Geometrie

Ingo Blechschmidt

4. März 2007

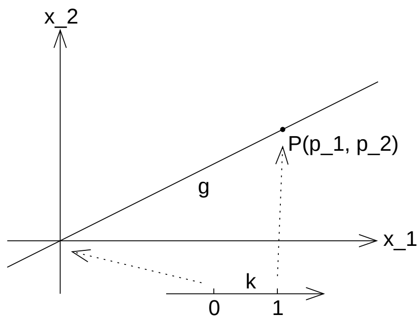
Inhaltsverzeichnis

07.02.2006

1 Geometrie

1.1 Geraden

1.1.1 Ursprungsgeraden in der x_1–x_2-Ebene



Liegt $Q(q_1, q_2)$ auf g?

$Q(q_1, q_2) \in g \Leftrightarrow$ Es gibt eine Zahl $k \in \mathbb{R}$, so dass gilt:

$q_1 = kp_1 \wedge q_2 = kp_2;$

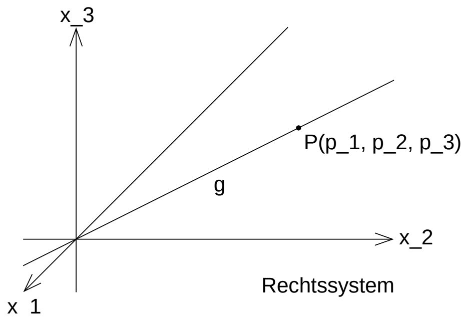
Anders geschrieben:

$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix};$

Darstellung von g:

$g = \left\{ Q(q_1, q_2) \middle| \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \text{ mit } k \in \mathbb{R} \right\};$ 08.02.2006

1.1.2 Ursprungsgeraden im Raum



$$g = \left\{ Q(q_1, q_2, q_3) \middle| \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \text{ mit } k \in \mathbb{R} \wedge p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 \neq 0 \right\};$$ 11.02.2006

1.1.3 Beliebige Geraden in der x_1–x_2-Ebene

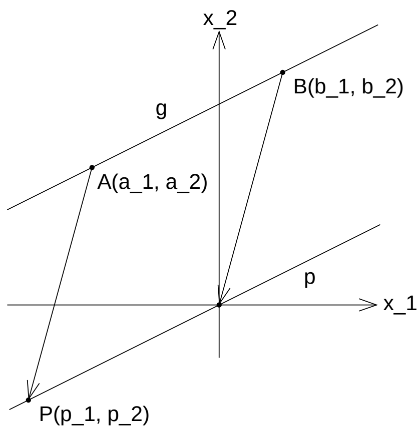


Abbildung:

$g \to p$

$B \mapsto 0$
$A \mapsto P$

Welche Koordinaten hat P?

$p_1 = a_1 - b_1;$
$p_2 = a_2 - b_2;$ 20.02.2006

$$p = \left\{ Q(q_1, q_2) \middle| \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix} \text{ mit } k \in \mathbb{R} \right\};$$

$$g = \left\{ R(r_1, r_2) \middle| \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix} \text{ mit } k \in \mathbb{R} \right\};$$

[Verschiedene Sichten: Die Sicht vor dem letzten Gleichheitszeichen stellt man sich durch eine Verschiebung jedes Punkten der Ursprungsgeraden vor. Das Ergebnis der Verschiebung ist dann die resultierende Gerade. Die Sicht nach dem letzten Gleichheitszeichen ist die bevorzugte Sicht. Bei ihr stellt man sich vor, dass man vom Ursprung ausgehend zum Aufpunkt (B) geht und dann von dort aus jeweils das k-fache des Richtungsvektors $\binom{a_1-b_1}{a_2-b_2}$ aufträgt.]

Ein Zahlenpaar $\binom{e}{f}$ kann durch Pfeile veranschaulicht werden, deren x_1-Koordinate e und deren x_2-Koordinate f ist.

