20.12.2006

0.1 125. Hausaufgabe

0.1.1 Analysis-Buch Seite 172, Aufgabe 23

Gegeben ist die Funktion f_k mit $f_k(x) = \frac{x^2-k^2}{kx}$, wobei $k > 0$ ist.
G_{f_k} ist der Graph von f_k.

a) Bestimme den maximalen Definitionsbereich und untersuche f_k auf Symmetrieeigenschaften, Nullstellen, Extrema, Wendepunkte und Asymptoten.

- Maximaler Definitionsbereich:
  $kx \neq 0; \Leftrightarrow x \neq 0$, da $k > 0$;
  $\rightarrow D_{f_k} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
- Symmetrieeigenschaften:
  $f(-x) = -\frac{x^2-k^2}{kx} = -f_k(x)$;
  $\rightarrow$ Punktsymmetrie zum Ursprung
- Nullstellen:
  $f_k(x) = \frac{x^2-k^2}{kx} \stackrel{?}{=} 0; \Leftrightarrow x^2 - k^2 \stackrel{?}{=} 0; \Leftrightarrow |x| = |k| = k$;
  $\rightarrow$ Nullstellen: $-k$, k
- Extrema:
  $f_k'(x) = \frac{kx \cdot 2x - \left(x^2-k^2\right) \cdot k}{(kx)^2} = \frac{x^2+k^2}{kx^2}$;
  GERIGKmethode für $f_k'(x)$:

```
         0
---------|------->
-----------------  x^2 + k^2
---------0-------- k x^2
    +   [0]  +
```

  $\rightarrow$ Keine Extrema
- Wendepunkte:
  Keine, aber Wechsel des Krümmungsverhalten bei $x = 0$, da f_k' bei $x = 0$ ein Extremum hat.
- Asymptoten:
  $x = 0$; (VZW an der Polstelle von $-$ nach $+$ bei $x = 0$)
  $y = \frac{x}{k}$; (Beweis: $f_k(x) = \frac{x^2-k^2}{kx} = \frac{x}{k} - \frac{k}{x}$; $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f_k(x) - \frac{x}{k} = 0$;)

b) Zeichne den zu $k = 3$ gehörigen Graphen G_{f_3}.

c) Für welche Werte von m hat die Gerade $y = mx$ mit G_{f_k} keine Punkte gemeinsam?

$y = mx \stackrel{?}{=} \frac{x^2-k^2}{kx} = f_k(x); \Leftrightarrow$

$kmx^2 \stackrel{?}{=} x^2 - k^2; \quad x^2 \stackrel{?}{=} -\frac{k^2}{km-1};$

RHS muss positiv sein: $-\frac{k^2}{km-1} \stackrel{?}{\geq} 0; \Leftrightarrow \frac{1}{km-1} \leq 0; \Leftrightarrow km \leq 1;$

Außerdem: $km - 1 \neq 0; \Leftrightarrow km \neq 1;$

Also: $km < 1; \Leftrightarrow m < \frac{1}{k};$

Die Gerade $y = mx$ hat für $m \geq \frac{1}{k}$ keine Punkte mit G_{f_k} gemeinsam.

d) Bestimme ohne Berechnung des Integrals die Abszisse des Extremums der Funktion F_k mit

$F_k(x) = \int\limits_1^x f_k(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_1^x \frac{t^2-k^2}{kt}\,\mathrm{d}t;$

Von welcher Art ist dieses Extremum?

In welchem Bereich ist F_k definiert?

GERIGKmethode für $f_k(x) = \frac{x^2-k^2}{kx} = \frac{(x-k)(x+k)}{kx}$:

```
     -k     0     k
-----|-----|-----|---->

- - - - - - - - -0----> x - k
- - -0----------------> x + k
- - - - - -0----------> k x

  -  0  + [0] -  0  +
```

$D_{F_k} = \mathbb{R}^+$; (da an der Stelle 0 der Integrand unendlich wird)

$\rightarrow$ Bei $x = k$ einziges Extremum (ein Tiefpunkt).

e) Der Graph G_h einer ganzrationalen Funktion h dritten Grades ist punktsymmetrisch zum Ursprung und berührt G_{f_3} in den Nullstellen von f_3.

