Zahlen (die man im Alltag einfach auf Operationen auf den natürlichen Zahlen zurückführt und dann noch den Einfluss der Vorzeichen überprüft), zeigt sich bei der Einführung der rationalen Zahlen im Unterricht.

So nehmen viele Schüler an, die Addition auf den rationalen Zahlen erfolge „selbstverständlich“ komponentenweise, sie denken also, die Summe zweier Brüche $\frac{p}{q}$ und $\frac{a}{b}$ sei (für allgemeine p, q, a, b) $\frac{p+a}{q+b}$. ([[QOftFehler]], S. 15)

Infolgedessen untersucht man die Rechenoperationen im Schulunterricht genauer und notiert die Erkenntnise auch formalisierter. Die folgenden Definitionen könnte man – zumindest von der Idee her (weniger von der Art der Notation) – auch in Fünft- oder Sechstklassmathematikschulheften finden.

– Äquivalenzrelation

Da, wie erläutert, die Zahlrepräsentation bei der Realisierung der rationalen Zahlen als Paare ganzer Zahlrepräsentanten nicht eindeutig ist, muss man, wie bei den ganzen Zahlen, eine Äquivalenzrelation $\equiv$ einführen, um wie gewohnt von der „Gleichheit“ zweier rationaler Zahlen sprechen zu können.

Zur Herleitung kann man zwei Repräsentanten rationaler Zahlen, (p, q) und (a, b) mit $(p, q), (a, b) \in \mathbb{Q}$, betrachten. Greift man die Idee der Paarbildung auf und begreift also die Paare als Brüche, kann man das Wissen über äquivalente Termumformungen nutzen:

$$\begin{array}{rcll} \frac{p}{q} & \equiv & \frac{a}{b} & \textit{(Die Division auf den ganzen Zahlen ist nicht für alle } p, a \in \mathbb{Z} \textit{ und } q, b \\ & & & \textit{(Herüberbringen von } q \textit{ und } b\textit{)} \\ pb & \equiv & aq & \textit{(Dieser Ausdruck ist für alle } p, a \in \mathbb{Z} \textit{ und } q, b \in \mathbb{Z} \setminus [0_{\mathbb{Z}}] \textit{ definiert.)} \end{array}$$

Man kann also definieren: Zwei Repräsentanten rationaler Zahlen, (p, q) und (a, b) mit $(p, q), (a, b) \in \mathbb{Q}$, sind genau dann äquivalent, wenn der Ganzzahlrepräsentant pb äquivalent zum Ganzzahlrepräsentanten aq ist. In Symbolen:

Definition der Äquivalenz auf den rationalen Zahlen

$(p, q)_{\mathbb{Q}} \equiv_{\mathbb{Q}} (a, b)_{\mathbb{Q}} \;:\Leftrightarrow pb \equiv_{\mathbb{Z}} aq$

$(p, q)_{\mathbb{Q}} \not\equiv_{\mathbb{Q}} (a, b)_{\mathbb{Q}} \;:\Leftrightarrow pb \not\equiv_{\mathbb{Z}} aq$

mit $(p, q), (a, b) \in \mathbb{Q}$.

Beispiel: $\underbrace{((0_{\mathbb{N}_0}, 5_{\mathbb{N}_0}), (2_{\mathbb{N}_0}, 0_{\mathbb{N}_0}))}_{\equiv((-5)_{\mathbb{Z}}, 2_{\mathbb{Z}})}$ ist hinsichtlich der strukturellen Gleichheit (=) nicht gleich zu $\underbrace{((1_{\mathbb{N}_0}, 6_{\mathbb{N}_0}), (3_{\mathbb{N}_0}, 1_{\mathbb{N}_0}))}_{\equiv((-5)_{\mathbb{Z}}, 2_{\mathbb{Z}})}$ und auch nicht zu $\underbrace{((0_{\mathbb{N}_0}, 10_{\mathbb{N}_0}), (4_{\mathbb{N}_0}, 0_{\mathbb{N}_0}))}_{\equiv((-10)_{\mathbb{Z}}, 4_{\mathbb{Z}})}$, wohl aber hinsichtlich der definierten Äquivalenzrelation, da $(0,5)_{\mathbb{Z}} \equiv (1,6)_{\mathbb{Z}}$ und $(2,0)_{\mathbb{Z}} \equiv (3,1)_{\mathbb{Z}}$ bzw. $(-5)_{\mathbb{Z}} \cdot 4_{\mathbb{Z}} \equiv_{\mathbb{Z}} (-10)_{\mathbb{Z}} \cdot 2_{\mathbb{Z}}$.

Wie auch die Äquivalenzrelation der ganzen Zahlen vergleicht die Äquivalenzrelation der rationalen Zahlen nicht die Identität, sondern nutzt die hergeleitete Vorschrift $pb \equiv aq$ zum Vergleich.

Es zeigt sich eine beeindruckende Symmetrie zur Äquivalenzrelation der ganzen Zahlen: Vertauscht man in der hergeleiteten Äquivalenzrelationsvorschrift $\cdot_{\mathbb{Z}}$ mit $+_{\mathbb{N}_0}$, so erhält man die $\mathbb{Z}$-Äquivalenzrelationsvorschrift:

Äquivalenzrelationsvorschrift der rationalen Zahlen: $(x,y) \equiv_{\mathbb{Q}} (a,b) \;\Leftrightarrow\; x \cdot_{\mathbb{Z}} b \;\equiv_{\mathbb{Z}}$
Äquivalenzrelationsvorschrift der ganzen Zahlen: $(x,y) \equiv_{\mathbb{Z}} (a,b) \;\Leftrightarrow\; x +_{\mathbb{N}_0} b \;=$

Dass die hier definierte Äquivalenzrelation auch wirklich reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, beweise ich hier nicht, da die Beweise keinen Erkenntnisgewinn bringen; sie verlaufen analog zu den entsprechenden Beweisen der $\mathbb{Z}$-Äquivalenzrelation.

Mit der Äquivalenzrelation kann man folgende Aussage beweisen, die später von Nutzen sein wird: „Ein Repräsentant (p,q) einer rationalen Zahl ist genau dann äquivalent zu Null, wenn p äquivalent zu Null ist.“

In Symbolen: $(p,q) \equiv_{\mathbb{Q}} 0_{\mathbb{Q}} \Leftrightarrow p \equiv_{\mathbb{Z}} 0_{\mathbb{Z}}$ mit $(p,q) \in \mathbb{Q}$

Beweis:

$$\begin{array}{rrcll}
 & (p,q) & \equiv_{\mathbb{Q}} & 0_{\mathbb{Q}} \quad \Leftrightarrow & \textit{(Aussuchen eines Repräsentanten für } 0_{\mathbb{Q}}\textit{)} \\
\Leftrightarrow & (p,q) & \equiv_{\mathbb{Q}} & (0,a) \quad \Leftrightarrow & \text{mit } a \not\equiv 0_{\mathbb{Z}}\text{, da } (0,a) \in \mathbb{Q} \text{ und damit } a \in \mathbb{Z} \setminus [0_{\mathbb{Z}}] \\
 & & & & \textit{(Anwenden der } \mathbb{Q}\textit{-Äquivalenzrelation)} \\
\Leftrightarrow & p \cdot a & \equiv_{\mathbb{Z}} & 0 \cdot q \quad \Leftrightarrow & \textit{(Vereinfachen der rechten Seite)} \\
\Leftrightarrow & p \cdot a & \equiv_{\mathbb{Z}} & 0 \quad \Leftrightarrow & \\
\Leftrightarrow & p & \equiv_{\mathbb{Z}} & 0 & \text{da } a \not\equiv 0_{\mathbb{Z}}
\end{array}$$

Definition der Zahlensymbole für rationale Zahlen

Wie auch bei den ganzen Zahlen werde ich nicht die Identität der Zahlensymbole definieren, sondern nur ihren Wert über Äquivalenzbeziehungen angeben.

Definition der Zahlensymbole für rationale Zahlen

Das Paar (p, q) repräsentiert die rationale Zahl, die durch die Bruchschreibweise $\frac{p}{q}$ gegeben ist.

Speziell:

$0_\mathbb{Q} :\equiv (0_\mathbb{Z}, 1_\mathbb{Z}), \quad 1_\mathbb{Q} :\equiv (1_\mathbb{Z}, 1_\mathbb{Z}), \quad (-1)_\mathbb{Q} :\equiv (-1_\mathbb{Z}, 1_\mathbb{Z})$

Die Identität der Zahlensymbole bleibt undefiniert:

$0_\mathbb{Q} = ?, \quad 1_\mathbb{Q} = ?, \quad (-1)_\mathbb{Q} = ?, \ldots$

– Kleiner-, Kleinergleich-, Größergleich- und Größerrelation

Wie bei der Definition der natürlichen und der ganzen Zahlen in dieser Arbeit kann man auch bei den ganzen Zahlen die Kleiner- ($<$), Größergleich- ($\geq$) und Größerrelation ($>$) durch die Kleinergleichrelation ($\leq$) ausdrücken.

Zur Herleitung der Kleinergleichrelationsvorschrift kann man zwei Repräsentanten rationaler Zahlen, (p, q) und (a, b) mit $(p, q), (a, b) \in \mathbb{Q}$, betrachten. Dann kann man, wie auch bei der Herleitung der Äquivalenzbeziehung, das Wissen über äquivalente Termumformungen nutzen und ansetzen: $\frac{p}{q} \leq \frac{a}{b}$.

Es liegt daher nahe, als Definition der Kleinergleichrelation der rationalen Zahlen folgende Vorschrift zu nehmen:

$(p, q) \leq_\mathbb{Q} (a, b) :\Leftrightarrow p :_\mathbb{Z} q \leq_\mathbb{Z} a :_\mathbb{Z} b$

Die Ganzzahldivision ist aber nicht für alle $p, q, a, b \in \mathbb{Z}, q, b \not\equiv 0_\mathbb{Z}$ definiert, die Definition ist also unzureichend. Bei der Herleitung der Äquivalenzrelationsvorschrift trat dieses Problem ebenfalls auf; lösen konnte man es dadurch, indem man q und b durch Multiplikation mit qb auf die jeweils andere Seite der Ungleichung bringt. Bei der Herleitung der Äquivalenzrelation war das auch unproblematisch; hier aber handelt es sich nicht um eine Gleichung, sondern um eine Ungleichung.

Dementsprechend kehrt sich das Relationszeichen $\leq$ zu $\geq$ um, falls der Faktor pq, mit dem man die Ungleichung multipliziert, negativ ist; man erhält also $pb \lesseqgtr ab$ und muss in der Definition eine Fallunterscheidung treffen:

Ein Repräsentant einer rationalen Zahl, (p, q), ist genau dann kleinergleich (a, b) mit $(p, q), (a, b) \in \mathbb{Q}$ und $qb > 0$, wenn der Ganzzahlrepräsentant pb kleinergleich dem Ganzzahlrepräsentant aq ist.

