13.03.2006

0.1 Ebenen

Echt parallele Geraden mit Aufpunkt auf g bestimmen eine Ebene E.

$E = \left\{ X \middle| \vec{X} = \vec{A}_l + k\vec{u} \text{ mit } k \in \mathbb{R} \wedge \vec{A}_l = \vec{B} + l\vec{v} \text{ mit } l \in \mathbb{R} \wedge \{\vec{u}, \vec{v}\} \text{ nicht kollinear} \right\};$

Kürzer:

$E\colon \vec{X} = \vec{B} + k\vec{u} + l\vec{v}; \quad k, l \in \mathbb{R};$ 15.03.2006

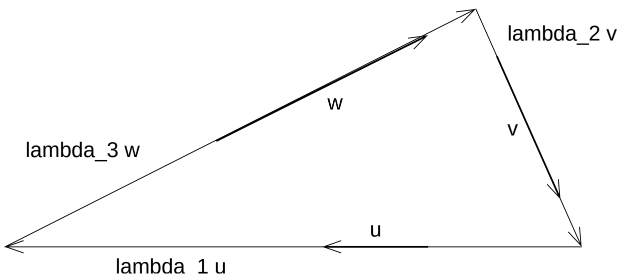
0.1.1 Möglichkeiten der gegenseitigen Lage von Gerade und Ebene

$E\colon \vec{X} = \vec{P} + k\vec{u} + l\vec{v};$

$g\colon \vec{X} = \vec{Q} + r\vec{w};$

- g und E sind parallel. $\Leftrightarrow$

  Es gibt Repräsentanten der Richtungsvektoren, die in einer [gemeinsamen] Ebene liegen.

  $\lambda_1\vec{u} + \lambda_2\vec{v} + \lambda_3\vec{w} = \vec{0};$

  Dabei sind nicht alle λ_i, $i = 1, 2, 3$ zugleich Null. ($\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \neq 0;$)

  [D.h.] $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sind komplanar.

- [$g \subset E \Leftrightarrow$ die Richtungsvektoren sind komplanar und Aufpunkt $\in E$]

- $\vec{P} + k\vec{u} + l\vec{v} = \vec{Q} + r\vec{w};$

- E und g echt parallel $\Leftrightarrow$ die Gleichung hat keine Lösung;
- $g \subset E \Leftrightarrow$ die Gleichung hat unendlich viele Lösungen („die Punkte von g")
- g und E schneiden sich in einem Punkt $\Leftrightarrow$ die Gleichung hat genau eine Lösung;]

29.03.2006

0.1.2 Möglichkeiten der gegenseitigen Lage zweier Ebenen

- Beide Ebenen sind in vektorieller Parameterform gegeben.

  $E\colon \vec{X} = \vec{A} + k\vec{u} + l\vec{v}; \quad k, l \in \mathbb{R}; \quad F\colon \vec{X} = \vec{B} + m\vec{w} + n\vec{z}; \quad m, n \in \mathbb{R};$

  - E und F sind parallel. $\Leftrightarrow$
    $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{z}$ sind komplanar. $\Leftrightarrow$
    $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ und $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{z}$ sind komplanar.
  - E und F ist echt parallel. $\Leftrightarrow$
    $E \parallel F$ und $\left[(A \notin F) \vee (B \notin E) \vee \left(\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v} \text{ nicht komplanar}\right)\right].$
  - E und F sind identisch. $\Leftrightarrow$
    $E \parallel F$ und $\left[(A \in F) \vee (B \in E) \vee \left(\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v} \text{ komplanar}\right)\right]. \Leftrightarrow$
    $\vec{A} + k\vec{u} + l\vec{v} = \vec{B} + m\vec{w} + n\vec{z};$ hat eine Lösungsmenge mit zwei frei wählbaren Lösungsvariablen (Ebenengleichung).
  - E und F schneiden sich in einer Geraden. $\Leftrightarrow E \nparallel F;$

- [BTW]

  - $E \cap F = \varnothing$: Beim Versuch, die Lösung zu finden, tritt ein Widerspruch auf.
  - $E \cap F =$ Gerade g: Lösungsmenge mit einer frei wählbaren Variable.
  - $E \cap F = E = F$: [Lösungsmenge mit zwei frei wählbaren Variablen.]

- Eine Ebene ist in Parameter-, eine in Koordinatenform gegeben.

  $E\colon ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0; \quad F\colon [\vec{X} = \vec{B} + m\vec{w} + n\vec{z}; \quad m, n \in \mathbb{R};]$ 31.03.2006

  Einsetzen von x_1, x_2, x_3 aus der Gleichung von F in die Gleichung von E ergibt eine Gleichung $(*)$ für m und n.

- E und F [sind] identisch. $\Leftrightarrow$ m und n sind frei wählbar bezüglich $(*)$.
- E und F sind echt parallel. $\Leftrightarrow$ $(*)$ ist nicht lösbar.
- E und F schneiden sich [in einer Gerade]. $\Leftrightarrow$ Die Lösungsmenge hat eine frei wählbare Variable; $m = m(n); n = n(m)$ [XXX IMHO ist diese Notation mathematisch unsinnig – m bzw. n können nicht eine Funktion (von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$) und eine reelle Zahl zugleich sein.]