Ermittle den Funktionsterm $h(x)$ und die Extrema von h.

$h(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d;$

$h(-x) = -ax^3 + bx^2 - cx + d \stackrel{!}{=} -ax^3 - bx^2 - cx - d = -h(x); \Leftrightarrow$
$bx^2 + d = 0; \Leftrightarrow d = -bx^2;$

$h(\pm3) = a\,(\pm3)^3 + c\,(\pm3) = \pm27a \pm 3c = \stackrel{!}{=} 0; \Leftrightarrow c = -9a;$

$h(x) = ax^3 - 9ax; \quad h'(x) = 3ax^2 - 9a;$

$h'(\pm3) = 27a - 9a = 18a \stackrel{!}{=} f_3'(\pm3) = \frac{2}{3}; \Leftrightarrow a = \frac{1}{27};$

$\rightarrow h(x) = \frac{1}{27}\left(x^3 - 9x\right);$

GERIGKmethode für $h'(x) = \frac{1}{9}\left(x^2 - 3\right) = \frac{1}{9}\left(x + \sqrt{3}\right)\left(x - \sqrt{3}\right)$:

```
-sqrt(3)     0     sqrt(3)
-------|-----|-----|------>

-------------------------- 1/9
- - - -0------------------ x + sqrt(3)
- - - - - - - - - -0------- x - sqrt(3)

   +   0     -     0   +
```

$\rightarrow$ HOP bei $\left(-\sqrt{3}, \frac{2}{9}\sqrt{3}\right);$

$\rightarrow$ TIP bei $\left(\sqrt{3}, -\frac{2}{9}\sqrt{3}\right);$

f) Zeichne G_h in die Zeichnung von Teilaufgabe b) ein.

g) Welche Fläche schließt G_h mit der positiven x-Achse ein?

Nullstellen von h: -3, 0, 3

Fläche: $\{(x, y) \mid x \in [0, 3] \wedge h(x) \leq y \leq 0\};$

Flächeninhalt: $\left|\int\limits_0^3 |h(x)|\ \mathrm{d}x\right| = \left|-\frac{1}{27}\int\limits_0^3 x^3 - 9x\,\mathrm{d}x\right| = \left|-\frac{1}{27}\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{9}{2}x^2\right]_0^3\right| =$
$\left|-\frac{1}{27}\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{9}{2}x^2\right]_0^3\right| = \frac{3}{4};$

h) Die Funktion h_1 sei gegeben durch

$$h_1(x) = \begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{3}{x} & \text{für } |x| \geq 3; \\ \frac{1}{27}\left(x^3 - 9x\right) & \text{für } |x| < 3; \end{cases}$$

Ihr Graph ist G_{h_1}.

Kennzeichne G_{h_1} in der Zeichnung der Teilaufgabe b) mit Farbe. Wie oft ist h_1 bei $x = 3$ differenzierbar? (Begründung!)

Stetigkeit von h_1 an der Stelle 3: $\lim\limits_{x\to3-} h_1(x) = \lim\limits_{x\to3+} h_1(x) = h_1(3) = 0;$

Provisorisch: $h_1'(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} + \frac{3}{x^2} & \text{für } |x| \geq 3; \\ \frac{1}{27}\left(3x^2 - 9\right) & \text{für } |x| < 3; \end{cases}$