Ist $qb < 0$, so ist (p, q) genau dann kleinergleich (a, b), wenn pb größergleich aq ist. In Symbolen:

Definition der Kleinergleichrelation auf den rationalen Zahlen

$$(p, q)_{\mathbb{Q}} \leq_{\mathbb{Q}} (a, b)_{\mathbb{Q}} :\Leftrightarrow \begin{cases} pb \leq_{\mathbb{Z}} aq & \text{für } qb > 0 \\ pb \geq_{\mathbb{Z}} aq & \text{für } qb < 0 \end{cases}$$

mit $(p, q), (a, b) \in \mathbb{Q}$.

Der Fall $qb \equiv 0$ kann nicht auftreten, da q und b beide nicht Null sind, da sie Elemente von $\mathbb{Z} \setminus [0_{\mathbb{Z}}]$ sind.

Auf die Beweise der Reflexivität ($x \leq x$ für alle $x \in \mathbb{Z}$), Antisymmetrie (aus $x \leq y$ und $y \leq x$ folgt $x \equiv y$) und Transitivität (aus $x \leq y$ und $y \leq z$ folgt $x \leq z$) verzichte ich.

Rechenoperatoren

In diesem Abschnitt werden die Rechenoperatoren auf den rationalen Zahlen definiert. Dabei werden keine neuen Konzepte eingeführt, und auch gibt es bei der Herleitung der Definitionen keine Probleme.

– Addition

Zur Herleitung der Additionsvorschrift kann man zwei Repräsentanten rationaler Zahlen, (p, q) und (a, b) mit $(p, q), (a, b) \in \mathbb{Q}$, betrachten, die Paare als Brüche begreifen und dann das bereits bekannte Wissen über Brüche, insbesondere über die Bildung des Hauptnenners, nutzen:

$$\begin{aligned} & \tfrac{p}{q} + \tfrac{a}{b} = && \textit{(Erweitern zum Nenner } qb\textit{)} \\ = \; & \tfrac{pb}{qb} + \tfrac{aq}{qb} = && \textit{(Schreiben als einen einzigen Bruch)} \\ = \; & \tfrac{pb+aq}{qb} \end{aligned}$$

Man erhält also folgende Additionsvorschrift:

Definition der Addition auf den rationalen Zahlen

$$(p, q)_{\mathbb{Q}} +_{\mathbb{Q}} (a, b)_{\mathbb{Q}} := (pb +_{\mathbb{Z}} aq, qb)_{\mathbb{Q}}$$

mit $(p, q), (a, b) \in \mathbb{Q}$.

(Ich habe mich dazu entschieden, als gemeinsamen Nenner der Brüche nicht das kleinste gemeinsame Vielfache der Nenner, sondern einfach das Produkt der Nenner zu nutzen, um die Definition nicht unnötig zu komplizieren.)

Auf der rechten Seite der Definition kommt die Addition und Multiplikation auf den ganzen Zahlen vor, welche ihrerseits die $\mathbb{N}_0$-Addition und -Multiplikation nutzt. An einem Zahlenbeispiel kann man einen Eindruck der Komplexität dieses „gestapelten“ Aufbaus gewinnen, wenn man die sich ergebenen Unterrechnungen über den ganzen Zahlen über die im vorherigen Kapitel definierten $\mathbb{Z}$-Rechenvorschriften ausrechnet, anstatt auf das bereits bekannte Wissen über $\mathbb{Z}$-Symbolmanipulationen zurückzugreifen:

$$
\begin{aligned}
& \left(\tfrac{1}{2}\right)_{\mathbb{Q}} +_{\mathbb{Q}} \left(\tfrac{3}{4}\right)_{\mathbb{Q}} \equiv && \textit{(Schreiben als Paare ganzer Zahlrepräsenta}\\
\equiv\ & (1,2) +_{\mathbb{Q}} (3,4) \equiv && \textit{(Anwenden der } \mathbb{Q}\textit{-Additionsvorschrift)}\\
\equiv\ & (1 \cdot 4 +_{\mathbb{Z}} 3 \cdot 2, 2 \cdot 4) \equiv && \textit{(Schreiben als Paare natürlicher Zahlen)}\\
\equiv\ & (\\
& \quad (1,0) \cdot (4,0) +_{\mathbb{Z}} \\
& \quad (3,0) \cdot (2,0)\,, \\
& \quad (2,0) \cdot (4,0) \\
&) = && \textit{(Anwenden der } \mathbb{Z}\textit{-Multiplikationsvorschrift)}\\
=\ & (\\
& \quad (1 \cdot 4 +_{\mathbb{N}_0} 0 \cdot 0, 1 \cdot 0 +_{\mathbb{N}_0} 0 \cdot 4) +_{\mathbb{Z}} \\
& \quad (3 \cdot 2 +_{\mathbb{N}_0} 0 \cdot 0, 3 \cdot 0 +_{\mathbb{N}_0} 0 \cdot 2)\,, \\
& \quad (2 \cdot 4 +_{\mathbb{N}_0} 0 \cdot 0, 2 \cdot 0 +_{\mathbb{N}_0} 0 \cdot 4) \\
&) = && \textit{(Ausrechnen der inneren Paarkomponenten}\\
=\ & ((4,0) +_{\mathbb{Z}} (6,0)\,, (8,0)) = && \textit{(Anwenden der } \mathbb{Z}\textit{-Additionsvorschrift)}\\
=\ & ((4 +_{\mathbb{N}_0} 6, 0 +_{\mathbb{N}_0} 0)\,, (8,0)) = && \textit{(Ausrechnen der inneren Paarkomponenten}\\
=\ & ((10_{\mathbb{N}_0}, 0_{\mathbb{N}_0})\,, (8_{\mathbb{N}_0}, 0_{\mathbb{N}_0})) \equiv && \textit{(Schreiben der ganzen Zahlen in Dezimalsch}\\
\equiv\ & (10_{\mathbb{Z}}, 8_{\mathbb{Z}}) \equiv && \textit{(Schreiben der rationalen Zahl in Bruchschr}\\
\equiv\ & \left(\tfrac{10}{8}\right)_{\mathbb{Q}} \equiv \left(\tfrac{5}{4}\right)_{\mathbb{Q}}
\end{aligned}
$$

Hätte man zusätzlich noch die $\mathbb{N}_0$-Rechenvorschriften des ersten Kapitels zum Ausrechnen der inneren Paarkomponenten genutzt, wäre die Rechnung noch länger geworden; je nach persönlichem Geschmack kann man das als unelegant ansehen.

Der alternative Ansatz durch die surrealen Zahlen realisiert den Aufbau nicht durch Stapelung jeweils vorhergehender Zahlenmengen, sondern „in einem Rutsch“, und hat somit dieses Problem nicht.

– Subtraktion

Zur Herleitung der Subtraktionsvorschrift ist es hilfreich, die Subtraktion als Addition des (additiv) Inversen zu begreifen. Geht man diesen Weg, muss man freilich zunächst die Negationsvorschrift definieren.

Dazu kann man den rationalen Zahlrepräsentant (p,q) betrachten. Man erkennt zwei mögliche Negationsvorschriften: $-(p,q) = (-p,q)$ und $-(p,q) = (p,-q)$, wobei das Negationszeichen auf den rechten Seiten die bereits definierte Negation auf den ganzen Zahlen meint.

Man kann frei wählen, welche der beiden Vorschriften man zur Definition der Negation erklärt, da sie äquivalent sind:

$$\begin{array}{rrcll}
 & -(p,q) & \equiv_{\mathbb{Q}} & -(p,q) & \quad \textit{(Anwenden der beiden Vorschriften)} \\
 & (-p,q) & \equiv_{\mathbb{Q}} & (p,-q) \quad \Leftrightarrow & \quad \textit{(Anwenden der Äquivalenzrelation)} \\
\Leftrightarrow & (-p)\cdot(-q) & \equiv_{\mathbb{Z}} & p\cdot q \quad \Leftrightarrow & \quad \textit{(Vereinfachen der linken Seite, erlaubt na} \\
\Leftrightarrow & pq & \equiv_{\mathbb{Z}} & pq \quad \Leftrightarrow \text{(wahr)} &
\end{array}$$

Hier entscheide ich mich für die erste Vorschrift, ich definiere also:

$-(p,q)_{\mathbb{Q}} := (-p,q)_{\mathbb{Q}}$ mit $(p,q) \in \mathbb{Q}$.

Mit bekannter Negationsvorschrift kann man die Subtraktionsvorschrift herleiten:

$$\begin{array}{rll}
 & (p,q) - (a,b) = & \quad \textit{(Schreiben als Summe)} \\
= & (p,q) + [-(a,b)] = & \quad \textit{(Anwenden der Negationsvorschrift)} \\
= & (p,q) + (-a,b) = & \quad \textit{(Anwenden der Additionsvorschrift)} \\
= & (pb + (-a)\,q, qb) = & \quad \textit{(Schreiben als Differenz)} \\
= & (pb - aq, qb) &
\end{array}$$

Also:

Definition der Subtraktion auf den rationalen Zahlen

$(p,q) -_{\mathbb{Q}} (a,b) := (pb -_{\mathbb{Z}} aq, qb)$

mit $(p,q),(a,b) \in \mathbb{Q}$.

Beispiel:

$$\begin{array}{rll}
 & \left(\frac{1}{2}\right)_{\mathbb{Q}} - \left(\frac{3}{4}\right)_{\mathbb{Q}} \equiv & \quad \textit{(Schreiben als Paare ganzer Zahlen)} \\
\equiv & (1,2)_{\mathbb{Q}} - (3,4)_{\mathbb{Q}} \equiv & \quad \textit{(Anwenden der Subtraktionsvorschrift)} \\
\equiv & (1\cdot 4 -_{\mathbb{Z}} 3\cdot 2, 2\cdot_{\mathbb{Z}} 4) \equiv & \quad \textit{(Ausrechnen der Paarkomponenten)} \\
\equiv & ((-2)_{\mathbb{Z}}, 8_{\mathbb{Z}}) \equiv & \quad \textit{(Schreiben in Bruchschreibweise)} \\
\equiv & \left(\frac{-2}{8}\right)_{\mathbb{Q}} \equiv \left(\frac{-1}{4}\right)_{\mathbb{Q}} &
\end{array}$$

– Multiplikation

Anders als bei der Addition und Subtraktion muss bei der Multiplikation kein gemeinsamer Nenner gebildet werden, sondern sie erfolgt einfach komponentenweise. Die Multiplikationsvorschrift der rationalen Zahlen ist daher einfach:

Definition der Multiplikation auf den rationalen Zahlen

$(p,q) \cdot_{\mathbb{Q}} (a,b) := (pa, qb)_{\mathbb{Q}}$

mit $(p,q), (a,b) \in \mathbb{Q}$.

