24.11.2006

0.1 115. Hausaufgabe

0.1.1 Analysis-Buch Seite 256, Aufgabe 15h

$$\int\limits_0^\infty x^2 e^{-x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^\infty x^2\left(-e^{-x}\right)'\,\mathrm{d}x = \lim_{\alpha\to\infty}\left[-x^2e^{-x} - \int 2x\left(-e^{-x}\right)\mathrm{d}x\right]_0^\alpha =$$
$$\lim_{\alpha\to\infty}\left[-x^2e^{-x} + 2\int x\left(-e^{-x}\right)'\mathrm{d}x\right]_0^\alpha = \lim_{\alpha\to\infty}\left[-x^2e^{-x} + 2\left(-xe^{-x} - \int -e^{-x}\,\mathrm{d}x\right)\right]_0^\alpha =$$
$$\lim_{\alpha\to\infty}\left[e^{-x}\left(-x^2-2x-2\right)\right]_0^\alpha = 2;$$

0.1.2 Analysis-Buch Seite 256, Aufgabe 16

a) Für $n \neq 1$:

$$\int\limits_1^a \tfrac{\ln x}{x^n}\mathrm{d}x = \int\limits_1^a \left(\tfrac{x^{1-n}}{1-n}\right)'\ln x\,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{x^{1-n}}{1-n}\ln x - \int \underbrace{\frac{x^{1-n}}{1-n}\cdot\frac{1}{x}}_{\frac{x^{-n}}{1-n}}\mathrm{d}x\right]_1^a = \left[\tfrac{x^{1-n}}{1-n}\left(\ln x - \tfrac{1}{1-n}\right)\right]_1^a =$$
$$\tfrac{a^{1-n}}{1-n}\left(\ln a - \tfrac{1}{1-n}\right) + \left(\tfrac{1}{1-n}\right)^2;$$

Für $n = 1$: $\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \int I(\ln x)\,(\ln x)'\,\mathrm{d}x = \int I(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln^2 x$ mit $I(t) = t$;

c) $\int\limits_0^a x^n \ln x\,\mathrm{d}x = \left[\int \frac{\ln x}{x^{-n}}\mathrm{d}x\right]_0^a = \left[\frac{x^{1+n}}{1+n}\left(\ln x - \frac{1}{1+n}\right)\right]_0^a = \frac{a^{1+n}}{1+n}\left(\ln a - \frac{1}{1+n}\right);$

Speziell für $a = 1$:

$$\int\limits_0^1 x^n \ln x\,\mathrm{d}x = -\left(\tfrac{1}{1+n}\right)^2;$$