03.04.2006

- [Beide Ebenen sind in Koordinatenform gegeben.]

$$\left.\begin{array}{l} E\colon ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0; \\ F\colon \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta = 0; \end{array}\right\} \text{Gleichungssystem für } x_1, x_2, x_3$$

  - [E und F sind identisch. $\Leftrightarrow$ Gleichung von E ist ein Vielfaches von der von F.]
  - [E und F sind echt parallel. $\Leftrightarrow$ Die Koeffizienten von E sind Vielfache von denen von F, aber $d \neq \delta$.]
  - [E und F schneiden sich in einer Geraden. $\Leftrightarrow$ Die Koeffizienten von E sind nicht Vielfache von denen von F.]

21.10.2006

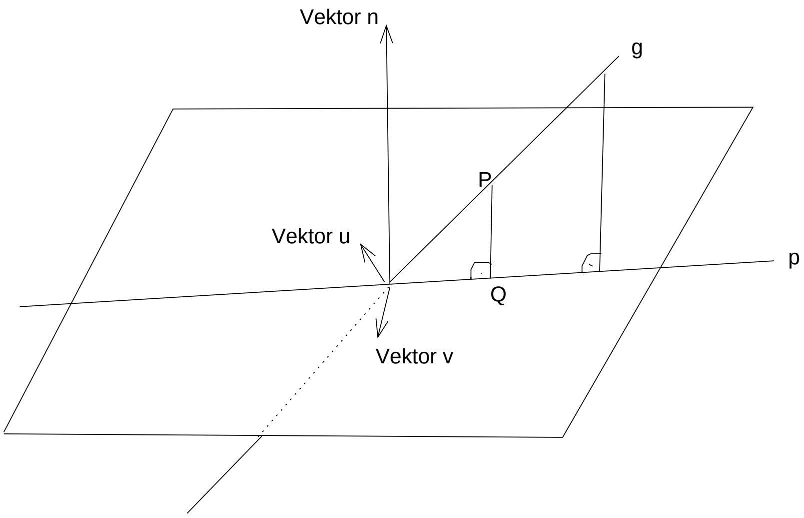
0.1.3 [Winkel zwischen Ebene und Gerade/Normal(en)form einer Ebene

$\angle(E, g) = \angle(p, g)$;

$\vec{u}$, $\vec{v}$: Richtungsvektoren von E

$\vec{n} \perp E$;

$\vec{n} \cdot \vec{u} = \vec{n} \cdot \vec{v} = 0$;]



$X \in E; \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{AX} = 0;$

$\vec{n} \cdot \left(\vec{X} - \vec{A}\right) = 0;$ (vektorielle Normalform einer Ebene)

$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right] = n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 \underbrace{- (n_1a_1 + n_2a_2 + n_3a_3)}_{n_0} = n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_0 = 0;$ (skalare Normalform/Koordinatenform einer Ebene)

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AX} > 0; \rightarrow \vec{X}$ liegt bezüglich $\vec{n}$ im oberen (positiven) Halbraum 06.12.2006

„na langsam wird halt doch sichtbar, dass die Mathematik eine Universalwissenschaft ist“ 09.12.2006

[Hesse-Normierungen]

– 1. Hesse-Normierung für Ursprung $\notin E$

Ursprung im unteren Halbraum, d.h. $\vec{n}\vec{A} > 0$.

Senkrechte Projektion von $\overrightarrow{AX}$ auf die Richtung von $\vec{n}$ ergibt den Abstand von X zur Ebene.

$d(X, E) = \left|\overrightarrow{AX}\right| \underbrace{\left|\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}\right|}_{1} \cdot \cos \underbrace{\angle\left(\vec{n}, \overrightarrow{AX}\right)}_{\measuredangle\left(\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}, \overrightarrow{AX}\right)} = \overrightarrow{AX} \cdot \vec{n}^0 = \vec{n}^0 \cdot \left(\vec{X} - \vec{A}\right) > 0$ für X im oberen Halbraum. 11.12.2006

$$d(X,E) = \left| \overbrace{\underbrace{\vec{n}_0}_{\text{HESSEvektor}} \cdot \overrightarrow{AX}}^{\text{HESSEterm (HT)}} \right|;$$

– 2. Hesse-Normierung

Der Normalenvektor soll die Länge 1 haben.

$HT(X) = 0; \Leftrightarrow X \in E;$

$HT(X) < 0; \Leftrightarrow X$ und Ursprung liegen im gleichen Halbraum

HESSEnormalform einer Ebene (HNF)

$HT(X) = \vec{n}_0 \cdot \left(\vec{X} - \vec{A}\right) = \vec{n}_0\vec{X} - \vec{n}_0\vec{A} = 0$ mit $|\vec{n}_0| = 1$ und $\vec{n}_0 \cdot \vec{A} > 0;$

– Umschreiben der Normalform in die HESSEnormalform

[Normalform:] $\vec{n}\vec{X} - \vec{n}\vec{A} = 0;$

[HESSEnormalform:] $\dfrac{\vec{n}\vec{X} - \vec{n}\vec{A}}{|\vec{n}| \cdot \operatorname{sgn} \vec{n}\vec{A}} = 0;$