04.12.2006

0.1 119. Hausaufgabe

0.1.1 Analysis-Buch Seite 258, Aufgabe 32

$f(x) = \ln(x^2+4)\,;$

a) Diskutiere f und zeichne G_f.

$f(x) \stackrel{!}{=} 0;$ → keine Nullstellen

$f(-x) = f(x);$ → Symmetrie zur y-Achse

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty;$

$f'(x) = \frac{2x}{x^2+4} \stackrel{!}{=} 0;$ → TIP bei $(0, \ln 4);$

$f''(x) = \frac{-2x^2+8}{(x^2+4)^2} = -2\cdot\frac{(x-2)(x+2)}{(x^2+4)^2} \stackrel{!}{=} 0;$ → WEP bei $(\pm 2, \ln 8);$

b) Berechne den Inhalt der Fläche A zwischen G_f und der Verbindungsgeraden seiner Wendepunkte. Wie verhält sich A zur Fläche jenes Rechtecks, das der Fläche A umschrieben ist?

Wie verhält sich A zur Fläche des umbeschriebenen gleichschenkligen Dreiecks, dessen Schenkel auf den Wendetangenten liegen?

$$\int \ln(x^2+4)\cdot x'\,\mathrm{d}x = x\ln(x^2+4) - \int \underbrace{\frac{1}{x^2+4}\cdot 2x\cdot x}_{\frac{2x^2}{x^2+4}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= x\ln(x^2+4) - \int 2\,\mathrm{d}x + \int \underbrace{\frac{8}{x^2+4}}_{\frac{2}{1+(x/2)^2}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= x\ln(x^2+4) - 2x + 4\int \frac{1/2}{1+(x/2)^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= x\ln(x^2+4) - 2x + 4\arctan\tfrac{x}{2};$$

$\int \ln 8 - \ln(x^2+4)\ \mathrm{d}x = 8 - 2\pi;$

Rechteckinhalt: $[2-(-2)]\cdot(\ln 8 - \ln 4) = \ln 16;$

Wendetangentenschnittpunkt: $f'(\pm 2) = \pm\frac{1}{2};$ → Schnittpunkt bei $\left(0, \ln 8 - 2\cdot\frac{1}{2}\right) = (0, \ln 8 - 1);$

Dreiecksinhalt: $\frac{1}{2}\cdot[2-(-2)]\cdot[\ln 8 - (\ln 8 - 1)] = 2;$

c) g sei eine umkehrbare Einschränkung von f mit möglichst großer Definitionsmenge. G_g enthalte den Punkt $(-1, ?)$.

Bestimme g^{-1} und stelle A durch ein Integral mit dem Integranden $g^{-1}(x)$ dar. Substituiere darin $x = \ln t^2$.

$g(x) = \ln(x^2 + 4)\,;\quad D_g = \mathbb{R}_0^-;\quad W_g = [\ln 4, \infty[\,;$

$g(x) = y = \ln(x^2 + 4)\,;\Leftrightarrow x = -\sqrt{e^y - 4} = g^{-1}(y);$

Inhalt von A, dargestellt über $g^{-1}(x)$: $-2\int\limits_{f(0)}^{f(2)} g^{-1}(x)\,\mathrm{d}x = 2\int\limits_{f(0)}^{f(2)} \sqrt{e^x - 4}\,\mathrm{d}x =$

$2\int\limits_{t(f(0))}^{t(f(2))} \sqrt{e^{\ln t^2} - 4}\cdot(\ln t^2)'\,\mathrm{d}t = 2\int\limits_{t(f(0))}^{t(f(2))} \sqrt{t^2 - 4}\cdot\frac{1}{t^2}\cdot 2t\,\mathrm{d}t = 4\int\limits_{t(f(0))}^{t(f(2))} \frac{\sqrt{t^2-4}}{t}\,\mathrm{d}t$

mit $t(x) = \sqrt{e^x}$;