17.10.2006

0.1 106. Hausaufgabe

0.1.1 Geometrie-Buch Seite 230, Aufgabe 7

Gib die Gleichung einer Ursprungsgeraden u an, die $g\colon \vec{X} = \begin{pmatrix}3\\5\\1\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$ senkrecht schneidet.

$\left|\vec{X}\right|^2 = (3+2\mu)^2 + (5+\mu)^2 + (1+3\mu)^2 = 35 + 28\mu + 14\mu^2;$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\left|\vec{X}\right|^2 = 28\mu + 28 \stackrel{!}{=} 0; \Leftrightarrow \mu = -1;$

$u\colon \vec{X} = \lambda \vec{X}_g(-1) = \lambda \begin{pmatrix}1\\4\\-2\end{pmatrix};$

0.1.2 Geometrie-Buch Seite 230, Aufgabe 8

$g\colon \vec{X} = \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}; \quad P(1,-1,1);$

a) Berechne den Fußpunkt F des Lots von g durch P.

$\left|\overrightarrow{PX}\right|^2 = \left|\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right|^2 = 8 + 4\mu + 5\mu^2;$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\left|\overrightarrow{PX}\right|^2 = 4 + 10\mu \stackrel{!}{=} 0; \Leftrightarrow \mu = -\frac{2}{5};$

$\vec{F} = \vec{X}_g\left(-\frac{2}{5}\right) = \begin{pmatrix}3\\3/5\\1/5\end{pmatrix};$

b) Gib eine Gleichung der Normalen n von g durch P an.

$n\colon \vec{X} = \vec{F} + \lambda \overrightarrow{FP} = \begin{pmatrix}3\\3/5\\1/5\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}-2\\-8/5\\4/5\end{pmatrix};$

c) Berechne den Abstand von P und g.

$\left|\overrightarrow{PF}\right| = \left|\overrightarrow{PX\left(\frac{2}{5}\right)}\right| = \sqrt{8 + 4\left(-\frac{2}{5}\right) + 5\left(-\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{6}{\sqrt{5}};$

d) P' und P sind symmetrisch bezüglich g. Berechne P'.

$\vec{P}' = \vec{X}_n(-1) = \begin{pmatrix}5\\11/5\\-3/5\end{pmatrix};$

0.1.3 Geometrie-Buch Seite 230, Aufgabe 10

$g\colon \vec{X} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\quad h\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\quad P(1, 2, 3)$;

a) g an P gespiegelt ergibt g'. Gib eine Gleichung von g' an.

$$g'\colon \vec{X} = \vec{X}_g + 2\overrightarrow{X_g P} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix};$$

b) P an g gespiegelt ergibt P'. Berechne P'.

$$\left|\overrightarrow{PX_g}\right|^2 = 3\mu^2 - 12\mu + 14;$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} \left|\overrightarrow{PX_g}\right|^2 = 6\mu - 12 \overset{!}{=} 0; \Leftrightarrow \mu = 2;$$

$$\vec{P}' = \vec{P} + 2\overrightarrow{PX_g(2)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix};$$

c) h an g gespiegelt ergibt g'. Gib eine Gleichung von h' an.

$$h'\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix};$$

Möglicher Ansatz: Zwei beliebige feste Punkte spiegeln und dann eine Gerade durch die Bildpunkte legen. P hat man schon in Aufgabe b) an g gespiegelt, also müsste man nur noch einen zweiten Punkt spiegeln.

„so lange gelacht und doch ist es Realität. . . “

„der Mensch hat doch drei Hände“