Beispiel:

$$\begin{array}{ll} & \left(\frac{1}{2}\right)_{\mathbb{Q}} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)_{\mathbb{Q}} \equiv & \textit{(Schreiben als Paare ganzer Zahlen)} \\ \equiv & (1,2)_{\mathbb{Q}} \cdot (3,4)_{\mathbb{Q}} \equiv & \textit{(Anwenden der Multiplikationsvorschrift)} \\ \equiv & (1 \cdot_{\mathbb{Z}} 3, 2 \cdot_{\mathbb{Z}} 4) \equiv & \textit{(Ausrechnen der Paarkomponenten)} \\ \equiv & (3_{\mathbb{Z}}, 8_{\mathbb{Z}}) \equiv & \textit{(Schreiben in Bruchschreibweise)} \\ \equiv & \left(\frac{3}{8}\right)_{\mathbb{Q}} & \end{array}$$

Es zeigt sich eine beeindruckende Symmetrie zur Definition der Addition auf den ganzen Zahlen: Vertauscht man $\cdot_{\mathbb{Z}}$ durch $+_{\mathbb{N}_0}$ (und passt die Typen entsprechend an), erhält man die Definition der Addition über die ganzen Zahlen (!):

Multiplikationsvorschrift der rationalen Zahlen:	$(x,y) \quad \cdot_{\mathbb{Q}} \quad (a,b) \quad := \quad (x \cdot_{\mathbb{Z}} a, \quad y \cdot_{\mathbb{Z}}$
Additionsvorschrift der ganzen Zahlen:	$(x,y) \quad +_{\mathbb{Z}} \quad (a,b) \quad := \quad (x +_{\mathbb{N}_0} a, \quad y +_{\mathbb{N}}$

– Division

Die Division auf den rationalen Zahlen wird in der Schule als Multiplikation mit dem Kehrbruch eingeführt ([[QDivKehr]], S. 1). Dieser Weg eignet sich auch für eine formale Herleitung der Divisionsvorschrift.

Der Kehrbruch $\frac{q}{p}$ eines Bruchs $\frac{p}{q}$ ergibt sich durch Vertauschen von Zähler und Nenner. Man definiert also:

$(p,q)_{\mathbb{Q}}^{-1} := (q,p)_{\mathbb{Q}}$ mit $(p,q) \in \mathbb{Q}$ und $p \not\equiv 0$.

Mit bekannter Definition des Kehrbruchs kann man dann die Divisionsvorschrift herleiten:

$$\begin{array}{ll} & (p,q) : (a,b) = & \textit{(Schreiben als Produkt)} \\ = & (p,q) \cdot (a,b)^{-1} = & \textit{(Anwenden der Kehrbruchvorschrift)} \\ = & (p,q) \cdot (b,a) = & \textit{(Anwenden der Multiplikationsvorschrift)} \\ = & (pb, qa) & \end{array}$$

Kurz:

Definition der Division auf den rationalen Zahlen

$(p,q) :_{\mathbb{Q}} (a,b) := (pb, qa)$

mit $(p,q),(a,b) \in \mathbb{Q}$ und $(a,b) \not\equiv 0$ ($\Leftrightarrow a \not\equiv 0$).

Beispiel:

$$\begin{array}{lll} & \left(\frac{1}{2}\right)_{\mathbb{Q}} : \left(\frac{3}{4}\right)_{\mathbb{Q}} \equiv & \textit{(Schreiben als Paare ganzer Zahlen)} \\ \equiv & (1,2)_{\mathbb{Q}} : (3,4)_{\mathbb{Q}} \equiv & \textit{(Anwenden der Divisionsvorschrift)} \\ \equiv & (1 \cdot_{\mathbb{Z}} 4, 2 \cdot_{\mathbb{Z}} 3) \equiv & \textit{(Ausrechnen der Paarkomponenten)} \\ \equiv & (4_{\mathbb{Z}}, 6_{\mathbb{Z}}) \equiv & \textit{(Schreiben in Bruchschreibweise)} \\ \equiv & \left(\frac{4}{6}\right)_{\mathbb{Q}} \equiv \left(\frac{2}{3}\right)_{\mathbb{Q}} & \end{array}$$

Die Symmetrie dieser Definition zur Definition der Subtraktion auf den ganzen Zahlen zeigt sich, wenn man $:$ durch $-$ ersetzt:

$$\begin{array}{lllll} (x,y) & -_{\mathbb{Z}} & (a,b) & := & (x +_{\mathbb{N}_0} b, \quad y +_{\mathbb{N}_0} a) \\ (x,y) & :_{\mathbb{Q}} & (a,b) & := & (x \cdot_{\mathbb{Z}} b, \quad y \cdot_{\mathbb{Z}} a) \end{array}$$

Eindeutigkeit der Repräsentation

Wie auch die Realisierung der ganzen Zahlen als Paare natürlicher Zahlrepräsentanten führt auch die Konstruktion der rationalen Zahlen als Paare ganzer Zahlrepräsentanten zu einer nicht-eindeutigen Zahlrepräsentation; es gibt also mehrere (unendlich viele) Elemente aus $\mathbb{Q}$, die alle zueinander äquivalent sind und somit dieselbe rationale Zahl repräsentieren.

Diese Tatsache empfindet man, wie auch bei den ganzen Zahlen, als Problem; zur Lösung kann man die Normalisierungsmethode nutzen oder Äquivalenzklassen bilden, wodurch man eine Menge $\mathbb{Q}^*$ erhält, bei der die Zahlrepräsentation eindeutig ist.

Ohne weitere Angaben meine ich auch im Folgenden mit „Repräsentanten rationaler Zahlen" immer Elemente aus $\mathbb{Q}$, nicht aus $\mathbb{Q}^*$.

– Eindeutigkeit durch Normalisierung

Eine passende Normalisierungsfunktion ist beispielsweise die folgende, die durch eine (nicht-konstruktive) Abbildungsvorschrift gegeben ist:

$$\begin{array}{rl} n\colon & \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \text{ (Zielmenge)} \\ & (p,q) \mapsto n((p,q)) := (p',q') \\ \text{wobei} & (p',q') \equiv (p,q), \\ & p' \text{ und } q' \text{ teilerfremd (damit ist der Bruch } \frac{p'}{q'} \text{ vollständig gekürzt)}, \\ & q' \text{ positiv und} \\ & p' \text{ und } q' \text{ normalisierte Repräsentanten ganzer Zahlen, also} \\ & p', q' \in W_{n_\mathbb{Z}} \\ \text{mit} & W_{n_\mathbb{Z}}\text{: Wertemenge der } \mathbb{Z}\text{-Normalisierungsfunktion} \end{array}$$

$\mathbb{Q}^* := \{n(x) \,|\, x \in \mathbb{Q}\} \subsetneq \mathbb{Q}$

Beispiel: $\left(\frac{6}{-4}\right)_{\mathbb{Q}^*} = n((6_\mathbb{Z}, (-4)_\mathbb{Z})) = (n_\mathbb{Z}((-3)_\mathbb{Z}), n_\mathbb{Z}(2_\mathbb{Z})) = ((0_{\mathbb{N}_0}, 3_{\mathbb{N}_0}), (2_{\mathbb{N}_0}, 0_{\mathbb{N}_0}))$

(Ich habe $\mathbb{Q}$ als $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus [0_\mathbb{Z}])$ definiert. Wenn man $\mathbb{Q}$ dagegen als $\mathbb{Z}^* \times (\mathbb{Z}^* \setminus \{0_{\mathbb{Z}^*}\})$ definiert (wobei es keine Rolle spielt, ob man mit $\mathbb{Z}^*$ die über die Normalisierung oder die über Äquivalenzklassenbildung definierte Menge eindeutiger Repräsentanten ganzer Zahlen meint), kann man die letzte Forderung in der Definition der Normalisierungsfunktion, p' und q' sollten normalisierte Repräsentanten ganzer Zahlen sein, weglassen, da sie bereits in der Struktur von $\mathbb{Z}^*$ enthalten ist.)

Die Rechenoperatoren und Relationen überträgt man analog wie bei den ganzen Zahlen, also $n(x) +_{\mathbb{Q}^*} n(y) := n(x +_\mathbb{Q} y)$, $n(x) -_{\mathbb{Q}^*} n(y) := n(x -_\mathbb{Q} y)$, usw.

– Eindeutigkeit durch Äquivalenzklassen

Alternativ kann man auch Äquivalenzklassen bilden, um eine eindeutige Zahlrepräsentation zu erreichen:

$\mathbb{Q}^* := \{[x] \,|\, x \in \mathbb{Q}\} \not\subset \mathbb{Q}$ mit $[x] = \{x' \in \mathbb{Q} \,|\, x' \equiv x\}$.

Beispiel:

$$\begin{aligned} \left(\tfrac{6}{-4}\right)_{\mathbb{Q}^*} = \{ & \\ & \underbrace{((6,0),(0,4))\,,\ ((7,1),(1,5))\,,\ ((8,2),(2,6))\,,\ldots,}_{\text{alle äquivalent zu } \left(6_\mathbb{Z}, (-4)_\mathbb{Q}\right)} \\ & \underbrace{((3,0),(0,2))\,,\ ((4,1),(1,3))\,,\ ((5,2),(2,4))\,,\ldots,}_{\text{alle äquivalent zu } \left(3_\mathbb{Z}, (-2)_\mathbb{Q}\right)} \\ & \ldots \\ \} & \end{aligned}$$

Die Rechenoperatoren und Relationen überträgt man analog wie bei den ganzen Zahlen, also $[x] +_{\mathbb{Q}^*} [y] := [x +_{\mathbb{Q}} y]$, $[x] -_{\mathbb{Q}^*} [y] := [x -_{\mathbb{Q}} y]$, usw.

Einbettung der ganzen Zahlen in die rationalen Zahlen

Genau wie die Aussage, die Menge der Repräsentanten natürlicher Zahlen wie hier definiert sei eine Teilmenge der Menge der Repräsentanten ganzer Zahlen, falsch ist, ist auch die korrespondierende Aussage über das Verhältnis der ganzen Zahlen zu den rationalen Zahlen falsch – Elemente von $\mathbb{Z}$ sind Paare natürlicher Zahlrepräsentanten, während Elemente von $\mathbb{Q}$ Paare von Repräsentanten ganzer Zahlen sind.

Möchte man die Idee hinter der Aussage formalisieren, so muss man daher die ganzen Zahlen in die rationalen Zahlen einbetten – analog zur Einbettung der natürlichen Zahlen in die ganzen Zahlen (beschrieben auf S. [[LINK:EinbNZ]]).

Ein möglicher Isomorphismus f, der umkehrbar eineindeutig $\mathbb{Z}$ auf die Teilmenge $\mathbb{Z}_{\mathbb{Q}}$ der rationalen Repräsentanten ganzer Zahlen abbildet und dabei bezüglich der Äquivalenzrelation die Bedeutung erhält, ist der folgende. Idee hinter der Definition ist, Ganzzahlrepräsentanten x durch Brüche $\frac{x}{1}$ darzustellen.