Diese Pfeile sind alle parallel, gleich gerichtet und gleich lang zum Pfeil $\overrightarrow{0W}$ mit $W(e, f)$. 21.02.2006

(Diese Eigenschaft nennt man Parallelgleichheit.)

Die Menge aller parallelgleichen Pfeile heißt Pfeilvektor. Jedes Element, d.h. jeder Pfeil, dieser Menge heißt Repräsentant dieser Menge.

Bezeichnungen: $\vec{a} = \overrightarrow{PQ} = \binom{2}{-3} = \binom{q_1-p_1}{q_2-p_2} \equiv \binom{q_1}{q_2} - \binom{p_1}{p_2} = \overrightarrow{0Q} - \overrightarrow{0P} \equiv \vec{Q} - \vec{P}$

$$PQ = \left\{ X(x_1, x_2) \middle| \binom{x_1}{x_2} = \vec{P} + k\overrightarrow{PQ} \text{ mit } k \in \mathbb{R} \right\};$$

Kürzer: $PQ\colon \vec{X} = \vec{P} + k\overrightarrow{PQ}; \quad (k \in \mathbb{R})$ 22.02.2006

1.1.4 Möglichkeiten der gegenseitigen Lage zweier Geraden g und h in der Ebene

$g\colon \vec{X} = \vec{A} + k\vec{u}; \quad k \in \mathbb{R};$
$h\colon \vec{X} = \vec{B} + l\vec{v}; \quad l \in \mathbb{R};$

- g und h schneiden sich (in einem Punkt).

  $\Leftrightarrow$ Es gibt kein $r \in \mathbb{R}$, so dass $\vec{u} = r\vec{v}$, d.h. $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind keine Vielfache voneinander. ($\vec{u}$ und $\vec{v}$ heißen dann nicht kollinear, d.h. die Repräsentanten von $\vec{u}$ sind nicht parallel zu den Repräsentanten von $\vec{v}$.)

  Bestimmung des Schnittspunkts: Der Schnittpunkt erfüllt sowohl die Gleichung von g (für ein bestimmtes k) als auch die Gleichung von h (für ein bestimmtes l).

  $$\left.\begin{array}{l}\vec{S} = \vec{A} + k_S\vec{u};\\ \vec{S} = \vec{B} + l_S\vec{v};\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{A} + k_S\vec{u} = \vec{B} + l_s\vec{v};$$

- g und h sind parallel [$\Leftrightarrow$ die Richtungsvektoren sind kollinear].

  - g und h sind identisch [$\Leftrightarrow$ der Verbindungsvektor ist kollinear zu den Richtungsvektoren].
  - g und h sind echt parallel [$\Leftrightarrow$ der Verbindungsvektor ist nicht kollinear zu den Richtungsvektoren].

07.03.2006

1.1.5 Beliebige Geraden im Raum

g: $\vec{X} = \vec{A} + k\overrightarrow{AB}; \quad k \in \mathbb{R};$

1.1.6 Möglichkeiten der gegenseitigen Lage zweier Geraden g und h im Raum

g: $\vec{X} = \vec{A} + k\vec{u}; \quad k \in \mathbb{R};$
h: $\vec{X} = \vec{B} + l\vec{v}; \quad l \in \mathbb{R};$

- g und h sind parallel. $\Leftrightarrow$ $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind kollinear.

  Wenn g und h parallel sind, gilt:

  $A \in h \Leftrightarrow g$ und h identisch $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ und $\vec{u}$ [oder $\vec{v}$] kollinear

- (Wenn g und h nicht parallel sind, gilt:)

  g und h schneiden sich $\Leftrightarrow$ die Gleichung $\vec{A} + k\vec{u} = \vec{B} + l\vec{v}$ hat für k und l genau eine Lösung, d.h. es gibt genau einen Wert für k und genau einen Wert für l, sodass die Gleichung erfüllt ist.

