10.10.2006

0.1 102. Hausaufgabe

0.1.1 Geometrie-Buch Seite 215, Aufgabe 3c

Zeige, dass die Ortsvektoren $\vec{A}$, $\vec{B}$ und $\vec{C}$ einen Würfel aufspannen.

$\vec{A} = \begin{pmatrix} a \\ a+1 \\ a(a+1) \end{pmatrix}$; $\quad \vec{B} = \begin{pmatrix} a+1 \\ -a(a+1) \\ a \end{pmatrix}$; $\quad \vec{C} = \begin{pmatrix} a(a+1); \\ a \\ -a-1 \end{pmatrix}$;

$\left|\vec{A}\right| = \left|\vec{B}\right| = \left|\vec{C}\right| = \sqrt{a^2 + (a^2 + 2a + 1) + (a^3 + 2a^2 + a)} = \sqrt{a^3 + 4a^2 + 3a + 1};$

$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{C} = \vec{C} \cdot \vec{A} = a\left(a+1\right) - \left(a+1\right)^2 a + a^2\left(a+1\right) = a^2 + a - a^3 - 2a^2 - a + a^3 + a^2 = 0;$

0.1.2 Geometrie-Buch Seite 215, Aufgabe 4b

Für welche Werte von u ist $\vec{a} \perp \vec{b}$, $\vec{a} \perp \vec{b}$, $\vec{b} \perp \vec{c}$?

$\vec{a} = \begin{pmatrix} u+1 \\ 2-u \\ -1 \end{pmatrix}$; $\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} u \\ u+2 \\ u+4 \end{pmatrix}$; $\quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2-3u \\ u \\ 2+2u \end{pmatrix}$;

$\vec{a}\vec{b} = u^2 + u - (u^2 - 4) - u - 4 = 0;$

$\vec{b}\vec{c} = 2u - 3u^2 + u^2 + 2u + 2u + 2u^2 + 8 + 8u = 14u + 8 = 0; \Leftrightarrow u = -\frac{4}{7};$

$\vec{a}\vec{c} = 2u - 3u^2 + 2 - 3u + 2u - u^2 - 2 - 2u = -u - 4u^2 = 0; \Leftrightarrow u_1 = 0; \quad u_2 = -\frac{1}{4};$

0.1.3 Geometrie-Buch Seite 216, Aufgabe 10b

Berechne die Winkel des Dreiecks ABC.

$A(1, -6, -6); \quad B(2, 2, -2); \quad C(0, -2, 2);$

$\frac{\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \frac{-1+32+32}{\sqrt{1^2+4^2+8^2}\sqrt{1^2+8^2+4^2}} = \frac{63}{81} = \frac{7}{9} = \cos\alpha;$

$-\frac{\overrightarrow{BC}\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{BC}\right|\left|\overrightarrow{AB}\right|} = -\frac{-2-32}{\sqrt{(-2)^2+(-4)^2+0^2}\sqrt{1^2+8^2+4^2}} = \frac{34}{9\sqrt{20}} = \cos\beta;$

$\frac{\overrightarrow{AC}\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|\left|\overrightarrow{BC}\right|} = \frac{2-16}{\sqrt{1^2+4^2+8^2}\sqrt{(-2)^2+(-4)^2+0^2}} = \frac{-14}{9\sqrt{20}} = \cos\gamma;$

0.1.4 Geometrie-Buch Seite 217, Aufgabe 16a

$g\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad h\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix};$

Berechne den Schittwinkel von g und h.

$\left| \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right| \left|\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}\right|} \right| = \left| \frac{1-10+30}{\sqrt{14}\sqrt{126}} \right| = \cos\varphi;$