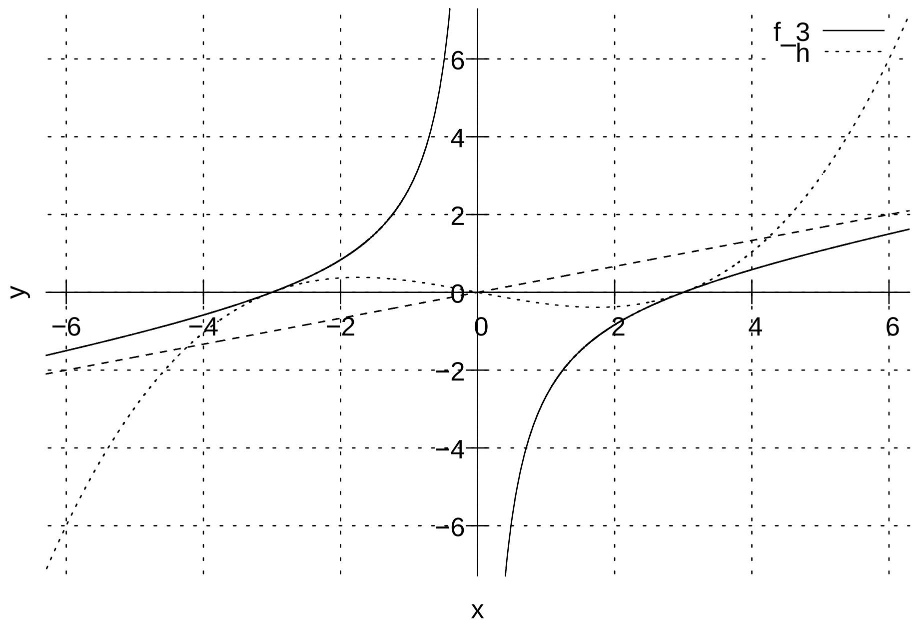
$\lim_{x \to 3-} h_1'(x) = \frac{2}{3} = \lim_{x \to 3+} h_1'(x);$

$\to$ Provisorisches h_1' ist in der Tat die Ableitungsfunktion von h_1.

Provisorisch: $h_1''(x) = \begin{cases} -\frac{6}{x^3} & \text{für } |x| \geq 3; \\ \frac{2}{9}x & \text{für } |x| < 3; \end{cases}$

$\lim_{x \to 3-} h_1''(x) = \frac{2}{3} \neq -\frac{2}{9} = \lim_{x \to 3+} h_1''(x);$

$\to h_1$ ist nicht zweimal an der Stelle $x = 3$ differenzierbar; das provisorisch aufgestellte h_1'' ist nicht die Ableitungsfunktion von h_1'.



0.1.2 Analysis-Buch Seite 172, Aufgabe 24

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{2x-4}{1-x}$; ihr Graph sei mit G_f bezeichnet.

a) Bestimme die maximale Definitionsmenge D_f von f und untersuche G_f auf Schnittpunkte mit dem Koordinatenachsen.

$1 - x \neq 0; \Leftrightarrow x \neq 1;$

$\to D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\};$

$f(0) = -4;$

$f(x) = \frac{2x-4}{1-x} \stackrel{?}{=} 0; \Leftrightarrow 2x - 4 \stackrel{?}{=} 0; \Leftrightarrow x = 2; \quad f(2) = 0;$

b) Untersuche das Verhalten von $f(x)$ für $x \to \pm\infty$ und für $x \to 1$.

$f(x) = \frac{2x-4}{1-x} = -2 - \frac{2}{1-x};$

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -2;$

$\lim_{x\to 1\pm} f(x) = \pm\infty;$

c) Welches Monotonieverhalten zeigt die Funktion f? Hat G_f Extrempunkte? Begründe deine Antwort.

$f'(x) = -\frac{2}{(1-x)^2} < 0$ für alle $x \in D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{1\};$

$\to f$ ist auf $]-\infty, 1[$ und $]1, \infty[$ streng monoton fallend. (XXX auf ganz D_f smf? Oder mit 1 jeweils eingeschlossen? Oder nur bei einem eingeschlossen?)

GERIGKmethode von $f'(x)$:

```
          1
--------|------>

--------0- - - - 1 - x
--------0- - - - 1 - x

    +   0   +
```

$\to f$ hat keine Extrempunkte. (Aber eine Wendestelle bei $x = 1$, da f' bei $x = 1$ ein Extremum hat.)