1.1.7 Vorgehen bei einem System aus drei Gleichungen für zwei Lösungsvariablen

1. Eine Gleichung wird nach einer Lösungsvariablen aufgelöst.
2. Der erhaltene Term wird in eine weitere Gleichung eingesetzt.
3. Man versucht, für die zweite Lösungsvariante einen Term zu bestimmen. [Falls das nicht gelingt, hat das Gleichungssystem keine Lösung.]
4. Falls für beide Lösungsvariablen Terme gefunden wurden, muss überprüft werden, ob auch die restliche Gleichung damit erfüllt ist.

07.04.2006

1.1.8 Teilverhältnis

```
--------+-----+-----+--------
        A     T1    B
```

[T_1 Mittelpunkt von $[AB]$]

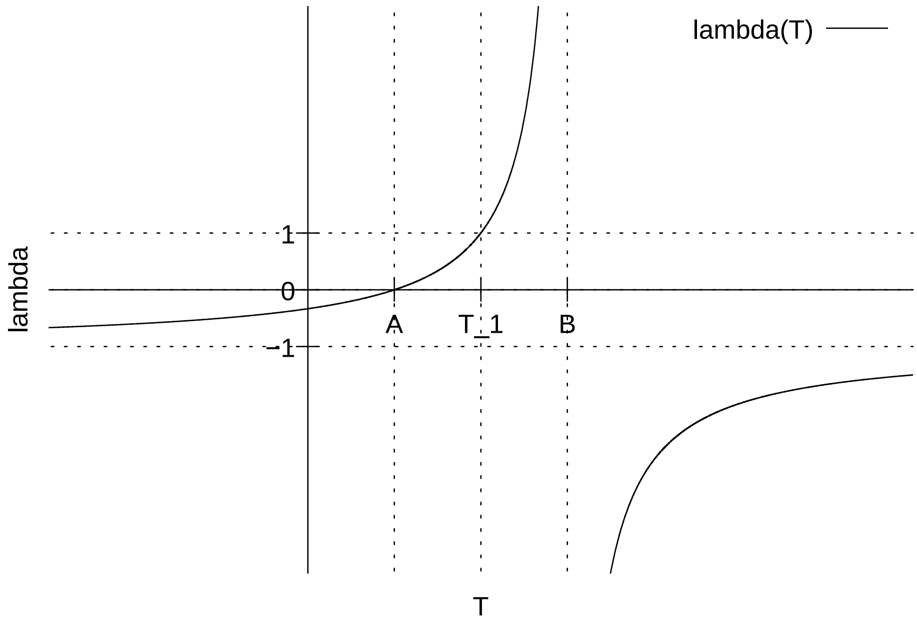
$\overrightarrow{AT} = \lambda\overrightarrow{TB}$;

- $T \in AB \setminus [AB\colon \lambda \in \left]-1, 0\right[$;
- $T = A$: $\lambda = 0$;
- $T \in [AT_1] \setminus \{A, T_1\}$: $\lambda \in \left]0, 1\right[$;
- $T = T_1$: $\lambda = 1$;
- $T \in [T_1B] \setminus \{T_1, B\}$: $\lambda \in \left]1, \infty\right[$;
- [$T = B$: λ undefiniert]
- [$T \in AB \setminus AB$]: $\lambda \in \left]-\infty, -1\right[$;]

$\lambda = \lambda(T)$;

$\lambda(0) = 0$;

$\lambda = \frac{T-A}{B-T} = \frac{T}{B-T}$;



25.04.2006

Festlegung: A, B, T liegen auf einer Geraden. T teilt $[AB]$ im Verhältnis λ. $\Leftrightarrow \overrightarrow{AT} = \lambda \overrightarrow{TB}$; 10.10.2006

1.1.9 Abstand einer Geraden zu einem Punkt

$\overrightarrow{PS} \cdot \vec{u} = 0;$

$\left(\underbrace{\vec{A} + k_S \vec{u}}_{\vec{s}} - \vec{P} \right) \cdot \vec{u} = 0;$ (Gleichung für k_s)

1.1.10 Abstand zweier Geraden

$g\colon \vec{X} = \vec{A} + k\vec{u}; \quad k \in \mathbb{R};$

$h\colon \vec{X} = \vec{B} + l\vec{v}; \quad l \in \mathbb{R};$

$d(g,h) = \left| \overrightarrow{PQ} \right|$ mit $P \in g$ und $Q \in h$ und $[PQ] \perp g$ und $[PQ] \perp h$.

