

0.1 104. Hausaufgabe

0.1.1 Geometrie-Buch Seite 232, Aufgabe 17

$$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 17 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad h: \vec{X} = \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \\ 16 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix};$$

a) Die Kugel hat ihren Mittelpunkt auf h und berührt g .

Bestimme ihren Mittelpunkt M und Radius r in Abhängigkeit von μ .

Für welchen Wert von μ ist der Radius minimal?

$$M \in h; \quad X_K \in g; \quad |\overrightarrow{X_K M}| = r; \quad \overrightarrow{X_K M} \cdot \vec{g} = 0;$$

Auflösen gibt für λ : $\lambda = \frac{5}{9}\mu - \frac{1}{3}$;

$$\vec{X}_K = \vec{X}_g(\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{5}{9}\mu - \frac{1}{3} \\ \frac{40}{9}\mu + \frac{43}{3} \\ \frac{20}{9}\mu + \frac{11}{3} \end{pmatrix};$$

$$r = |\overrightarrow{X_K M}| = \sqrt{16\mu^2 + 96\mu + 225};$$

$$\frac{d}{dr} \overrightarrow{X_K M}^2 = 32\mu + 96 \stackrel{!}{=} 0; \Leftrightarrow \mu = -3;$$

b) Bestimme Mittelpunkt M und Radius r der kleinsten Kugel, deren Mittelpunkt auf h liegt und die g als Tangente hat.

$$\mu = -3;$$

$$\vec{X}_K = \vec{X}_g(\lambda) = \vec{X}_g\left(\frac{5}{9}(-3) - \frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix};$$

$$\vec{M} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix};$$

$$r = \sqrt{16(-3)^2 + 96(-3) + 225} = 9;$$

c) Bestimme Mittelpunkt und Radius der kleinsten Kugel, die h und g als Tangenten hat.

Ansatz: $\overrightarrow{QP} \cdot \vec{g} = \overrightarrow{QP} \cdot \vec{h} = 0$; (Bei der kleinsten Kugel sind \overrightarrow{MQ} und \overrightarrow{MP} (anti-)parallel.)

$$r = 4,5; \quad \vec{M} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1,5 \end{pmatrix};$$