12.10.2006

0.1 103. Hausaufgabe

0.1.1 Geometrie-Buch Seite 231, Aufgabe 15a

Untersuche, ob g und h windschief sind, berechne gegebenenfalls den Abstand $d(g,h)$ und die Endpunkte der gemeinsamen Lotstrecke.

$g\colon \vec{X} = \begin{pmatrix}-4\\1\\7\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}-3\\-1\\4\end{pmatrix}; \quad h\colon \vec{X} = \begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}4\\3\\-2\end{pmatrix};$

$\vec{g}$ und $\vec{h}$ sind nicht kollinear.

Gleichsetzen von $\vec{X}_g$ und $\vec{X}_h$ bringt:

$$\begin{array}{rcrcr} -3\lambda & - & 4\mu & = & 8; \\ -\lambda & - & 3\mu & = & 0; \\ 4\lambda & + & 2\mu & = & -7; \end{array}$$

Auflösen bringt Widerspruch für μ ($\frac{7}{10} \neq \frac{8}{5}$), also sind g und h windschief.

$\overrightarrow{X_g X_h} \cdot \vec{g} = -3\,(8 + 4\mu + 3\lambda) - (3\mu + \lambda) + 4\,(-7 - 2\mu - 4\lambda) = -52 - 23\mu - 26\lambda \stackrel{!}{=} 0;$

$\overrightarrow{X_g X_h} \cdot \vec{h} = 4\,(8 + 4\mu + 3\lambda) + 3\,(3\mu + \lambda) - 2\,(-7 - 2\mu - 4\lambda) = 46 + 29\mu + 23\lambda \stackrel{!}{=} 0;$

Auflösen bringt für λ: $\lambda = \frac{-46-29\mu}{23}$;

Einsetzen in die erste Gleichung bringt: $(\mu, \lambda) = (0, -2)$;

$\vec{X}_g(-2) = \begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}; \quad \vec{X}_h(0) = \begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix};$

$\left|\overrightarrow{X_g(-2) X_h(0)}\right| = 3;$

0.1.2 Geometrie-Buch Seite 223, Aufgabe 16

$g\colon \vec{X} = \lambda \begin{pmatrix}6\\-10\\3\end{pmatrix}; \quad h\colon \vec{X} = \begin{pmatrix}-1\\16\\7\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}-8\\10\\1\end{pmatrix};$

g ist die Achse eines Zylinders Z mit Radius 11.

Berechne die Schnittpunkte von Z und h.

Idee: Beschreibung eines jeden Raumpunkts durch ein Koordinatensystem, das von g und zwei anderen Geraden aufgespannt wird.

- **Berechnung eines auf $\tilde{\mathrm{g}}$ senkrecht stehenden Vektors.**

  $\vec{g}\vec{a} = 6a_1 - 10a_2 + 3a_3 \stackrel{!}{=} 0;$

  Eine Gleichung, drei Unbekannte → zwei Freiheitsgrade

  Wahl von a_1 zu 1. Dann Auflösen nach a_2:

  $a_2 = \frac{3a_3+6}{10};$

  Wahl von a_3 zu 1. Dann ist $\vec{a}$:

  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{9}{10} \\ 1 \end{pmatrix};$

  Um Brüche zu vermeiden, „erweitern“ wir $\vec{a}$:

  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix};$

- **Berechnung eines zweiten Vektors, der auf $\tilde{\mathrm{g}}$ senkrecht steht und nicht zu $\tilde{\mathrm{a}}$ kollinear ist.**

  Wahl von b_3 zu 2. Dann ist $\vec{b}$ (erweitert):

  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix};$

- **Aufstellung der Gleichung für die zu $\tilde{\mathrm{g}}$ senkrechten Flächen mit Aufpunkt $\tilde{\mathrm{X}}_{\mathrm{g}}$.**

  Λ: $\vec{X} = \vec{X}_g + \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \lambda\begin{pmatrix} -6 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix};$

- **Zusätzliche Bedingungen, damit Λ zu einem Zylinder eingeschränkt wird.**

  $\left|\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}\right| = 11;$

  $(10\alpha + 5\beta)^2 + (9\alpha + 6\beta)^2 + (10\alpha + 10\beta)^2 = 281\alpha^2 + 161\beta^2 + 408\alpha\beta = 121;$

- **Zusammenfassung der Gleichungen.**

  $$\begin{array}{rcrcrcrcr} 6\lambda & + & 10\alpha & + & 5\beta & + & 8\mu & = & -1; \\ -10\lambda & + & 9\alpha & + & 6\beta & - & 10\mu & = & 16; \\ 3\lambda & + & 10\alpha & + & 10\beta & - & \mu & = & 7; \end{array}$$

  Sowie:

  $281\alpha^2 + 161\beta^2 + 408\alpha\beta = 121;$

- **Auflösen.**

λ	μ	α	β	Schnittpunkt
0	-1	$\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$(7, 6, 6)$
1	-2	$\frac{8}{5}$	$-\frac{7}{5}$	$(15, -4, 5)$

15.10.2006

Alternativ, viel einfacher:

$\overrightarrow{QP} \cdot \vec{g} = 0; \quad \overrightarrow{QP}^2 = 121; \quad$ mit $\vec{Q} = \vec{X}_h$ und $\vec{P} = \vec{X}_g$;

„[augenscheinlich] wisst ihr schon, dass es gefährlich sein kann, wenn man ins Gravitationszentrum fliegt. . . “