$\vec{P} = \vec{A} + k_P \vec{u}; \quad \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{u} = 0;$

$\vec{Q} = \vec{B} + l_Q \vec{v}; \quad \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v} = 0;$

$\left(\vec{B} + l_Q \vec{v} - \vec{A} - k_P \vec{u} \right) \cdot \vec{u} = 0;$

$\left(\vec{B} + l_Q \vec{v} - \vec{A} - k_P \vec{u} \right) \cdot \vec{v} = 0;$ 13.03.2006

1.2 Ebenen

Echt parallele Geraden mit Aufpunkt auf g bestimmen eine Ebene E.

$E = \left\{ X \middle| \vec{X} = \vec{A}_l + k\vec{u} \text{ mit } k \in \mathbb{R} \wedge \vec{A}_l = \vec{B} + l\vec{v} \text{ mit } l \in \mathbb{R} \wedge \{\vec{u}, \vec{v}\} \text{ nicht kollinear} \right\};$

Kürzer:

$E\colon \vec{X} = \vec{B} + k\vec{u} + l\vec{v}; \quad k, l \in \mathbb{R};$ 15.03.2006

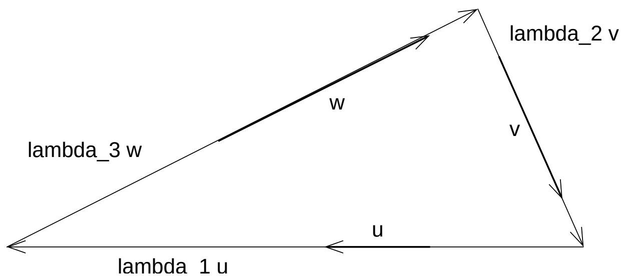
1.2.1 Möglichkeiten der gegenseitigen Lage von Gerade und Ebene

$E\colon \vec{X} = \vec{P} + k\vec{u} + l\vec{v};$

$g\colon \vec{X} = \vec{Q} + r\vec{w};$

- g und E sind parallel. $\Leftrightarrow$

  Es gibt Repräsentanten der Richtungsvektoren, die in einer [gemeinsamen] Ebene liegen.

  $\lambda_1\vec{u} + \lambda_2\vec{v} + \lambda_3\vec{w} = \vec{0};$

  Dabei sind nicht alle λ_i, $i = 1, 2, 3$ zugleich Null. ($\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \neq 0$;)

  [D.h.] $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sind komplanar.

- [$g \subset E \Leftrightarrow$ die Richtungsvektoren sind komplanar und Aufpunkt $\in E$]

- $\vec{P} + k\vec{u} + l\vec{v} = \vec{Q} + r\vec{w};$

  - E und g echt parallel $\Leftrightarrow$ die Gleichung hat keine Lösung;

- $g \subset E \Leftrightarrow$ die Gleichung hat unendlich viele Lösungen („die Punkte von g“)
- g und E schneiden sich in einem Punkt $\Leftrightarrow$ die Gleichung hat genau eine Lösung;]

29.03.2006

1.2.2 Möglichkeiten der gegenseitigen Lage zweier Ebenen

- Beide Ebenen sind in vektorieller Parameterform gegeben.

