04.12.2006

0.1 120. Hausaufgabe

0.1.1 Analysis-Buch Seite 258, Aufgabe 33

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$;

a) Bestimme die maximale Definitionsmenge.

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{2-x}}; \rightarrow D_f =]0, 2[\,;$

b) Verschiebe G_f so, dass der verschobene Graph G_g symmetrisch zur y-Achse ist. Bestimme $g(x)$.

$g(x) = f(x+1) = \frac{1}{\sqrt{x+1}\sqrt{2-x-1}} = \frac{1}{\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}}$;

Kontrolle: $g(-x) = g(x)$;

c) Bestimme die Wertemenge von g und damit von f und schließe daraus auf Ort und Art des Extrempunkts von G_f.

$g(x) = y = \frac{1}{\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}}; \rightarrow$

$|x| = \sqrt{\frac{y^2-1}{y}} = \sqrt{1-\frac{1}{y^2}}; \rightarrow$

$1 - \frac{1}{y^2} \geq 0; \Leftrightarrow |y| \geq 1; \rightarrow$

$D_{g^{-1}} = W_g = W_f = [1, \infty[\,;$

$\rightarrow$ TIP bei $(0, 1)$;

d) Begründe: Eine Stammfunktion F von f hat kein Extremum.

$f(x) > 0$ für alle $x \in D_f \rightarrow F' = f$ wechselt nie das Vorzeichen.

e) Gib die Monotoniebereiche von f an. Was folgt daraus für den Verlauf von G_F einer beliebigen Stammfunktion F von f?

Was tut sich in G_f bei der Abszisse des Extrempunkts von G_f?

$f'(x) = -\frac{1}{2x-x^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x-x^2}} \cdot (2-2x) = \frac{x-1}{\sqrt{(2x-x^2)^3}} = \frac{x-1}{\sqrt{[-x(x-2)]^3}}$;

VZW von $f'(x)$ bei $x = 1$ von $-$ nach $+$ $\rightarrow$ Bestätigung der Vermutung über die Extrempunktsart

Für eine Stammfunktion F von f folgt daraus, dass F an $x = 1$ einen Wendepunkt hat.

f) Zeichne G_f und G_F so, dass G_F den Punkt $(1,0)$ enthält.

$F(a) = \int\limits_1^a \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\,\mathrm{d}x = \left[\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cdot (1+t)'\;\mathrm{d}t\right]_1^a = [\arcsin t]_1^a = [\arcsin(x-1)]_1^a = \arcsin(a-1)\,;$

g) Berechne den Term $F(x)$ der Funktion aus Aufgabe f).

h) $H(x) := \int\limits_0^x \frac{1}{\sqrt{2t-t^2}}\,\mathrm{d}t; \quad D_H = D_{\max}$. Wie hängen F und H zusammen?

$H' = F' = f;$

$H(x) = F(x) + \int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{2t-t^2}}\,\mathrm{d}t = F(x) + \frac{\pi}{2};$