(XXX ist es richtig, zu sagen, bei $x = 1$ liege eine Wendestelle, aber kein Wendepunkt vor?)

d) Zeichne nun G_f.

e) Begründe, weshalb f umkehrbar ist. Gib die Funktionsgleichung $y = f^{-1}(x)$ für die Umkehrfunktion f^{-1} von f sowie den Definitions- und den Wertebereich von f^{-1} an.

f ist umkehrbar, weil es bei beiden Ästen streng monoton ist und weil sich die Äste nicht „überlappen"; f ist injektiv.

$f(y) = \frac{2y-4}{1-y}; \Leftrightarrow f(y) - yf(y) = 2y - 4; \Leftrightarrow y = \frac{-4-f(y)}{-f(y)-2} = \frac{f(y)+4}{f(y)+2} = f^{-1}(f(y));$

$f(y) + 2 \neq 0; \Leftrightarrow f(y) \neq -2;$

$D_{f^{-1}} = W_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}\,; \quad W_{f^{-1}} = D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}\,;$

(XXX wieso ist -2 nicht 1, gespiegelt an $y = x$?)

f) Berechne die Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen G_f und $G_{f^{-1}}$.

($G_{f^{-1}}$ ist der Graph von $f^{-1}\colon x \mapsto y$)

$f(x) = \frac{2x-4}{1-x} \stackrel{?}{=} \frac{x+4}{x+2} = f^{-1}(x); \Leftrightarrow$

$(2x-4)\,(x+2) = 2x^2 + 4x - 4x - 8 \stackrel{?}{=} x - x^2 + 4 - 4x = (x+4)\,(1-x)\,;$ $\Leftrightarrow$

$3x^2 + 3x - 12 \stackrel{?}{=} 0;$

$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-12)}}{2 \cdot 3} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2};$

$y_1 \approx 1{,}56; \quad y_2 \approx -2{,}56;$

g) Zeige, dass die Funktion $F\colon x \mapsto \ln\left[(1-x)^2\right] - 2x$ mit $D_F = D_f$ eine Stammfunktion von f ist.

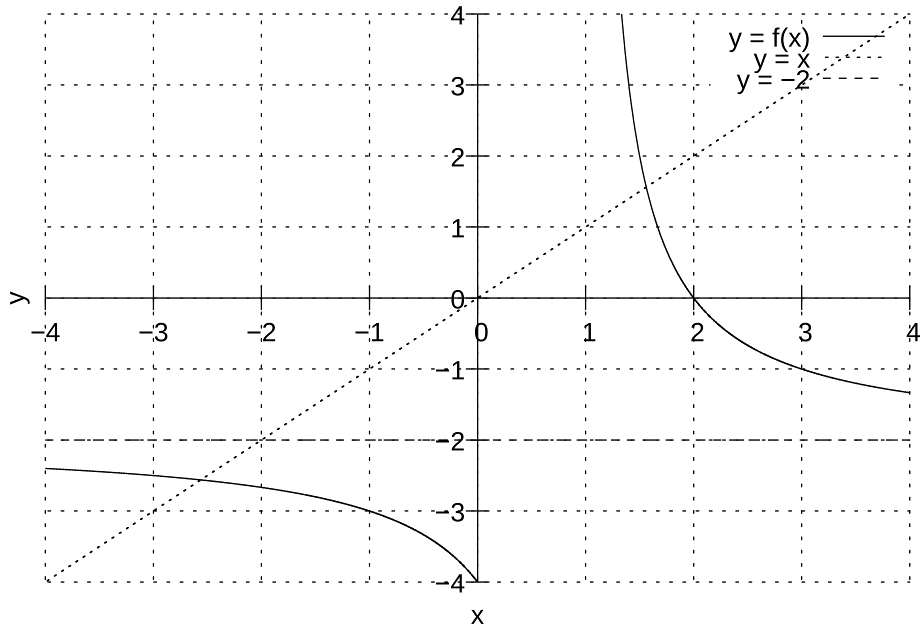
$F'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \cdot 2\,(1-x) \cdot (-1) - 2 = -\frac{2}{1-x} - 2 = f(x);$

h) Bestimme den Flächeninhalt der Figur, die vom Graphen G_f, von der Geraden $y = x$ sowie von den beiden Geraden $y = -2$ und $x = 0$ begrenzt wird, auf zwei Dezimalstellen genau.