  $E\colon \vec{X} = \vec{A} + k\vec{u} + l\vec{v}; \quad k, l \in \mathbb{R}; \quad F\colon \vec{X} = \vec{B} + m\vec{w} + n\vec{z}; \quad m, n \in \mathbb{R};$

  - E und F sind parallel. $\Leftrightarrow$
    $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{z}$ sind komplanar. $\Leftrightarrow$
    $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ und $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{z}$ sind komplanar.
  - E und F ist echt parallel. $\Leftrightarrow$
    $E \parallel F$ und $\left[(A \notin F) \vee (B \notin E) \vee \left(\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v} \text{ nicht komplanar}\right)\right]$.
  - E und F sind identisch. $\Leftrightarrow$
    $E \parallel F$ und $\left[(A \in F) \vee (B \in E) \vee \left(\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v} \text{ komplanar}\right)\right]$. $\Leftrightarrow$
    $\vec{A} + k\vec{u} + l\vec{v} = \vec{B} + m\vec{w} + n\vec{z}$; hat eine Lösungsmenge mit zwei frei wählbaren Lösungsvariablen (Ebenengleichung).
  - E und F schneiden sich in einer Geraden. $\Leftrightarrow E \nparallel F$;

- [BTW]

  - $E \cap F = \emptyset$: Beim Versuch, die Lösung zu finden, tritt ein Widerspruch auf.
  - $E \cap F =$ Gerade g: Lösungsmenge mit einer frei wählbaren Variable.
  - $E \cap F = E = F$: [Lösungsmenge mit zwei frei wählbaren Variablen.]

- Eine Ebene ist in Parameter-, eine in Koordinatenform gegeben.

  $E\colon ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0; \quad F\colon [\vec{X} = \vec{B} + m\vec{w} + n\vec{z}; \quad m, n \in \mathbb{R};]$ 31.03.2006

  Einsetzen von x_1, x_2, x_3 aus der Gleichung von F in die Gleichung von E ergibt eine Gleichung ($*$) für m und n.

- E und F [sind] identisch. $\Leftrightarrow$ m und n sind frei wählbar bezüglich ($*$).
- E und F sind echt parallel. $\Leftrightarrow$ ($*$) ist nicht lösbar.
- E und F schneiden sich [in einer Gerade]. $\Leftrightarrow$ Die Lösungsmenge hat eine frei wählbare Variable; $m = m(n); n = n(m)$ [XXX IMHO ist diese Notation mathematisch unsinnig – m bzw. n können nicht eine Funktion (von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$) und eine reelle Zahl zugleich sein.]

03.04.2006

- [Beide Ebenen sind in Koordinatenform gegeben.]

$$\left.\begin{array}{l} E\colon ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0; \\ F\colon \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta = 0; \end{array}\right\} \text{Gleichungssystem für } x_1, x_2, x_3$$

  - [E und F sind identisch. $\Leftrightarrow$ Gleichung von E ist ein Vielfaches von der von F.]
  - [E und F sind echt parallel. $\Leftrightarrow$ Die Koeffizienten von E sind Vielfache von denen von F, aber $d \neq \delta$.]
  - [E und F schneiden sich in einer Geraden. $\Leftrightarrow$ Die Koeffizienten von E sind nicht Vielfache von denen von F.]

21.10.2006

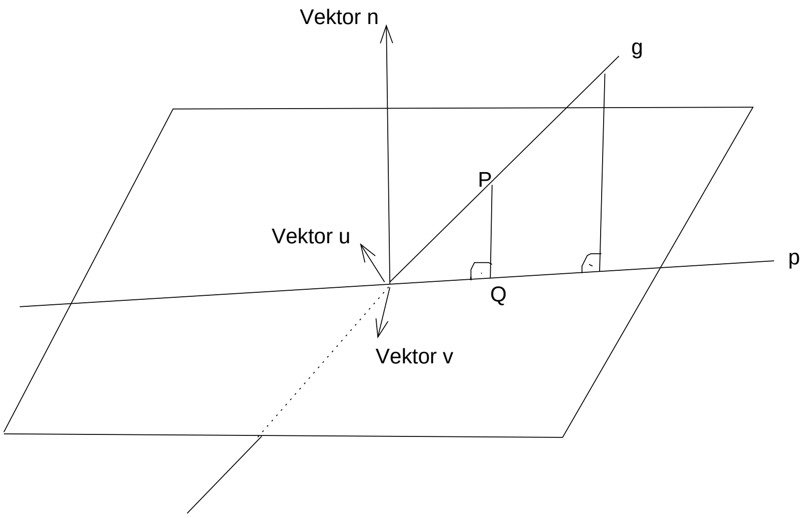
1.2.3 [Winkel zwischen Ebene und Gerade/Normal(en)form einer Ebene