Einbettung der ganzen Zahlen in die rationalen Zahlen

f: $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{\mathbb{Q}} \subsetneq \mathbb{Q}$ (Wertemenge)

$$x \mapsto f(x) := \underbrace{(x, (1_{\mathbb{N}_0}, 0_{\mathbb{N}_0}))_{\mathbb{Q}}}_{\equiv (x, 1_{\mathbb{Z}})}$$

f^{-1}: $\mathbb{Q} \supsetneq \mathbb{Z}_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{Z}$ (Wertemenge)

$$\underbrace{(x, (1_{\mathbb{N}_0}, 0_{\mathbb{N}_0}))_{\mathbb{Q}}}_{\equiv (x, 1_{\mathbb{Z}})} \mapsto f^{-1}\left(\underbrace{(x, (1_{\mathbb{N}_0}, 0_{\mathbb{N}_0}))_{\mathbb{Q}}}_{\equiv (x, 1_{\mathbb{Z}})}\right) := x$$

Beispiele: $f(3_{\mathbb{Z}}) \equiv_{\mathbb{Q}} (3_{\mathbb{Z}}, 1_{\mathbb{Z}})_{\mathbb{Q}} \equiv_{\mathbb{Q}} 3_{\mathbb{Q}}$, $\quad f^{-1}(3_{\mathbb{Q}}) \equiv_{\mathbb{Z}} f^{-1}\Big((3_{\mathbb{Z}}, 1_{\mathbb{Z}})_{\mathbb{Q}}\Big) \equiv_{\mathbb{Z}} 3_{\mathbb{Z}}$

Dass f die Bedeutung erhält und somit in der Tat ein Isomorphismus ist, muss noch bewiesen werden, was ich hier aus Platzgründen nur an der Addition zeigen werde:

$$
\begin{aligned}
& f(x) +_{\mathbb{Q}} f(y) = && \textit{(Anwenden der Abbildungsvorschrift)}\\
= \quad & (x,(1,0)) +_{\mathbb{Q}} (y,(1,0)) = && \textit{(Anwenden der } \mathbb{Q}\textit{-Additionsvorschrift)}\\
= \quad & (x\cdot(1,0) +_{\mathbb{Z}} y\cdot(1,0), (1,0)\cdot_{\mathbb{Z}}(1,0)) = && \textit{(Ausrechnen der Paarkomponenten)}\\
= \quad & (x+y,(1,0)) = &&\\
= \quad & f(x +_{\mathbb{Z}} y) &&
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& f^{-1}\Big((x,(1,0))_{\mathbb{Q}} +_{\mathbb{Q}} (y,(1,0))_{\mathbb{Q}} \Big) =\\
= \quad & f^{-1}((x\cdot(1,0) + y\cdot(1,0)\,,(1,0)\cdot(1,0))) =\\
= \quad & f^{-1}((x +_{\mathbb{Z}} y,(1,0))) =\\
= \quad & x +_{\mathbb{Z}} y =\\
= \quad & f^{-1}\Big((x,(1,0))_{\mathbb{Q}}\Big) +_{\mathbb{Z}} f^{-1}\Big((y,(1,0))_{\mathbb{Q}}\Big)
\end{aligned}
$$

1.3.5 Reelle Zahlen

In diesem Abschnitt werden zwei Realisierungen der reellen Zahlen vorgestellt. Da bei beiden ein umfangreicher Formalismus für eine rigorose Darstellung notwendig ist, werde ich hier nur die Grundideen der beiden Realisierungen vorstellen und für weiterführende Informationen und Beweise auf Literatur verweisen.

Unkonstruktive Realisierung der reellen Zahlen

Bei der sog. unkonstruktiven Realisierung der reellen Zahlen stellt man die Körperaxiome (Assoziativität und Kommutativität der Addition und Multiplikation, Existenz neutraler und inverser Elemente bezüglich Addition und Multiplikation und Distributivität ($a(b+c) = ab+ac$) und das Vollständigkeitsaxiom (grob: Zwischen zwei reelle Repräsentanten rationaler Zahlen passen unendlich viele Repräsentanten reeller Zahlen) und zeigt dann, dass es a) Mengen und Verknüpfungen gibt, die diese Axiome erfüllen, und b) dass alle Realisierungen, die diese Axiome erfüllen, zueinander isomorph sind.

Man nennt diese Realisierung der reellen Zahlen „unkonstruktiv“, da sie nicht die Zahlenmenge, $\mathbb{R}$, und die Verknüpfungen, $+$, $-$, $\cdot$, :, direkt angibt, sondern nur die Axiome, die sie erfüllen müssen.

Vertreter des mathematischen Konstruktivismus lehnen die unkonstruktive Realisierung der reellen Zahlen ab; ihrer Meinung nach existiert ein mathematisches Objekt nur dann, wenn es eine

Methode gibt, die das betreffende mathematische Objekt konstruiert.

Vertreter der konventionellen Meinung haben einen allgemeineren Existenzbegriff: Ihnen zufolge existiert ein mathematisches Objekt auch dann, wenn beispielsweise bewiesen wurde, dass die Annahme der Nichtexistenz des Objekts zu einem Widerspruch führt. [[RKonstr]], [[RWikiDeKonstr]]

Konstruktive Realisierung der reellen Zahlen

Eine konstruktive Realisierung der reellen Zahlen, die auch Vertreter des mathematischen Konstruktivismus akzeptieren, basiert auf den rationalen Zahlen. Dabei begreift man reelle Zahlen als Grenzwert bestimmer Folgen (sog. Cauchy-Folgen), beispielsweise definiert man π als Grenzwert der Folge $3, 3{,}1, 3{,}14, 3{,}141, 3{,}1415, \ldots$.

1.3.6 Surreale Zahlen

In diesem Kapitel werde ich die surrealen Zahlen vorstellen, deren Aufbau sich von dem der natürlichen, ganzen und rationalen Zahlen grundlegend unterscheidet.

Die surrealen Zahlen umfassen die konventionellen Zahlenbereiche $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ und darüberhinaus transfinite und infinitesimale Zahlen (Zahlen, die größer als jede reelle Zahl bzw. kleiner als jede positive reelle Zahl sind) und bilden, bis auf eine kleine formale Feinheit, sogar einen Körper.

Die surrealen Zahlen zeichnen sich durch eine Vielzahl faszinierender Eigenschaften aus, die ich hier kurz darlegen werde. Die Eleganz und vielen Möglichkeiten der surrealen Zahlen kommen leider zu einem hohen Preis – Rechnungen und Beweise werden sehr lang –, weswegen ich hier aus Platzgründen nur eine grobe Einführung in die surrealen Zahlen geben kann.

Erfunden/entdeckt wurden die surrealen Zahlen 1974 durch den englischen Mathematiker und theoretischen Physiker John Horton Conway (* 1937). Standardwerke sind Conways **On Numbers and Games** (1976) und Donald E. Knuths **Surreal Numbers: How Two Ex-Students Turned on to Pure Mathematics and Found Total Happiness** (1974). [[SWikiDeSurr]]

Anwendung finden die surrealen Zahlen in der Nichtstandardanalysis, der kombinatorischen Spieltheorie und sind eng verknüpft mit der Theorie der Ordinalzahlen. Die Bedeutung der surrealen Zahlen für die Nichtstandardanalysis und die kombinatorische Spieltheorie werde hier auch darlegen.

Rekapitulation des konventionellen Aufbaus

Beim konventionellen Aufbau der Zahlenmengen wie hier präsentiert führt man alle Rechenoperationen und Relationen aufs Zählen zurück. Zuerst angewendet wird dieses Konzept bei der Definition der Addition auf den natürlichen Zahlen –

$n + S(m) := S(n + m)$, mit $n, m \in \mathbb{N}_0$

– und auch die anderen Grundrechenarten führt man entweder direkt aufs Zählen zurück oder auf die Addition, die ihrerseits aufs Zählen führt. Das Anfangselement 0 und die Nachfolgerfunktion S können wahlweise abstrakt bleiben oder konkretisiert werden.

Ganze Zahlen begreift man als Paare natürlicher Zahlrepräsentanten, wobei die erste Paarkomponente eines Repräsentanten angibt, wie oft man, von der Null ausgehend, vorwärts zählt, und die zweite angibt, wie oft man, vom Ergebnis des Vorwärtszählens, rückwärts zählt. Die Definitionen der Operatoren und Relationen führt man auf die bereits definierten Regeln der natürlichen Zahlen zurück, wie beispielsweise bei der Definition der $\mathbb{Z}$-Multiplikation einsehbar:

$(n, m) \cdot_{\mathbb{Z}} (\nu, \mu) := (n\nu +_{\mathbb{N}_0} m\mu, n\mu +_{\mathbb{N}_0} m\nu)$ mit $(n, m), (\nu, \mu) \in \mathbb{Z}$.

Auf der rechten Seite der Definition wird die $\mathbb{N}_0$-Addition und -Multiplikation genutzt, die ihrerseits beide über das Zählkonzept definiert sind.

Da die Zahlrepräsentation bei den ganzen Zahlen als Paare natürlicher Zahlrepräsentanten nicht eindeutig ist, muss man eine Äquivalenzrelation ($\equiv$) definieren und, wenn man eine Menge eindeutiger Repräsentanten aufstellen will, normalisieren oder Äquivalenzklassen bilden.

Rationale Zahlen begreift man als Paare ganzer Zahlrepräsentanten und führt die Operatoren und Relationen auf Vorschriften auf den ganzen Zahlen zurück. Da bei der so gebildeten Menge der Repräsentanten rationaler Zahlen die Zahlrepräsentation nicht eindeutig ist, muss man, wie bei den ganzen Zahlen, eine Äquivalenzrelation einführen.

Unzufriedenheiten mit dem konventionellen Aufbau

In diesem Abschnitt werde ich einige Unzulänglichkeiten des konventionellen Aufbaus der Zahlenbereiche aufzeigen. Der Alternativaufbau durch die surrealen Zahlen hat diese Unzulänglichkeiten nicht; dieser Abschnitt begründet daher die Einführung der surrealen Zahlen.

– Komplexität durch den „gestapelten" Aufbau

Wie die längere Beispielrechnung auf S. [[LINK:QLang]] gezeigt hat, ist das Rechnen mit rationalen Zahlen nach den in dieser Arbeit hergeleiteten Vorschriften umständlich.

In der Praxis nutzt man daher Symbolmanipulationstechniken (schriftliches Addieren, schriftliches Multiplizieren), die es ersparen, von der hohen Ebene der Vorschriften der rationalen Zahlen zum einfachen Zählen zurückkommen zu müssen.

Das geht, wie in der Einleitung auf S. [[LINK:Einl]] schon erwähnt, so weit, dass die Ideen hinter dem Aufbau der Zahlen größtenteils unbekannt sind.

Auch wenn in der Praxis dieser „gestapelte" Aufbau der Zahlenmengen keine Rolle spielt, so hätte man, von einem mathematisch-ideologischen Standpunkt aus betrachtet, trotzdem lieber einen Aufbau, der alle Zahlen „in einem Rutsch" liefert. Der Ansatz durch die surrealen Zahlen liefert genau das.

– Unzulänglichkeiten im Umgang mit Unendlichkeiten

Es gibt noch einen anderen Grund, wieso man mit dem konventionellen Aufbau der Zahlenmengen unzufrieden sein könnte: Der Umgang mit Unendlichkeiten ist, im Vergleich zu den surrealen Zahlen, unnötig kompliziert.