Schnittpunkte vom Graphen von $y = x$ und $f(x)$ = Schnittpunkte von G_f und $G_{f^{-1}}$.

$x_1 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2};$

$\frac{1}{2}\,[2 + (2 + f(x_1))] \cdot x_1 + \int\limits_{x_1}^{\infty} f(x) - (-2)\;\mathrm{d}x = \infty;$



21.12.2006

0.1.3 Analysis-Buch Seite 172, Aufgabe 25

Gegeben ist die Funktion f_a mit $f_a(x) = \frac{a^2}{x^2} - \frac{x}{a}$ ($a > 0$). Der Graph von f_a heiße G_{f_a}.

a) Bestimme den maximalen Definitionsbereich D_{f_a}, die Nullstellen und die Asymptoten von G_{f_a}.

- Definitionsbereich:
  $x^2 \neq 0; \Leftrightarrow D_{f_a} = \mathbb{R} \setminus \{0\};$
- Nullstellen:
  $f_a(x) = \frac{a^2}{x^2} - \frac{x}{a} \stackrel{?}{=} 0; \Leftrightarrow a^3 \stackrel{?}{=} x^3; \Leftrightarrow f_a(a) = 0;$
- Asymptoten:
  $x = 0$; (Beweis: $\lim\limits_{x \to 0\pm} f_a(x) = \infty;$)
  $y = -\frac{x}{a}$; (Beweis: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f_a(x) + \frac{x}{a} = 0;$)

b) Berechne die Koordinaten (x_E, y_E) und die Art des Extremums von f_a. Hat G_{f_a} Wendepunkte? (Begründung!)

$f_a'(x) = -\frac{x^3+2a^3}{ax^3};$

$x^3 + 2a^3 \stackrel{?}{=} 0; \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{2}a;$

GERIGKmethode von $f_a'(x)$:

```
   -2^(1/3)a     0
-----------|-----|------>

- - - - - - - - - - - - - - -1
- - - - - -0------------ x^3 + 2a^3
- - - - - - - - - -0------- a x^3

    -      0  + [0]  -
```

VZW von $-$ nach $+$ bei $x = -\sqrt[3]{2}a;$ $\rightarrow$ TIP bei $\left(-\sqrt[3]{2}a, \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \sqrt[3]{2}\right)$;

$f_a''(x) = \frac{6a^2}{x^4} > 0$ auf ganz D_{f_a}; trotzdem aber Wendestelle von f_a bei $x = 0$.

c) Zeichne den zu $a = 2$ gehörigen Graphen G_{f_2}.

d) Wie lässt sich die Tatsache interpretieren, dass y_E den Parameter a nicht enthält?

Alle Tiefpunkte liegen auf einer gemeinsamen Geraden.

e) Berechne $F_2(x) = \int_1^x f_2(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^x \left(\frac{4}{t^2} - \frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t$.

$F_2(x) = \int_1^x \left(\frac{4}{t^2} - \frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t = \left[-\frac{4}{t} - \frac{t^2}{4}\right]_1^x = -\frac{4}{x} - \frac{x^2}{4} + \frac{17}{4};$

f) Begründe die Existenz eines Maximums von F_2 und berechne dessen Koordinaten.

GERIGKmethode von $f_a(x) = \frac{a^2}{x^2} - \frac{x}{a} = \frac{a^3 - x^3}{ax^2}$:

```
      0      a
------|------|------>

-------------0- - - - a^3 - x^3
------0-------------- a x^2

  +  [0]  +  0   -
```

VZW von $f_a(x)$ von $+$ nach $-$ bei $x = a;$ $\rightarrow$ HOP bei $\left(a, -\frac{4}{a} - \frac{a^2}{4} + \frac{17}{4}\right)$;

g) Für welche Werte von k hat die Gerade

$g_k\colon y = -\frac{1}{a}x + k$

mit G_{f_a} keine Punkte gemeinsam? Welche Schnittpunkte ergeben sich für $k = a^2$?