$\angle(E, g) = \angle(p, g)$;

$\vec{u}$, $\vec{v}$: Richtungsvektoren von E

$\vec{n} \perp E$;

$\vec{n} \cdot \vec{u} = \vec{n} \cdot \vec{v} = 0$;]



$X \in E; \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{AX} = 0;$

$\vec{n} \cdot \left(\vec{X} - \vec{A}\right) = 0;$ (vektorielle Normalform einer Ebene)

$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right] = n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 \underbrace{- (n_1a_1 + n_2a_2 + n_3a_3)}_{n_0} = n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_0 = 0;$ (skalare Normalform/Koordinatenform einer Ebene)

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AX} > 0; \rightarrow \vec{X}$ liegt bezüglich $\vec{n}$ im oberen (positiven) Halbraum 06.12.2006

„na langsam wird halt doch sichtbar, dass die Mathematik eine Universalwissenschaft ist“ 09.12.2006

[Hesse-Normierungen]

– 1. Hesse-Normierung für Ursprung $\notin E$

Ursprung im unteren Halbraum, d.h. $\vec{n}\vec{A} > 0$.

Senkrechte Projektion von $\overrightarrow{AX}$ auf die Richtung von $\vec{n}$ ergibt den Abstand von X zur Ebene.

$d(X, E) = \left|\overrightarrow{AX}\right| \underbrace{\left|\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}\right|}_{1} \cdot \cos \underbrace{\angle\left(\vec{n}, \overrightarrow{AX}\right)}_{\measuredangle\left(\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}, \overrightarrow{AX}\right)} = \overrightarrow{AX} \cdot \vec{n}^0 = \vec{n}^0 \cdot \left(\vec{X} - \vec{A}\right) > 0$ für X im oberen Halbraum. 11.12.2006

$$d(X,E) = \left| \overbrace{\underbrace{\vec{n}_0}_{\text{HESSEvektor}} \cdot \overrightarrow{AX}}^{\text{HESSEterm (HT)}} \right|;$$

– 2. Hesse-Normierung

Der Normalenvektor soll die Länge 1 haben.

$HT(X) = 0; \Leftrightarrow X \in E;$

$HT(X) < 0; \Leftrightarrow X$ und Ursprung liegen im gleichen Halbraum

HESSEnormalform einer Ebene (HNF)

$HT(X) = \vec{n}_0 \cdot \left(\vec{X} - \vec{A}\right) = \vec{n}_0\vec{X} - \vec{n}_0\vec{A} = 0$ mit $|\vec{n}_0| = 1$ und $\vec{n}_0 \cdot \vec{A} > 0;$

– Umschreiben der Normalform in die HESSEnormalform

[Normalform:] $\vec{n}\vec{X} - \vec{n}\vec{A} = 0;$

[HESSEnormalform:] $\dfrac{\vec{n}\vec{X} - \vec{n}\vec{A}}{|\vec{n}| \cdot \operatorname{sgn} \vec{n}\vec{A}} = 0;$ 20.03.2006

1.3 Der Gauß-Algorithmus

$$\begin{array}{rrr|l} 10 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 3 & 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|l} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 10 & 1 & -2 & 2 \\ 4 & 4 & 3 & 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|l} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -19 & -22 & -28 \\ 4 & 4 & 3 & 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|l} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -19 & -22 & -28 \\ 0 & -4 & -5 & -7 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|l} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -5 & -7 \\ 0 & -19 & -22 & -28 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|l} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{5}{4} & \frac{7}{4} \\ 0 & -19 & -22 & -28 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|l} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{5}{4} & \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & \frac{7}{4} & \frac{21}{4} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|l} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{5}{4} & \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}$$