Weder die natürlichen, noch die ganzen, rationalen oder reellen Zahlen enthalten Objekte wie „Unendlich" oder „minus Unendlich". Naive Versuche, sie einzuführen, schlagen fehl, da viele gewohnte Eigenschaften, die man eigentlich beibehalten möchte, verletzt werden, wie folgendes Beispiel illustriert:

$$
\begin{aligned}
& \tfrac{\infty}{\infty} = \\
= \; & 1 && \text{nach der Regel } x : x = 1 \\
\\
& \tfrac{\infty}{\infty} = && \textit{(Umformen des Zählers, nach } \infty + \infty = \infty\textit{)} \\
= \; & \tfrac{\infty+\infty}{\infty} = && \textit{(Zusammenfassen der Zählers)} \\
= \; & \tfrac{2\infty}{\infty} = && \textit{(Kürzen)} \\
= \; & 2 \neq \\
\neq \; & 1 && \text{Widerspruch zum Ergebnis des anderen Rechenwegs!}
\end{aligned}
$$

Bei den reellen Zahlen löst man das Problem teilweise durch die Einführung des Grenzwertbegriffs, mit dem u.a. der Polstellen- und Asymptotenbegriff formalisiert werden können, ohne dass man ∞ und $-\infty$ zur Zahlenmenge hinzufügen müsste, was zu Inkonsistenzen führen würde.

Intuitiv fehlt dem Grenzwertbegriff aber noch etwas: Vergleicht man beispielsweise die Funktionen f und g mit $f(x) = \frac{1}{x}$ und $g(x) = \frac{1}{x^2}$ ($x \in \mathbb{R}$) hinsichtlich ihres Verhaltens im Unendlichen...

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

...so stellt man fest, dass sie beide für $x \to \infty$ gegen Null konvergieren. Die Anschauung akzeptiert zwar, dass sich beide Graphen mit zunehmenden x immer mehr an die x-Achse anschmiegen, trotzdem verläuft der Graph von f (ab der Stelle 1) über dem von g; wie also können f und g beide zum gleichen Wert, Null, konvergieren?

(Der Grenzwertbegriff in seiner axiomatischen Formulierung über ε/δ-Schranken (in der Schule nur über ε-Schranken) ist natürlich widerspruchsfrei.)

Mithilfe der surrealen Zahlen kann man Funktionen auf ihr Verhalten im Unendlichen viel einfacher hin untersuchen, da man einfach den Funktionswert „bei Unendlich“ (in einem Sinne, den ich weiter unten präzisieren werde) ausrechnen kann.

In einem gewissen Sinne kann man bei den surrealen Zahlen sagen, dass f und g beide gegen Null konvergieren, der Grenzwert von f aber trotzdem größer (infinitesimal größer) als g ist.

Alternativer Ansatz durch die surrealen Zahlen

Die Konstruktion der surrealen Zahlen unterscheidet sich von der Konstruktion der natürlichen, ganzen und rationalen Zahlen grundlegend; man bildet weder Paare von Repräsentanten von Zahlen der jeweils vorhergehenden Menge, noch nutzt man eine Nachfolgerfunktion.

Wie auch bei den ganzen und rationalen Zahlen ist die Zahlrepräsentation bei den surrealen Zahlen nicht eindeutig. Die gängige Lösung des Problems besteht im Bilden von Äquivalenzklassen.

Da man, wie ich gleich zeigen werde, zum direkten Umgang mit surrealen Zahlen den Definitionen entsprechend einen großen rechnerischen Aufwand treiben muss, werde ich die besonderen Eigenschaften der surrealen Zahlen ausschließlich auf der Ebene der Symbolmanipulation darlegen und auf Literatur für eine genauere Behandlung der Themen verweisen.

– Konstruktionsregel

Bei den surrealen Zahlen stehen zwei Regeln im Mittelpunkt, die sog. Konstruktionsregel und die Vergleichsregel. Die Konstruktionsregel gibt an, wie man surreale Zahlen konstruiert; die Vergleichsregel definiert die Kleinergleichrelation.

Im Folgenden bezeichne ich mit $ die Menge der Repräsentanten surrealer Zahlen.

Konstruktionsregel der surrealen Zahlen

Sind L und R zwei Mengen von Repräsentanten surrealer Zahlen, dann (und nur dann) repräsentiert auch das Paar (L, R) eine surreale Zahl, wenn zusätzlich gilt: Kein Element von R ist kleinergleich einem Element von L. In Symbolen:

$L, R \in \$ \Leftrightarrow (L, R) \in \$$, wenn für kein $r \in R$ gilt: $r \leq l$ (für mindestens ein $l \in L$)

Repräsentaten surrealer Zahlen sind also Paare von Mengen von Repräsentanten surrealer Zahlen. Die erste Paarkomponente bezeichnet man als „linke Menge“, die zweite als „rechte Menge“.

Manchmal begreift man Repräsentanten surrealer Zahlen auch als „Bimengen“ (bi-sets), die, anders als normale Mengen, die nur über eine Art von Zugehörigkeit ($\in$) verfügen, zwei Arten der Zugehörigkeit unterscheiden – eine „linke Zugehörigkeit“ und eine „rechte Zugehörigkeit“.

Man schreibt dann statt $(\{\ldots\}, \{\ldots\})$ $\{\ldots \mid \ldots\}$. Verwechslungsgefahr mit der Mengenkonstruktionsnotation ($\{f(x) \mid \phi(x)$ ist wahr$\}$) besteht in englischsprachiger

Literatur weniger, da dort häufig der Doppelpunkt statt des senkrechten Strichs bei der Mengenkonstruktionsnotation genutzt wird.

Hier werde ich ausschließlich die Paarnotation nutzen.

Konstruktion der Null

Die Konstruktionsregel definiert, wie man, wenn man bereits zwei Mengen surrealer Zahlen kennt, weitere surreale Zahlen konstruieren kann. Das scheint an dieser Stelle ein Widerspruch zu sein: Man kennt ja noch keine surreale Zahlen – wie soll man dann welche konstruieren?

Die Definition ergibt Sinn, wenn man bedenkt, dass man als linke Menge L und rechte Menge R auch die leere Menge $\{\}$ nehmen kann. Die zusätzliche Beschränkung, dass kein $r \in R$ kleinergleich einem Element von L ist, gilt: Da die leere Menge keine Elemente enthält, gibt es auch keine Elemente, die gegen die Beschränkung verstoßen könnten („vacuous truth“).

Damit hat man einen Repräsentanten einer surrealen Zahl gefunden, die, wie sich später herausstellen wird, die Funktion der Null erfüllt:

$0_{\mathbb{S}} := (\{\}, \{\})$

Bei der Definition der Zahlensymbole der ganzen und rationalen Zahlen habe ich die Identität der Symbole nicht definiert, und nur eine Äquivalenzbeziehung hergestellt: $0_{\mathbb{Z}} :\equiv (0,0)$, $0_{\mathbb{Q}} :\equiv (0,1)$. Der Grund liegt darin, dass die Zahlrepräsentation bei den ganzen und rationalen Zahlen wie in dieser Arbeit realisiert nicht eindeutig ist und ich nicht „willkürlich“ einen Repräsentanten auszeichnen wollte.

Obwohl auch die Zahlrepräsentation bei den surrealen Zahlen nicht eindeutig ist, definiere ich hier die Identität der Zahlensymbole der surrealen Zahlen, da es im weiteren Verlauf günstig ist, Namen für ganz bestimmte Repräsentanten zu haben. Auch folge ich damit den Konventionen von anderen Arbeiten über surreale Zahlen, wie beispielsweise [[SWikiDeSurr]], [[SWikiEnSurr]], [[SKnuth]] und [[STondering]].

Man muss sich bewusst sein, dass es trotz meiner Definition der Identität der Zahlsymbole unendlich viele weitere Repräsentanten neben den ausgezeichneten gibt, die alle zueinander äquivalent sind und somit dieselbe Zahl repräsentieren.

– Vergleichsregel

Jetzt, da ein Repräsentant einer surrealen Zahl bereits bekannt ist, kann man ihn zur Bildung einer einelementigen Menge von Repräsentanten surrealer Zahlen heranziehen, welche man dann als linke und rechte Menge verwenden kann.

Auf diese Weise kommen folgende Paare von Mengen von Repräsentanten surrealer Zahlen in Betracht:

a) $L = \{0_\$\}, \quad R = \{\}: \quad (\{0_\$\}, \{\})$
b) $L = \{\}, \quad R = \{0_\$\}: \quad (\{\}, \{0_\$\})$
c) $L = \{0_\$\}, \quad R = \{0_\$\}: \quad (\{0_\$\}, \{0_\$\})$

Die Konstruktionsregel fordert die zusätzliche Beschränkung, dass kein Zahlrepräsentant $r \in R$ kleinergleich einem Repräsentant aus L ist. Um zu überprüfen, ob die Kandidaten a), b) und c) diese Bedingung erfüllen, muss man natürlich zunächst die Kleinergleichrelation definieren:

Vergleichsregel der surrealen Zahlen

Ein surrealer Zahlrepräsentant $x = (L_x, R_x)$ ist genau dann kleinergleich einem Zahlrepräsentanten $y = (L_y, R_y)$, wenn y kleinergleich keinem Element von L_x ist und wenn kein Element von R_y kleinergleich x ist. In Symbolen:

$x = (L_x, R_x) \leq (L_y, R_y) = y \Leftrightarrow$

$y \leq l_x$ für kein $l_x \in L_x$ und $r_y \leq x$ für kein $r_y \in R_y$.

Diese Definition ist, wie auch die Konstruktionsregel, rekursiv. Gebrochen wird die Rekursion durch quantifizierte Aussagen über der leeren Menge.

Mit bekannter Definition der Kleinergleichrelation kann man nun überprüfen, welche der Kandidaten gültige Repräsentanten surreale Zahlen sind:

- Kandidat a) $(\{0_\$\}, \{\})$ erfüllt die Bedingung – für kein $r \in R = \{\}$ soll $r \leq l$ (für mindestens ein $l \in L = \{0_\$\}$) gelten. Da R die leere Menge ist, ist die Bedingung trivialerweise erfüllt; Kandidat a) ist ein gültiger Repräsentant einer surrealen Zahl, die, wie nach der Definition der Addition klar werden wird, die Funktion der Eins erfüllt; man definiert:

  $1_\$:= (\{0_\$\}, \{\})$

- Auch Kandidat b) $(\{\}, \{0_\$\})$ erfüllt die Bedingung – da die linke Menge die leere Menge ist, gibt es kein $l \in L$, für das $r \leq l$ gelten könnte und somit die Konstruktionsregel verletzt werden könnte. Wie sich später herausstellen wird, handelt es sich bei Kandidat b) um einen Repräsentanten der Zahl (-1).

  $(-1)_\$:= (\{\}, \{0_\$\})$

- Kandidat c) erfüllt die Bedingung nicht, da $0_\$ \in R$ kleinergleich $0_\$ \in L$ ist und somit die Bedingung der Konstruktionsregel verletzt:

$$\begin{array}{rlll} & 0_\$ \leq 0_\$ & \Leftrightarrow & \textit{(Schreiben als Paare)} \\ \Leftrightarrow & (\{\}, \{\}) \leq (\{\}, \{\}) & \Leftrightarrow & \textit{(Anwenden der Vergleichsregel)} \\ \Leftrightarrow & 0_\$ \leq l_x \text{ für kein } l_x \in L_x = \{\} & \text{und} & \\ \text{und} & r_y \leq 0_\$ \text{ für kein } r_y \in R_y = \{\} & \Leftrightarrow \text{(wahr)} & \end{array}$$

Die Konstruktionsregel kann man nun, da man mit insgesamt drei bekannten Repräsentanten surrealer Zahlen – (-1), 0 und 1 – neue Mengen von Repräsentanten surrealer Zahlen bilden kann, erneut anwenden.