Konventioneller Ansatz über $y = -\frac{1}{a}x + k \stackrel{?}{=} \frac{a^3-x^3}{ax^2} = f_a(x)$; führt nicht zum Ziel, da die Nullstellen eines Polynoms vierter Ordnung zu finden wären.

Stattdessen Überlegung mit den Erkenntnisen der a): y ist für $k = 0$ Asymptote von G_{f_a}, mit $f_a(x) > -\frac{x}{a}$ für alle $x \in D_{f_a}$.

Also: Für $k \leq 0$ gibt es keine Schnittpunkte.

$-\frac{1}{a}x + a^2 = \frac{-x+a^3}{a} = \frac{a^3-x^3}{ax^2}$; $\Leftrightarrow$

$-x^3 + x^2a^3 = a^3 - x^3$; $\Leftrightarrow$ $|x| = 1$;

Schnittpunkte: $\left(\pm 1, \mp\frac{1}{a} + a^2\right)$;

h) Die Funktion h_a ist gegeben durch

$$h_a(x) = \begin{cases} \frac{a^2}{x^2} - \frac{x}{a} & \text{für } |x| \geq 1; \\ -\frac{x}{a} + a^2 & \text{für } |x| < 1; \end{cases}$$

Ihr Graph heiße G_{h_a}.

Zeichne den zu $a = 2$ gehörigen Graphen G_{h_2}.

Untersuche h_a an der Stelle $x = 1$ auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit.

$\lim\limits_{x\to 1-} h_a(x) = \lim\limits_{x\to 1-} -\frac{x}{a} + a^2 = -\frac{1}{a} + a^2 = h_a(1) = \lim\limits_{x\to 1+} \frac{a^2}{x^2} - \frac{x}{a} = \lim\limits_{x\to 1+} h_a(x)$;

$\to$ h_a ist an der Stelle $x = 1$ stetig.

Provisorische Ableitungsfunktion:

$$h_a'(x) = \begin{cases} -\frac{2a^2}{x^3} - \frac{1}{a} & \text{für } |x| \geq 1; \\ -\frac{1}{a} & \text{für } |x| < 1; \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 1-} h_a'(x) = \lim\limits_{x\to 1-} -\frac{1}{a} = -\frac{1}{a} \neq \lim\limits_{x\to 1+} -2a^2 - \frac{1}{a} = \lim\limits_{x\to 1+} -\frac{2a^2}{x^3} - \frac{1}{a} = \lim\limits_{x\to 1+} h_a'(x)$;

$\to$ h_a ist an der Stelle $x = 1$ nicht differenzierbar; das provisorisch aufgestellte h_a' ist nicht Ableitungsfunktion von h_a.

i) Berechne den Inhalt $J(r)$ des Flächenstücks, das von G_{h_a}, der Geraden $g_0\colon y = -\frac{1}{a}x$, der y-Achse und der Geraden $x = r$ ($r > 0$) eingeschlossen wird.

$h_a(0) = a^2;$

$A_1 = a^2 \cdot 1;$

$$A_2 = \int\limits_1^r h_a(x) - y_{g_0}\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^r \frac{a^2}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{a^2}{x}\right]_1^r = -\frac{a^2}{r} + a^2 = a^2\left(1 - \frac{1}{r}\right);$$

$$J(r) = \begin{cases} A_1 \cdot r = ra^2 & \text{falls } 0 < x < 1; \\ A_1 + A_2 = a^2\left(2 - \frac{1}{r}\right) & \text{sonst;} \end{cases};$$

j) Bestimme $\lim\limits_{r\to\infty} J(r)$.

$$\lim_{r\to\infty} J(r) = \lim_{r\to\infty} a^2\left(2 - \frac{1}{r}\right) = 2a^2;$$