19.10.2006

## 0.1 107. Hausaufgabe

### 0.1.1 Geometrie-Buch Seite 230, Aufgabe 12

$A(29,-5,-4)$; $B(-3,-27,12)$; $M(16,11,-8)$; $P(4,8,19)$; $Q(1,-19,31)$;
$g$ ist die Gerade durch $A$ und $B$.

**a)** Bestimme den Punkt $N$ auf $g$, der $P$ am nächsten liegt.

$$g\colon \vec{X} = \vec{A} + \lambda\overrightarrow{AB};$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left|\overrightarrow{PN}\right|^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left|\overrightarrow{PX(\lambda)}\right|^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left|\begin{pmatrix}25\\-13\\-23\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-32\\-22\\16\end{pmatrix}\right|^2 =$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left[1764\lambda^2 - 1764\lambda + 1323\right] = 3528\lambda - 1764 \stackrel{!}{=} 0;$$

$$\Leftrightarrow \lambda(N) = \tfrac{1}{2};$$

$$\Leftrightarrow \vec{N} = \vec{X}_g\left(\tfrac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix}13\\-16\\4\end{pmatrix};$$

**b)** $g$ ist Tangente einer Kugel um $M$.

Berechne den Berührpunkt $T$ und den Kugelradius $r_b$.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left|\overrightarrow{MT}\right|^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left|\overrightarrow{MX(\lambda)}\right|^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left|\begin{pmatrix}13\\-16\\4\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-32\\-22\\16\end{pmatrix}\right|^2 =$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left[1764\lambda^2 + 441\right] = 3528\lambda \stackrel{!}{=} 0;$$

$$\Leftrightarrow \lambda(T) = 0; \quad \vec{T} = \vec{A}$$

$$\Leftrightarrow r_b = \sqrt{441} = 21;$$

**c)** Berechne Radius $r_c$ und Mittelpunkt $M_c$ der kleinsten aller Kugeln, die durch $M$ gehen und deren Mittelpunkte auf $g$ liegen.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left|\overrightarrow{MM_c}\right|^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left|\overrightarrow{MX(\lambda)}\right|^2 = 3528\lambda \stackrel{!}{=} 0;$$

$$\Leftrightarrow \lambda(M_c) = 0; \quad \vec{M}_c = \vec{A};$$

$$\Leftrightarrow r_c = 21;$$

**d)** Berechne Radius $r_d$ und Mittelpunkt $M_d$ der kleinsten aller Kugeln, die durch $M$ gehen und $g$ berühren. Berechne den Berührpunkt $T$.

Siehe a).

**e)** Berechne Radius $r_e$ und Mittelpunkt $M_e$ der kleinsten aller Kugeln, die durch $Q$ gehen und $g$ als Zentrale haben.

Berechne die Schnittpunkte von $g$ und dieser Kugel; was für ein Dreieck bilden der Ursprung und die Schnittpunkte?

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left|\overrightarrow{QM_e}\right|^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left|\overrightarrow{QX(\lambda)}\right|^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left|\left(\begin{smallmatrix}28\\14\\-35\end{smallmatrix}\right) + \lambda\left(\begin{smallmatrix}-32\\-22\\16\end{smallmatrix}\right)\right|^2 =$

$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left[1764\lambda^2 - 3528\lambda + 2205\right] = 3528\lambda - 3528 \stackrel{!}{=} 0;$

$\Leftrightarrow \lambda = 1; \quad \vec{M}_e = \vec{X}(1) = \left(\begin{smallmatrix}-3\\-27\\12\end{smallmatrix}\right);$

$\Leftrightarrow r_e = \sqrt{1674 - 3528 + 2205} = \sqrt{441} = 21;$

$g'\colon \vec{X} = \vec{A} + \lambda\overrightarrow{AB}^0;$

Schnittpunkte von $g$ mit dem Kreis ergeben sich durch $\vec{X}_{g'}(\pm r_e)$ zu $S_1 = (-19, -38, 20)$ und $S_2 = (13, -16, 4)$.

Das Dreieck gebildet durch Ursprung und den zwei Schnittpunkten ist rechtwinklig: $\left|\overrightarrow{0S_1}\right|^2 - \left|\overrightarrow{0S_2}\right|^2 = 2205 - 441 = 1764 = \left|\overrightarrow{S_1S_2}\right|^2;$

**f)** Bestimme eine Gleichung der Normalen $n$ von $g$ durch $Q$.

$n\colon \vec{X} = \vec{M}_e + \mu\overrightarrow{M_eQ} = \left(\begin{smallmatrix}-3\\-27\\12\end{smallmatrix}\right) + \mu\left(\begin{smallmatrix}4\\8\\19\end{smallmatrix}\right);$

**g)** $Q$ an $g$ gespiegelt ergibt $Q'$. Berechne $Q'$.

$\vec{Q}' = \vec{X}_n(-1) = \left(\begin{smallmatrix}-7\\-35\\-7\end{smallmatrix}\right);$

### 0.1.2 Geometrie-Buch Seite 230, Aufgabe 13

$g$ ist die Gerade durch $A(8, 13, 3)$ und $B(14, 20, -3)$, $h$ ist die Gerade durch $C(10, 19, 12)$ und $D(-8, -2, 30)$.