Mit jeder Anwendung der Konstruktionsregel findet/konstruiert man neue Zahlrepräsentanten; der Vorgang lässt sich unbegrenzt fortsetzen.

– Äquivalenzrelation der surrealen Zahlen

Man definiert zwei surreale Zahlen als äquivalent, wenn die eine kleinergleich der anderen ist und umgekehrt. In Symbolen:

Definition der Äquivalenz auf den surrealen Zahlen
$x \equiv_\$ y :\Leftrightarrow x \leq_\$ y$ und $y \leq_\$ x$
mit $x, y \in \$$.

Beispiel:

$$\begin{array}{rcccll} & 0 & \equiv & 0 & \Leftrightarrow & \textit{(Anwenden der Äquivalenzrelation)} \\ \Leftrightarrow & 0 & \leq & 0 & \text{und} & \\ \text{und} & 0 & \leq & 0 & \Leftrightarrow & \text{(wahr), nach S. [[LINK:S00]]} \end{array}$$

Auf die Beweise der Reflexivität, Symmetrie und Transitivität der Äquivalenzrelation verzichte ich an dieser Stelle.

Die Zahlrepräsentation ist bei den surrealen Zahlen nicht eindeutig, beispielsweise repräsentieren $(\{\}, \{\})$ und $(\{-1\}, \{1\})$ beide die

Null. Der Beweis, dass $(\{\},\{\}) \equiv (\{-1\},\{1\})$, folgt aus mehrmaligem Anwenden der Vergleichsregel, ist aber vergleichsweise lang, weswegen ich ihn hier nicht ausführen werde.

Wie bei den ganzen und rationalen Zahlen löst man das Problem, indem man Äquivalenzklassen von Repräsentanten, die alle zueinander äquivalent sind, bildet.

$0_{\$^*} := [0_\$] = \{(\{\},\{\}),(\{-1\},\{1\}),\ldots\}$

Anders als bei der Äquivalenzklassenbildung bei den ganzen und rationalen Zahlen ist bei den surrealen Zahlen nicht unmittelbar offensichtlich, welche Repräsentanten zu $0_\$ = (\{\},\{\})$ äquivalent sind; mathematisch stellt dies aber kein Problem dar.

– Addition auf den surrealen Zahlen

In diesem Abschnitt wird die Definition der Addition auf den surrealen Zahlen definiert. Um diese übersichtlich notieren zu können, benötigt man eine Kurzschreibweise, die sog. mengentheoretischen Erweiterung des $+$-Operators, die wie folgt definiert ist:

$z \oplus M := \{z + m \,|\, m \in M\}$

$M \oplus z := \{m + z \,|\, m \in M\}$

mit $z \in \$$ und M eine Menge von Repräsentanten surrealer Zahlen. Bei $\oplus$ wird also eine Addition für jedes Element der Menge ausgeführt, zwei Zahlenbeispiele verdeutlichen das:

$5 \oplus \{1,2,3\} = \{5+1, 5+2, 5+3\}, \qquad \{\} + 5 = \{\}$

Definition der Addition auf den surrealen Zahlen

$x + y = ((L_x \oplus y) \cup (x \oplus L_y), (R_x \oplus y) \cup (x \oplus R_y))$

mit $x, y \in \$$ und $x = (L_x, R_x), y = (L_y, R_y)$.

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
& 0_\$ + 1_\$ = && \textit{(Schreiben als Paare)}\\
= \;& (\{\},\{\}) + (\{0_\$\},\{\}) = && \textit{(Anwenden der Additionsvorschrift)}\\
= \;& (\\
& \quad (\{\} \oplus 1_\$) \cup (0_\$ \oplus \{0_\$\}), \\
& \quad (\{\} \oplus 1_\$) \cup (0_\$ \oplus \{\}) \\
&) = \\
= \;& (\,\{\} \cup \{0_\$ + 0_\$\},\, \{\} \cup \{\}\,) = \\
= \;& (\{0_\$ + 0_\$\},\{\}) = && \textit{(Schreiben als Paare)}\\
= \;& (\{(\{\},\{\}) + (\{\},\{\})\},\{\}) = && \textit{(Anwenden der Additionsvorschrift)}\\
= \;& (\\
& \quad \{(\\
& \qquad (\{\} \oplus 0_\$) \cup (0_\$ \oplus \{\}), \\
& \qquad (\{\} \oplus 0_\$) \cup (0_\$ \oplus \{\}) \\
& \quad)\}, \\
& \quad \{\} \\
&) = \\
= \;& (\\
& \quad \{\ (\{\},\{\})\ \}, \\
& \quad \{\} \\
&) = \\
= \;& (\{0_\$\},\{\}) = 1_\$
\end{aligned}
$$

Die Bezeichnungen 0 und 1 für $(\{\},\{\})$ bzw. $(\{0\},\{\})$ waren also, zumindest für dieses Beispiel, gerechtfertigt.

Es ist nicht besonders schwer, allgemein zu zeigen, dass die hier definierte Addition kommutativ und assoziativ ist und alle Repräsentanten, die zu $0_\$$ äquivalent sind, neutrale Elemente sind; die Beweise sind zwar einfach, da sie sich direkt aus den jeweiligen Definitionen ergeben, nehmen aber viel Platz in Anspruch, weswegen ich sie hier nicht ausführe. Nachlesen kann man sie in [[STondering]], [[SKnuth]] und [[SUnknown]].

Die anderen Operatoren kann ich hier aus Platzgründen nicht definieren. Auch kann ich keine Herleitungen der Definitionen anführen, wie bei den natürliche, ganzen und rationalen Zahlen getan, da es ja keine bereits bekannten Umformungsregeln für die surrealen Zahlen gibt, von denen man Definitionen ableiten könnte.

– Fortsetzung des Konstruktionsverfahrens

Setzt man das Konstruktionsverfahren unbegrenzt fort, erhält man (hier ohne Beweis) Repräsentanten aller Zahlen der Form $\frac{a}{2^b}$ mit a

ganz und b natürlich (die sog. dyadischen Brüche). Speziell für $b = 0$ ergeben sich die ganzen Zahlen.

Der Clou: Man kann nun die unendlich große Menge der surrealen Repräsentanten ganzer Zahlen (oder Teilmengen von ihr), $\{0_\$, 1_\$, 2_\$, 3_\$, \ldots\}$, selbst als linke oder rechte Menge nehmen! Damit erhält man folgende Zahlrepräsentanten:

$\omega := (\{0, 1, 2, 3, \ldots\}, \{\})$

$-\omega = (\{\}, \{0, -1, -2, -3, \ldots\})$

ω und $-\omega$ haben die besondere Eigenschaft, dass sie größer bzw. kleiner als jeder surreale Repräsentant einer natürlichen Zahl sind! Für sie gelten u.a. folgende Rechenregeln:

$\omega + (-\omega) \equiv 0,\ \pm\omega \cdot 0 \equiv 0,$

Darüberhinaus gibt es bei den surrealen Zahlen nicht nur zwei transfinite Zahlen, repräsentiert durch ω und $-\omega$, sondern unendlich viele weitere (!), die man erhält, wenn man $\pm\omega$ und Ergebnisse von Rechenoperationen mit $\pm\omega$ als Elemente von linker und rechter Menge zulässt:

$2\omega \equiv (\{\omega, \omega + 1, \omega + 2, \omega + 3, \ldots\}, \{\}) \equiv \omega + \omega > \omega$

$-2\omega \equiv (\{\}, \{-\omega, -\omega - 1, -\omega - 2, -\omega - 3, \ldots\}) \equiv (-\omega) + (-\omega) < -\omega$

$\omega^2 \equiv (\{\omega, 2\omega, 3\omega, 4\omega, \ldots\}, \{\}) \equiv \omega \cdot \omega > \omega$

$-\omega^2 \equiv (\{\}, \{-\omega, -2\omega, -3\omega, -4\omega, \ldots\}) \equiv -\omega \cdot \omega < -\omega$

Es gibt sogar Zahlen, die zwar größer als jede positive reelle Zahl sind, aber kleiner als ω! Ein Beispiel einer solchen Zahl ist $\omega - 1$:

$r < \omega - 1 \equiv (\{0, 1, 2, 3, \ldots\}, \{\omega\}) < \omega$ für alle $r \in \mathbb{R}_\$$.

Die multiplikativ Inversen von transfiniten Zahlen sind sog. infinitesimale Zahlen:

$\varepsilon := \left(\{0\}, \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\right\}\right) \equiv \frac{1}{\omega}$

$-\varepsilon = \left(\left\{-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \ldots\right\}, \{0\}\right) \equiv \frac{1}{-\omega}$

ε ist Repräsentant einer infinitesimalen Zahl, die größer Null, aber kleiner als jede positive reelle Zahl ist. In Symbolen: $0 < \varepsilon < r$ für alle $r \in \mathbb{R}_\$$.

Wie auch von den transfiniten Zahlen gibt es unendlich viele infinitesimale Zahlen:

$1 > 2\varepsilon \equiv \left(\{\varepsilon\}, \left\{\varepsilon+1, \varepsilon+\frac{1}{2}, \varepsilon+\frac{1}{4}, \ldots\right\}\right) \equiv \varepsilon+\varepsilon > \varepsilon > 0$ – 2ε repräsentiert eine Zahl, die größer ϵ, aber trotzdem noch kleiner als jede positive reelle Zahl ist.

$0 < \varepsilon^2 \equiv \frac{1}{\omega^2} \equiv \frac{1}{\omega}\frac{1}{\omega} \equiv \varepsilon\varepsilon < \varepsilon$ – ε^2 repräsentiert eine Zahl, die kleiner als ϵ, aber immer noch positiv ist, die also zwischen 0 und ϵ liegt.

Infinitesimale Zahlen gibt es nicht nur in der Umgebung von Null:

$3 < 3+\varepsilon < r$ für alle $r \in \mathbb{R}_{\$}, r > 3$

$\omega - \varepsilon$ repräsentiert eine Zahl, die größer als jede reelle Zahl ist, aber kleiner ω.

Im Folgenden werde ich mit ω und ε nur symbolhaft umgehen, also nicht ihre Definitionen als Paar zweier Mengen von Repräsentanten surrealer Zahlen nutzen, da das Rechnen auf dieser unteren Ebene sehr mühselig ist.

Da jedoch die surrealen Zahlen (bis auf eine kleine formale Feinheit) einen Körper bilden, können die bekannten Rechengesetze und Äquivalenzumformungen auf das Rechnen mit surrealen Zahlen übertragen werden.

Auch lasse ich die Beweise an dieser Stelle aus, da sie viel Platz benötigen und in den Quellen [[STondering]], [[SKnuth]] und [[SUnknown]] zu finden sind.

Anwendungen der surrealen Zahlen

In diesem Abschnitt werden Anwendungen der surrealen Zahlen vorgestellt. Dabei wird mit ω und ε nur symbolhaft umgegangen.

