17.11.2006

0.1 112. Hausaufgabe

0.1.1 Analysis-Buch Seite 255, Aufgabe 1

Entscheide, ob das Integral konvergiert und berechne gegebenenfalls seinen Wert.

g) $\int\limits_0^{\pi/2} \underbrace{\frac{1}{\sin^2 x}}_{\frac{1}{\frac{1}{2}(1-\cos 2x)}} \,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\alpha\to 0+} \left[-\frac{1}{\tan x}\right]_\alpha^{\pi/2} = \infty;$

h) $\int\limits_0^{\pi} \frac{1}{\cos^2 x} \,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos^2 x} \,\mathrm{d}x + \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \frac{1}{\cos^2 x} \,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{2}-} \tan\alpha + \lim\limits_{\beta\to\frac{\pi}{2}+} -\tan\beta = \infty;$

0.1.2 Analysis-Buch Seite 256, Aufgabe 8

Für welche Werte a konvergiert das Integral:

a) $\int\limits_1^{\infty} x^a \,\mathrm{d}x$

Analyse der Definiertheit des Integranden: Für alle $a \in \mathbb{R}$ definiert, da $x > 0$.

Analyse für $a = -1$: $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \infty;$

Analyse für $a \neq -1$: $\int\limits_1^{\infty} x^a \,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\alpha\to\infty} \left[\frac{\alpha^{a+1}}{a+1}\right]_1^{\alpha} = \begin{cases} \infty & \text{für } a > -1; \\ -\frac{1}{a+1} & \text{für } a < -1; \end{cases}$

b) $\int\limits_0^{\infty} x^a \,\mathrm{d}x$

Integrand bei $x = 0$ für $a = 0$ nicht definiert. In diesem Fall divergiert das Integral bestimmt.

$\int x^a \,\mathrm{d}x = \begin{cases} \ln x + C & \text{für } a = -1; \\ \frac{x^{a+1}}{a+1} + C & \text{sonst;} \end{cases}$

$$\int\limits_0^\infty x^a \,\mathrm{d}x = \begin{cases} \lim\limits_{\alpha\to\infty} [\alpha^a - 0] = \infty & \text{für } a > -1; \\ \int\limits_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\alpha\to 0+} -\ln\alpha + \lim\limits_{\beta\to\infty} \ln\beta = \infty & \text{für } a = -1; \\ \int\limits_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\alpha\to 0+} -\frac{\alpha^{a+1}}{a+1} + \lim\limits_{\beta\to\infty} \frac{\beta^{a1}}{a+1} = \infty & \text{für } a < -1; \end{cases}$$