22.03.2006

0.1 Determinanten

0.1.1 3x3-Determinanten

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \underbrace{+}_{(-1)^{1+1}} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \underbrace{-}_{(-1)^{2+1}} a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \underbrace{+}_{(-1)^{3+1}} a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix};$$

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & = & b_1; \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & = & b_2; \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & = & b_3; \end{array}$$

[Dieses Gleichungssystem] hat genau eine Lösung. $\Leftrightarrow$

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0;$ (Regel von Cramer)

Speziell: $b_1 = b_2 = b_3 = 0;$

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0; \Leftrightarrow$ [das System] hat nur die Lösung $(0, 0, 0)$.

Folgerung: $\vec{a} = \left(\begin{smallmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{smallmatrix}\right)$, $\vec{b} = \left(\begin{smallmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{smallmatrix}\right)$, $\vec{c} = \left(\begin{smallmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{smallmatrix}\right)$ sind komplanar. $\Leftrightarrow$

$\lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b} + \lambda_3\vec{c} = 0; \quad \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \neq 0; \Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0;$$

Anwendung[en]

- [Umrechnung der] Parameterform [einer] Ebene [in die] Koordinatenform

  [E: $\vec{X} = \vec{A} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$;

  $\left(\begin{smallmatrix} x_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 \\ x_3 - a_3 \end{smallmatrix}\right)$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ sind komplanar.

  $\begin{vmatrix} x_1 - a_1 & u_1 & v_1 \\ x_2 - a_2 & u_2 & v_2 \\ x_3 - a_3 & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0$ ist dann die Koordinatenform.]

- [Umrechnung der] Koordinatenform [einer] Ebene [in die] Parameterform

  a) $x_2 = \lambda; \quad x_3 = \mu;$
  $x_1 =$ [Auflösung der Koordinatenform nach x_1];
  $\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \cdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \cdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$

  b) Bestimme $A, B, C \in E$, die nicht auf einer Geraden liegen.