– Bestimmung des Verhaltens von Funktionen im Unendlichen

In der Einführung dieses Kapitels betrachtete ich zwei Funktionen f und g mit $f(x) = \frac{1}{x}$ und $g(x) = \frac{1}{x^2}$. Über den Grenzwertbegriff der reellen Zahlen findet man, dass $f(x)$ und $g(x)$ für $x \to \infty$ gegen Null gehen:

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

Ich sprach den augenscheinlichen Widerspruch an, dass der Graph von f (ab der Stelle 1) über dem von g verläuft, die Grenzwerte für $x \to \infty$ aber gleich sind.

Mithilfe der surrealen Zahlen kann man den Grundgedanken der Anschauung mit dem Grenzwertbegriff der reellen Zahlen vereinbaren. Anstatt der Grenzwertbetrachtung für $x \to \infty$ kann man im Surrealen für x einfach ω nehmen und $f(\omega)$ mit $g(\omega)$ vergleichen, also die Funktionswerte an der Stelle ω („Unendlich") ausrechnen:

$f(\omega) = \frac{1}{\omega} = \varepsilon$

$g(\omega) = \frac{1}{\omega^2} = \varepsilon^2 < \varepsilon$

$f(\omega)$ und $g(\omega)$ unterscheiden sich also beide nur um einen infinitesimalen Anteil (ε bzw. ε^2) von Null; das Ergebnis der Grenzwertbetrachtung spiegelt auf diese Weise wieder.

Zusätzlich wird aber anders als beim Grenzwertbegriff die Anschauung nicht verletzt: $g(\omega)$ und $f(\omega)$ sind zwar beide infinitesimal, trotzdem ist $g(\omega)$ aber kleiner als $f(\omega)$ – anschaulich: „f ist auch im Unendlichen größer als g."

– Bestimmung des Verhaltens von Funktionen an Polstellen

Wendet man den Grenzwertbegriff auf $f(x)$ und $g(x)$ für $x \to 0+$ an, so kommt man zum Ergebnis, dass f und g an der Stelle 0 eine Polstelle haben:

$\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0+} \frac{1}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0+} \frac{1}{x^2} = +\infty$

Das Argument der Anschauung, g steige doch stärker an als f, findet keine Entsprechung im Grenzwertbegriff, dem zufolge man lediglich aussagen kann, dass f und g beide an der Stelle 0 divergieren.

Bei einer entsprechenden Diskussion der Funktionen im Surrealen fließt die Anschauung hingegen durchaus ein – bei gleichzeitiger Erhaltung der Gültigkeit der Erkenntnisse der Grenzwertbetrachtung in einem gewissen Sinne.

Statt den Grenzwert für $x \to 0+$ zu untersuchen, kann man im Surrealen einfach eine positive infinitesimale Zahl, wie beispielsweise ε, als Funktionsargument nutzen:

$f(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} = \omega$

$g(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2} = \omega^2 > \omega$

Die Erkenntnis der Grenzwertbetrachtung – dass beide Funktionen an der Stelle 0 divergieren, wird dadurch wiedergespiegelt, dass $f(\varepsilon)$ und $g(\varepsilon)$ beide transfinite Zahlen sind. Zusätzlich wird aber die Anschauung nicht enttäuscht: Während f an der Stelle ε „erst bei ω" ist, ist g „schon bei ω^2".

– Beschreibung von Spielen im Rahmen der kombinatorischen Spieltheorie

Spiele mit zwei Spielern, bei denen die Spieler abwechselnd ziehen, es keine versteckte Informationen gibt (wie beispielsweise verdeckte Karten), der Spielverlauf nur von den Spielern und den Regeln, nicht aber vom Zufall (wie beispielsweise durch Würfel oder Mischen realisert) abhängt und derjenige Spieler verliert, der keine Zugmöglichkeiten mehr hat, können durch „Games", eine Verallgemeinerung der surrealen Zahlen, sehr gut beschrieben werden. Die Spieler nennt man „linker" bzw. „rechter Spieler". [[SWikiDeSurr]], [[SWikiEnSurr]]

Games konstruiert und vergleicht man genau wie surreale Zahlen, nur lässt man die Beschränkung der Konstruktionsregel, kein Element der rechten Menge dürfe kleinergleich einem Element der linken Menge sein, weg.

Beispielsweise ist $(\{0\}, \{0\})$ kein Repräsentant einer surrealen Zahl, da die Konstruktionsregel verletzt wird, da $0 \leq 0$ ist, aber sehr wohl ein Game.

Die linke Menge L eines Games (L, R) enthält die Games, die die Spielsituationen beschreiben, die der linke Spieler, wenn er am Zug ist, durch seinen Zug erreichen kann. Die rechte Menge R enthält die Games, die die Spielsituationen beschreiben, die der rechte Spieler erreichen kann, wenn er am Zug ist.

- Beispielsweise beschreibt das Game $0 = (\{\}, \{\})$ eine Spielsituation, in der beide Spieler keine Zugmöglichkeit haben. Da laut den Spielregeln der Spieler verliert, der keine Zugmöglichkeit mehr hat, verliert bei einer Spielsituation, die durch das Game 0 beschrieben ist, der Spieler, der gerade am Zug ist.

- Das Game $1 = (\{0\}, \{\})$ beschreibt eine Situation, bei der der linke Spieler, sollte er am Zug sein, als einzige Zugmöglichkeit das Herstellen der Situation, die durch das Game 0 beschrieben ist, hat. Da beim Game 0 der Spieler verliert, der gerade am Zug ist, verliert also bei einer Situation, die durch das Game 1 beschrieben ist, der rechte Spieler, wenn ursprüngloch der linke Spieler am Zug war.

  Auch verliert der rechte Spieler, wenn nicht der linke Spieler, sondern er selbst bei der ursprünglichen Situation (Game 1) am Zug ist, da die rechte Menge von 1, $\{\}$, leer ist und er somit keine Zugmöglichkeiten hat.

  Das Game 1 beschreibt also eine Spielsituation, bei der, unabhängig davon, welcher Spieler am Zug ist, der rechte Spieler verliert.

- Beim Game $(-1) = (\{\}, \{0\})$ dagegen verliert der linke Spieler:

  Ist der linke Spieler am Zug, so hat er keine Zugmöglichkeiten, da die linke Menge von 1, $\{\}$, die leere Menge ist.

  Ist der rechte Spieler am Zug, so stellt er eine Situation her, die durch das Game $0 = (\{\}, \{\})$ beschrieben wird. Dann ist der linke Spieler am Zug und verliert, da die linke Menge von 0 leer ist, er also keine Zugmöglichkeiten hat.

Es stellt sich heraus, dass allgemein Games, die größer als 0 sind, Situationen beschreiben, bei denen der linke Spieler gewinnt, wenn er optimal spielt, und Games, die kleiner als 0 sind, Situationen beschreiben, bei denen der rechte Spieler gewinnt, wenn er optimal spielt.

Ist ein Game äquivalent zu 0, so beschreibt es Situationen, bei denen der Spieler gewinnt, der den nächsten Zug hat.

Anders als bei den surrealen Zahlen kann es bei den Games sein, dass ein Game weder kleiner, noch größer, noch gleich 0 ist. Solche Games nennt man „gegenüber 0 fuzzy“. Ein Beispiel für ein solches Game ist $* := (\{0\}, \{0\})$.

Bei Spielsituationen, die durch Games beschrieben werden, die zu 0 fuzzy sind, gewinnt der Spieler, der am Zug ist:

Ist beispielsweise bei Situationen, die durch das Game $*$ beschrieben werden, der linke Spieler am Zug, so stellt er eine Situation her, die durch das Game 0 beschrieben wird. Bei $0 = (\{\}, \{\})$ verliert der Spieler, der am Zug ist; also verliert der rechte Spieler, womit der linke gewinnt.

Ist bei Situationen, die das Game $*$ beschreibt, der rechte Spieler am Zug, so befindet sich der linke Spieler nach dem Zug des rechten Spielers in einer Situation, die durch das Game 0 beschrieben wird. Dementsprechend verliert der linke Spieler; der rechte gewinnt.

Die Games bilden keinen Körper, die Rechenoperatoren haben aber trotzdem sinnvolle Bedeutungen: Zerfällt beispielsweise beim Brettspiel Go (vor allem in Ostasien verbreitet) eine Partie in zwei kleinere, isolierte Partien, so ist das Game, das die Ursprungssituation beschreibt, äquivalent zur Summe der Games, die die isolierten Partien beschreiben.

Probleme und offene Fragen bei den surrealen Zahlen

– Größere Komplexität im Vergleich zum konventionellen Aufbau der Zahlenbereiche

Die faszinierenden Eigenschaften der surrealen Zahlen rühren von ihrer rekursiven Struktur her. Diese Struktur, die beispielsweise gegenüber der Struktur der natürlichen Zahlen nach Peano komplizierter ist, führt aber auch zu längeren Definitionen der Rechenoperatoren und so zu höherem Rechenaufwand, wenn man nicht auf der hohen Ebene der Symbolmanipulation arbeitet.

Insbesondere ist die mechanische Überprüfbarkeit nicht mehr so einfach gewährleistet, da die linke und rechte Menge eines Repräsentanten beliebig groß – auch unendlich groß – sein darf; im Allgemeinen kann ein Computer nicht unendlich viele Fälle in endlicher Zeit überprüfen.

Die Äquivalenzklassen bei den ganzen und rationalen Zahlen sind zwar auch unendlich groß; zum Rechnen benötigt man dort aber nur ein Element aus den Äquivalenzklassen.

Bei den surrealen Zahlen dagegen sind im Regelfall alle Elemente von linker und rechter Menge relevant.

– „Lücken“ in der Zahlengeraden

Ein weiteres Problem ergibt sich aus der Existenz von „Lücken“ auf der surrealen Zahlengeraden. „Lücken“ ist dabei nicht in dem Sinne zu verstehen, wie beispielsweise der Zahlenstrahl der natürlichen und ganzen Zahlen „Lücken“ enthält, da es nicht für jede zwei beliebige ganzen Zahlen eine Zahl gibt, die zwischen ihnen liegt.

Solche Art Lücken gibt es bei den surrealen Zahlen nicht; zwischen zwei beliebigen surreale Zahlen gibt es stets unendlich viele weitere surreale Zahlen.

Stattdessen treten Lücken im Zusammenhang mit transfiniten und infinitesimalen Zahlen auf. So gibt es beispielsweise eine Lücke zwischen den Repräsentanten der positiven reellen Zahlen und ω: Man erreicht über keine endliche Verkettung von Rechenoperationen reeller Zahlen ω,

$$\underbrace{1+1+1+1+1+1+\cdots}_{\text{endlich viele Summanden}} < \omega$$

Ähnliche Lücken gibt es auch zwischen ω und 2ω und zwischen den Repräsentanten positiver reeller Zahlen und Zahlen, die von Null nur infinitesimal entfernt sind:

$$\omega + \underbrace{1+1+1+1+1+1+\cdots}_{\text{endlich viele Summanden}} < 2\omega$$

$$\underbrace{1:2:2:2:2:2:\cdots}_{\text{endlich viele Divisionen}} > \varepsilon$$

– Stetigkeit, Differentiation und Integration

Aus den „Lücken“ in der Zahlengerade ergeben sich Probleme, wenn man versucht, den Stetigkeitsbegriff auf die surrealen Zahlen zu übertragen. Ist beispielsweise folgende Funkion f stetig oder nicht? (Man bedenke die Schwierigkeit, die problematische Stelle ω zu erreichen.)

$$f\colon x \mapsto f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < \omega \\ 1 & \text{für } x \geq \omega \end{cases}$$

Ohne einen präzisen Stetigkeitsbegriff ist eine formale Definition der Differentiation nicht möglich. Pionierarbeit leistet auf diesem Gebiet Antongiulio Fornasiero, dessen Dissertation **Integration on Surreal Numbers** (2004) Lösungen dieser Probleme zu beschreiben scheint.