**a)** Berechne den Abstand $d(g, h)$ von $g$ und $h$.

$g\colon \vec{X} = \left(\begin{smallmatrix}8\\13\\3\end{smallmatrix}\right) + \lambda\left(\begin{smallmatrix}6\\7\\-6\end{smallmatrix}\right);$

$h\colon \vec{X} = \left(\begin{smallmatrix}10\\19\\12\end{smallmatrix}\right) + \mu'\left(\begin{smallmatrix}-18\\-21\\18\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}10\\19\\12\end{smallmatrix}\right) + \mu\left(\begin{smallmatrix}-6\\-7\\6\end{smallmatrix}\right);$

$\overrightarrow{X_gX_h} = \left(\begin{smallmatrix}2\\6\\9\end{smallmatrix}\right) + \mu\left(\begin{smallmatrix}-6\\-7\\6\end{smallmatrix}\right) - \lambda\left(\begin{smallmatrix}6\\7\\-6\end{smallmatrix}\right);$

$\overrightarrow{X_gX_h} \cdot \vec{g} = \overrightarrow{X_gX_h} \cdot \vec{h} = 0;$

$\overrightarrow{X_gX_h} \cdot \vec{g} = (12 - 36\mu - 36\lambda) + (42 - 49\mu - 42\lambda) + (-54 - 36\mu - 36\lambda) = -23\mu - 23\lambda = 0; \Leftrightarrow \mu = -\lambda;$

$\left|\overrightarrow{X_g(\lambda)X_h(-\lambda)}\right| = \left|\begin{pmatrix}2\\6\\9\end{pmatrix}\right| = \sqrt{4+36+81} = 11;$

**b)** Bestimme eine Gleichung der Mittelparallelen $m$ von $g$ und $h$.

$m\colon \vec{X} = \vec{X}_g + \frac{\overrightarrow{X_g(\lambda)X_h(-\lambda)}}{2} = \begin{pmatrix}9\\16\\7{,}5\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}6\\7\\-6\end{pmatrix};$

**c)** $g$ an $h$ gespiegelt ergibt $u$, und $h$ an $g$ gespiegelt ergibt $v$.

Bestimme Gleichungen von $u$ und $v$.

$u\colon \vec{X} = \vec{X}_g + 2\overrightarrow{X_g(\lambda)X_h(-\lambda)} = \begin{pmatrix}12\\25\\21\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}6\\7\\-6\end{pmatrix};$

$v\colon \vec{X} = \vec{X}_h - 2\overrightarrow{X_g(\lambda)X_h(-\lambda)} = \begin{pmatrix}6\\7\\-6\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-6\\-7\\6\end{pmatrix};$

**d)** Wo liegen die Mittelpunkte der Kugeln, die $g$ und $h$ berühren?

$k\colon \vec{X} = \vec{X}_m + \sigma\left(\overrightarrow{X_g(\lambda)X_h(-\lambda)} \times \vec{g}\right) = \begin{pmatrix}9\\16\\7{,}5\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}6\\7\\-6\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}-36-63\\54+12\\14-36\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\16\\7{,}5\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}6\\7\\-6\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}-99\\66\\-22\end{pmatrix};$

**e)** Wo liegen die Mittelpunkte der kleinstmöglichen Kugeln, die $g$ und $h$ berühren?

Auf $m$.

### 0.1.3 Geometrie-Buch Seite 230, Aufgabe 14

$g_a\colon \vec{X} = \begin{pmatrix}7\\1\\a\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}; \quad a \in \mathbb{Z};$

$M(-5,5,5); \quad V(6,18,6); \quad W(-6,12,0);$

**a)** Beschreibe die Schar $g_a$, welchen Abstand haben benachbarte Schargeraden?

Welche besondere Lage im Koordinatensystem hat die Mittelparallele von $g_7$ und $g_{-7}$?

Die Schar besteht aus unendlich vielen parallelen Geraden.

$\left|\vec{X}_{g_a} - \vec{X}_{g_{a+1}}\right| = \left|\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}\right| = 1;$

Mittelparallele von $g_7$ und $g_{-7}$ ist $g_0\colon \vec{X} = \begin{pmatrix}7\\1\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$, eine Gerade in der $x_1$–$x_2$-Ebene.

**b)** Welche Schargeraden haben vom Ursprung den Abstand $7$?

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\left|\overrightarrow{0X}\right|^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\left[50 + a^2 + 10\mu + 5\mu^2\right] = 10 + 10\mu \overset{!}{=} 0;$

$\Leftrightarrow \mu = -1;$

$\left|\overrightarrow{0X(-1)}\right| = \sqrt{45 + a^2} \overset{!}{=} 7; \Leftrightarrow a = \pm 2;$

**c)** Welche Schargeraden berühren die Kugeln um $M$ mit Radius $9$?

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\left|\overrightarrow{MX}\right|^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\left|\begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ a-5 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right|^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\left[185 + a^2 - 10a + 40\mu + 5\mu^2\right] = 40 + 10\mu \overset{!}{=} 0;$

$\Leftrightarrow \mu = -4;$

$\left|\overrightarrow{MX(-4)}\right| = \sqrt{185 + a^2 - 10a - 80} \overset{!}{=} 9; \Leftrightarrow a^2 - 10a + 96 = 0;$

$D = 100 - 4 \cdot 1 \cdot 96 < 0; \Leftrightarrow$ keine Schargerade berührt die Kugel um $M$ mit Radius $9$.

**d)** Bezüglich welcher Schargerade sind $V$ und $W$ symmetrisch?

$\vec{V} + \frac{1}{2}\overrightarrow{VW} = \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 3 \end{pmatrix};$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\left|\vec{X} - \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 3 \end{pmatrix}\right|^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\left[154 + a^2 - 6a + 70\mu + 5\mu^2\right] = 70 + 10\mu \overset{!}{=} 0;$

$\Leftrightarrow \mu = -7;$

$\left|\vec{X}(-7) - \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 3 \end{pmatrix}\right|^2 = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a-3 \end{pmatrix}\right|^2 = a^2 - 6a + 9 \overset{!}{=} 0;$

$\Leftrightarrow a = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2} = 3;$