$x_1 = 3 - 2x_2 - 2x_3 = 1;$

$x_2 = \frac{7}{4} - \frac{5}{4}x_3 = -2;$

$x_3 = 3;$ 22.03.2006

1.4 Determinanten

1.4.1 3x3-Determinanten

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \underbrace{+}_{(-1)^{1+1}} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \underbrace{-}_{(-1)^{2+1}} a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \underbrace{+}_{(-1)^{3+1}} a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix};$$

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & = & b_1; \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & = & b_2; \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & = & b_3; \end{array}$$

[Dieses Gleichungssystem] hat genau eine Lösung. $\Leftrightarrow$

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0;$ (Regel von Cramer)

Speziell: $b_1 = b_2 = b_3 = 0;$

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0; \Leftrightarrow$ [das System] hat nur die Lösung $(0, 0, 0)$.

Folgerung: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ sind komplanar. $\Leftrightarrow$

$\lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b} + \lambda_3\vec{c} = 0; \quad \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \neq 0; \Leftrightarrow$

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0;$

Anwendung[en]

- [Umrechnung der] Parameterform [einer] Ebene [in die] Koordinatenform

  [E: $\vec{X} = \vec{A} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$;

  $\begin{pmatrix} x_1-a_1 \\ x_2-a_2 \\ x_3-a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ sind komplanar.

  $\begin{vmatrix} x_1 - a_1 & u_1 & v_1 \\ x_2 - a_2 & u_2 & v_2 \\ x_3 - a_3 & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0$ ist dann die Koordinatenform.]

- [Umrechnung der] Koordinatenform [einer] Ebene [in die] Parameterform

a) $x_2 = \lambda; \quad x_3 = \mu;$
$x_1 =$ [Auflösung der Koordinatenform nach x_1];
$\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \cdot \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \cdot \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$

b) Bestimme $A, B, C \in E$, die nicht auf einer Geraden liegen.

02.05.2006

1.5 Vektoren

1.5.1 Lineare Abhängigkeit

Die Vektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_n$ ($n \in \mathbb{N}$) heißen linear unabhängig. $\Leftrightarrow$

Aus $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{a}_n = \vec{0}$;

folgt: $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$;

(D.h. mit $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ... $\vec{a}_n$ lässt sich nur die triviale Nullsumme bilden.)

[Speziell für] $n = 2$: $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ [ist] linear unabhängig. $\Leftrightarrow$ $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ nicht kollinear.

[Ist bereits ein Nullvektor in einer Menge, die man auf lineare Abhängigkeit überprüft, so ist die Menge linear abhängig. (Vgl. mit Multiplikation mit 0!)]

1.5.2 Basis eines Vektorraums [siehe B. S. 126]

$\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, ..., $\vec{b}_n$ sei Basis von V und $v \in V$.

Dann existiert ein eindeutiges n-Tupel $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ [die Koordinaten] mit:

$\vec{v} = v_1\vec{b}_1 + v_2\vec{b}_2 + \cdots v_n\vec{b}_n$; [wobei die $v_i\vec{b}_i$ Komponenten sind.]

[Beweis der Koordinateneindeutigkeit]

Annahme: Es existiert ein weiteres n-Tupel $(v_1', v_2', \ldots, v_n')$ mit dieser Eigenschaft.

$\vec{v} = v_1'\vec{b}_1 + v_2'\vec{b}_2 + \cdots v_n'\vec{b}_n$;

$\vec{0} = (v_1 - v_1')\,\vec{b}_1 + (v_2 - v_2')\,\vec{b}_2 + \cdots (v_n - v_n')\,\vec{b}_n$;

Aufgrund der linearen Unabhängigkeit von $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ folgt: $v_i - v_i' = 0$, also $v_i = v_i'$.