– Probleme bei der Anwendung der surrealen Zahlen als „Grenzwertersatz“

Als Anwendungsbeispiel der surrealen Zahlen demonstrierte ich die Möglichkeit der Diskussion reeller Funktionen – den Grenzwert für $x \to \infty$ bzw. $x \to 0+$ ersetzte ich durch das Nutzen von ω bzw. ε als Funktionsargument.

Bei den einfachen Funktionen, die ich als Beispiele nutzte, hat dieses Verfahren auch gut funktioniert; ich habe aber nicht untersucht, inwieweit man den Grenzwertbegriff durch geeignetes Einsetzen surrealer Zahlen als Funktionsargumente bei komplizierteren reellen Funktionen ersetzen kann.

– Mengentheoretische Probleme

Mehrmals schrieb ich, die surrealen Zahlen bildeten bis auf eine kleine formale Feinheit einen Körper. Die Feinheit liegt darin, dass man den Körperbegriff so definiert hat, dass nur Mengen einen Körper bilden können; die Repräsentanten surrealer Zahlen, $\mathbb{S}$, sind aber keine Menge (!), sondern eine sog. echte Klasse.

Die Unterschiede zwischen Mengen und Klassen sind zu kompliziert, als dass ich sie hier genauer erläutern könnte. Für diese Einführung in die surrealen Zahlen genügt es zu wissen, dass die Repräsentanten surrealer Zahlen deswegen keine Menge sind, da sie bestimmte Axiome der Mengenlehre verletzen.

Abgesehen davon, dass $\mathbb{S}$ also keine Menge, sondern eine Klasse ist, gelten die Körpergesetze auf $\mathbb{S}$.

1.3.7 Zusammenfassung und Ausblick

Diese Facharbeit legt die mögliche Formalisierung des Aufbaus der natürlichen, ganzen, rationalen und surrealen Zahlen dar. Zentrale Konzepte sind dabei der Zählbegriff, der sich bei den natürlichen Zahlen unmittelbar in den Definitionen von $\mathbb{N}_0$ und den Operatoren wiederspiegelt, und die Paarbildung, mit der natürliche Zahlen zu den ganzen Zahlen, und ganze Zahlen zu den rationalen Zahlen kombiniert werden können.

Da die Definitionen der Operatoren und Relationen auf den natürlichen Zahlen rekursiv sind, ist es notwendig, zu überprüfen, ob die Definitionen als Arbeitsvorschriften – als Algorithmen – eingesetzt werden können.

Wichtig bei den ganzen Zahlen ist die Unterscheidung zwischen der strukturellen Gleichheit und der Äquivalenzrelation, die für ein sinnvolles Sprechen von Gleichheit notwendig ist.

Die Darstellung der reellen Zahlen ist wegen des umfangreichen Formalismus, der für eine rigorose Behandlung der reellen Zahlen erforderlich ist, in dieser Arbeit nur sehr kurz.

Auch werden die komplexen Zahlen hier nicht behandelt. Gerade die komplexen Zahlen bringen aber, insbesondere auf dem Gebiet der komplexen Analysis, eine Fülle neuer Ideen.

Während die Axiomatisierungen der natürlichen, ganzen, rationalen und reellen Zahlen im Rahmen der fortschreitenden Axiomatisierung der Mathematik im 20. Jahrhundert im Kontext der Mengenlehre gut erforscht sind, weiß man über die surrealen Zahlen noch vergleichsweise wenig.

Dies mag damit zusammenhängen, dass es wenig Veröffentlichungen über surreale Zahlen gibt; eine kurze Suche ergab, dass das Journal der Royal Society ebenso wie **Spektrum der Wissenschaft** noch nie über surreale Zahlen berichtete.

Erstaunlich erscheint vor allem, dass es auch bei arXiv nur ein einziges Papier über surreale Zahlen gibt. arXiv ist ein Archiv für digitale Artikel aus den Bereichen Physik, Mathematik, Informatik und Biologie, bei dem Artikel nicht einem Peer-Review unterzogen werden und es daher den Ruf hat, auch Herberge von Papieren zu sein, die dem akzeptierten Konsenz widersprechen.

Auch gibt es Diskussionen über die Formalisierung des Konzepts der surrealen Zahlen. Conway scheint nämlich oft so aufgefasst zu werden [[SDisk]], dass eine Einbettung der surrealen Zahlen in den Formalismus der Mengenlehre unnötig sei, ähnlich, wie es bei den natürlichen Zahlen nicht notwendig sei, 0 und S zu konkretisieren. Diese Meinung scheinen viele nicht positiv aufzunehmen.

Interesse erwecken die surrealen Zahlen eher in populärwissenschaftlichen Magazinen (wie beispielsweise [[SDiscover]]), wohl wegen der Existenz transfiniter und infinitesimaler surrealer Zahlen.

Mit der kürzlich geglückten Definition der Integration auf den surrealen Zahlen darf man aber gespannt sein, was die Zukunft in dieser Richtung bringt. Auch eine Ausarbeitung der surkomplexen Zahlen – die Übertragung der komplexen Zahlen in die surrealen Zahlen [[SSurcomplex]] – wäre spannend; zur Zeit gibt es bei Google nur knapp 500 Suchergebnisse für „surcomplex“. Über die Anwendung der surrealen Zahlen zur Diskussion reeller Funktionen

Im Rahmen der Theorie der konventionellen Zahlenbereiche wäre interessant, Gründe für die mehrmals bemerkten Symmetrien zwischen den Operator- und Relationsdefinitionen der konventionellen Zahlenbereiche zu finden.

Literatur

[1] *1. Übungsblatt – Lösungsvorschlag, Mafl 1 – WS 2005/06*, Jürgen Gärtner, Technische Universität Berlin, 2005, abgerufen am 21.1.2007, `http://www.math.tu-berlin.de/~mafi1/aufgaben/uebungsblatt01_loesung.pdf`

[2] *Vollständige Induktion*, Dietmar Henke, 2006, abgerufen am 21.1.2007, `http://www.henked.de/begriffe/induktion.htm`

[3] *Maria-Theresia-Gymnasium München, Grundwissen Mathematik, 6. Klasse* [G8], Bernhard Horn, 2006, abgerufen am 23.1.2007, `http://www.mtg.musin.de/download/faecher/mathe/grundwissen/GW_Mathe-6-G8.pdf`

[4] *Giuseppe Peano*, Hubert Kennedy, Peremptory Publications, 2002, abgerufen am 22.1.2007, `http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Giuseppe_Peano&oldid=26494819`

[5] *Surreal Numbers: How Two Ex-Students Turned on to Pure Mathematics and Found Total Happiness*, Donald E. Knuth, 2006, ISBN 0-201-03812-9

[6] *Anschauungsmaterialien im Mathematikunterricht mit blinden und sehbehinderten Kindern*, Matthias Kosin, Humboldt-Universität zu Berlin, 2005, abgerufen am 21.1.2007, `http://www.reha.hu-berlin.de/blind/sonstiges/Mathematik.doc`

[7] *Grundmodelle zur Einführung der Multiplikation*, Melanie Reisenhofer, Universität Bayreuth, 1998, abgerufen am 21.1.2007, `http://did.mat.uni-bayreuth.de/~heike/Grundschule/Mathe/Arithmetik/Grundrechen/mult1.html`

[8] *Constructivism Is Difficult*, Eric Schechter, Vanderbilt University, 2001, abgerufen am 23.1.2007, `http://www.math.vanderbilt.edu/~schectex/papers/difficult.pdf`

[9] *Infinity Plus One, and Other Surreal Numbers*, Polly Shulman, DISCOVER Vol. 16 No. 12, 1995, abgerufen am 21.1.2007, `http://www.discover.com/issues/dec-95/features/infinityplusonea599/`

[10] *Aus Fehlern lernen und verwandte Themen*, Christian Strecker, Universität Bayreuth, 1999, abgerufen am 23.1.2007, `http://blk.mat.uni-bayreuth.de/material/db/33/fehler.pdf`

[11] *Surreal Numbers – An Introduction*, Claus Tøndering, 2005, abgerufen am 21.1.2007, http://www.tondering.dk/claus/surreal.html

[12] *Äquivalenzrelation*, Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, 2006, abgerufen am 21.1.2007, http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=%C3%84quivalenzrelation&oldid=25025717

[13] *Konstruktive Mathematik*, Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, 2007, abgerufen am 23.1.2007, http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Konstruktive_Mathematik&oldid=26583122

[14] *Natürliche Zahl*, Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, 2007, abgerufen am 21.1.2007, http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Nat%C3%BCrliche_Zahl&oldid=26584030

[15] *Rechenschieber*, Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, 2007, abgerufen am 21.1.2007, http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Rechenschieber&oldid=26415760

[16] *Richard Dedekind*, Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, 2007, abgerufen am 22.1.2007, http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Richard_Dedekind&oldid=26416653

[17] *Surreale Zahl*, Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, 2007, abgerufen am 21.1.2007, http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Surreale_Zahl&oldid=25269202

[18] *Surcomplex number*, Wikipedia, The Free Encyclopedia, 2006, abgerufen am 23.1.2007, http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Surcomplex_number&oldid=43724216

[19] *Surreal number*, Wikipedia, The Free Encyclopedia, 2007, abgerufen am 21.1.2007, http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Surreal_number&oldid=88169078

[20] *Hilbert's Program Then and Now*, Richard Zach, 2005, arXiv:math.LO/0508572 v1, abgerufen am 22.1.2007, http://arxiv.org/abs/math.LO/0508572,

[21] *FOM: Conway's foundational ideas*, Diskussion auf einer Mailingliste, 1999, abgerufen am 21.1.2007, http://www.cs.nyu.edu/pipermail/fom/1999-May/003152.html

[22] *Surreal Numbers*, unbekannter Autor, abgerufen am 21.1.2007, http://www.uwec.edu/andersrn/SETSXI.pdf

1.3.8 Erklärung zur Facharbeit

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet habe.

Insbesondere versichere ich, dass ich alle wörtlichen und sinngemäßen Übernahmen aus anderen Werken als solche kenntlich gemacht habe.

Augsburg, den 27.12.2006
29.12.2006
30.12.2006
31.12.2006
03.01.2007
03.01.2007
04.01.2007
05.01.2007
06.01.2007
07.01.2007
13.01.2007
14.01.2007
15.01.2007
16.01.2007
17.01.2007
18.01.2007
19.01.2007
20.01.2007
21.01.2007
22.01.2007
23.01.2007