02.10.2006

1.5.3 Das Skalarprodukt

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \binom{a_1}{a_2} \cdot \binom{b_1}{b_2} := a_1 b_1 + a_2 b_2;$

Zwei Vektoren [die beide nicht der Nullvektor sind] stehen genau dann aufeinander senkrecht, wenn ihr Skalarprodukt 0 ist.

Wie lässt sich aus den Koordinaten zweier Vektoren der Winkel zwischen ihnen berechnen?

$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\varphi;$

$\left|\vec{a} - \vec{b}\right|^2 = |\vec{a}|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 - 2\,|\vec{a}| \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\varphi;$

$\left(\vec{a} - \vec{b}\right)^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\,|\vec{a}| \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\varphi;$

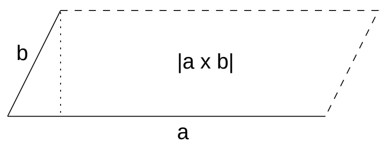
$\vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\,|\vec{a}| \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\varphi;$

$\frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|} = \cos\varphi;$ 10.11.2006

1.5.4 Vektorprodukt

- Definition: vgl. B. S. 238
- Was ist $\vec{a} \times \vec{b}$, wenn $\vec{a}$ und $\vec{b}$ kollinear sind?

  [Kollinearität zweier Vektoren, die beide nicht der Nullvektor sind $\Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$;]
- Geometrische Eigenschaften: vgl. B. S. 240

  $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \sin\angle(\vec{a}, \vec{b});$
- Rechenregeln:
  - $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a};$

– $\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$;

– $\lambda \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \lambda\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \lambda\vec{b}$;

- Spatvolumen: $\left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}\right| = \left|\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)\right|$;

  [Für $|\vec{n}| = 1$ gilt: $\vec{a} \cdot \vec{n} = |\vec{a}| \underbrace{|\vec{n}|}_{1} \cdot \cos\angle(\vec{a}, \vec{n}) = |\vec{a}| \cos\angle(\vec{a}, \vec{n}) = \vec{n}_{\vec{a}}$;]

16.10.2006

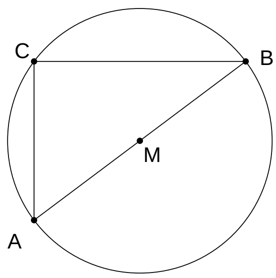
1.6 Kreise

1.6.1 Satz des Thales

„na du musst nur ´ne längere Zeit als Photon leben, dann wird´s dir schon klar werden. . . “

„glaub mir, ich spreche aus Erfahrung“

„Du setzt dich aufs Fahrrad, fährst so schnell, dass es dunkel wird, und schaust dann auf den Tacho“



Für ein Dreieck ABC sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:

(1)
Der Innenwinkel bei C ist $90°$.

(2)
C liegt auf dem Kreis über $[AB]$.

Beweis:

M sei der Mittelpunkt von $[AB]$.

$$\begin{aligned}
&& (1) & \quad \Leftrightarrow \\
\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} &= 0; & & \quad \Leftrightarrow \\
\left(\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MB}\right) &= 0; & & \quad \Leftrightarrow \\
\left(\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{MA}\right) &= 0; & & \quad \Leftrightarrow \\
\overrightarrow{CM}^2-\overrightarrow{MA}^2 &= 0; & & \quad \Leftrightarrow \\
\overrightarrow{CM}^2 &= \overrightarrow{MA}^2; & & \quad \Leftrightarrow \\
\left|\overrightarrow{CM}\right|^2 &= \left|\overrightarrow{MA}\right|^2; & & \quad \Leftrightarrow \\
\left|\overrightarrow{CM}\right| &= \left|\overrightarrow{MA}\right|; & & \quad \Leftrightarrow (2)
\end{aligned}$$