07.02.2007

0.1 134. Hausaufgabe

0.1.1 Stochastik-Buch Seite 258, Aufgabe 2

X sei die Augenzahl beim Werfen eines echten Würfels.

a) Wie groß ist die maximale absolute Abweichung $|X-\mu|$?

$\mu = 3{,}5;$

$\max\left\{|X(\omega)-\mu| \mid \omega \in \Omega\right\} = 2{,}5;$

b) Berechnen Sie $P(|X-\mu| \leq 2{,}5)$ und $P(|X-\mu| > 2{,}5)$.

$P(|X-\mu| \leq 2{,}5) = 1;$

$P(|X-\mu| > 2{,}5) = 1 - P(|X-\mu| \leq 2{,}5) = 0;$

c) Welche Abschätzung liefert die Tschebyschew-Ungleichung für $P(|X-\mu| \leq 2{,}5)$ bzw. $P(|X-\mu| > 2{,}5)$?

$\sigma^2 = \frac{35}{12};$

$P(|X-\mu| \leq 2{,}5) > 1 - \frac{\sigma^2}{(2{,}5)^2} = 1 - \frac{35/12}{(2{,}5)^2} \approx 53{,}3\,\%;$

$P(|X-\mu| > 2{,}5) \leq \frac{\sigma^2}{(2{,}5)^2} = \frac{35/12}{(2{,}5)^2} \approx 46{,}7\,\%;$

0.1.2 Stochastik-Buch Seite 258, Aufgabe 3

Berechnen Sie von den folgenden Zufallsgrößen jeweils $P(|X-\mu| < t\sigma)$ für $t = 3/2$ und $t = 2$ und vergleichen Sie die exakten Werte mit den Schranken nach Tschebyschew:

a) X sei die Augensumme beim Werfen zweier Würfel.

$\mu = 7; \quad \sigma^2 = \frac{70}{12};$

$P\left(|X-\mu| < \frac{3}{2}\sigma\right) = \frac{30}{6^2} \approx 83{,}3\,\%;$ (Augensummen von 3 bis 11)

$P\left(|X-\mu| < \frac{3}{2}\sigma\right) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\left(\frac{3}{2}\sigma\right)^2} = 1 - \frac{4}{9} \approx 55{,}5\,\%;$

$P(|X-\mu| < 2\sigma) = \frac{34}{6^2} \approx 94{,}4\,\%;$ (Augensummen von 4 bis 10)

$P(|X-\mu| < 2\sigma) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{(2\sigma)^2} = 1 - \frac{1}{4} = 75\,\%;$

b) X sei die Anzahl der Wappen beim viermaligen Werfen einer einwandfreien Münze.

$\mu = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2; \quad \sigma^2 = 4 \cdot \frac{1}{2}\frac{1}{2} = 1;$

$P\big(|X-\mu| < \frac{3}{2}\sigma\big) = 87{,}5\,\%;$ (alle Ergebnisse außer 0^4 und 1^4)

$P\big(|X-\mu| < \frac{3}{2}\sigma\big) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\left(\frac{3}{2}\sigma\right)^2} = 1 - \frac{4}{9} \approx 55{,}5\,\%;$

$P(|X-\mu| < 2\sigma) = 87{,}5\,\%;$ (alle Ergebnisse außer 0^4 und 1^4)

$P(|X-\mu| < 2\sigma) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{(2\sigma)^2} = 1 - \frac{1}{4} = 75\,\%;$

0.1.3 Stochastik-Buch Seite 258, Aufgabe 4

Sei $k \in \mathbb{R}^+$. Eine Zufallsgröße X nehme die Werte $(-k)$, 0, k mit den Wahrscheinlichkeiten $P(X = -k) = \frac{1}{2\sqrt{k}}$, $P(X = 0) = 1 - \frac{1}{\sqrt{k}}$, $P(X = k) = \frac{1}{2\sqrt{k}}$ an.

a) Berechnen Sie μ und σ^2.

Achtung: k muss größergleich $\frac{1}{4}$ sein, andernfalls ist $P(X = \pm k)$ größer 1!

$\mu = 0; \quad \sigma^2 = E(X^2) - E^2(X) = k^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} = k^{3/2};$

b) Berechnen Sie $P(|X| \geq k)$.

$P(|X| \geq k) = \frac{1}{\sqrt{k}};$ $(X = \pm k)$

c) Schätzen Sie $P(|X| \geq k)$ nach Tschebyschew ab.

$P(|X| \geq k) \leq \frac{k^{3/2}}{k^2} = \frac{1}{\sqrt{k}};$

d) Vergleichen Sie die beiden Ergebnisse.

Die TSCHEBYSCHEWschranke ist in diesem Fall optimal.

0.1.4 Stochastik-Buch Seite 258, Aufgabe 5

Bei der automatischen Herstellung von Stahlbolzen wird ein Durchmesser von $4{,}5\,\mathrm{mm}$ verlangt, wobei Abweichungen bis zu $0{,}2\,\mathrm{mm}$ zulässig sind. Eine Überprüfung ergab für den Durchmesser den Erwartungswert $4{,}5\,\mathrm{mm}$ bei einer Standardabweichung von $0{,}08\,\mathrm{mm}$. Mit welchem Anteil an unbrauchbaren Bolzen muss höchstenfalls gerechnet werden?

$P(|X - 4{,}5\,\mathrm{mm}| > 0{,}2\,\mathrm{mm}) < \frac{(0{,}08\,\mathrm{mm})^2}{(0{,}2\,\mathrm{mm})^2} = 16\,\%;$

0.1.5 Stochastik-Buch Seite 258, Aufgabe 6

Der Inhalt automatisch verpackter Fleischkonserven soll $1000\,\mathrm{g}$ betragen. Abweichungen von $30\,\mathrm{g}$ vom Soll seien zulässig. Bei der Überprüfung des Inhalts X vieler Konservendosen in g ergab sich als arithmatischer Mittelwert $\overline{x} = 1000\,\mathrm{g}$ und als empirische Varianz $s^2 = 100\,\mathrm{g}^2$.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt der Doseninhalt außerhalb der zulässigen Toleranz?

$P(|X - \overline{x}| > 30\,\mathrm{g}) < \frac{s^2}{(30\,\mathrm{g})^2} = \frac{1}{9} \approx 11{,}1\,\%$;

0.1.6 Stochastik-Buch Seite 258, Aufgabe 7

Der Fehleranteil serienmäßig hergestellter Produkte sei $1\,\%$. Aus einem Los sehr großen Umfangs N wird eine Stichprobe von $n = 1000$ Einheiten entnommen ($n \ll N$). Gefragt ist nach einer Abschätzung der Wahrscheinlichkeit, dass die Zahl X der fehlerhaften Elemente vom Erwartungswert um höchstens 10 Einheiten abweicht.

$\mu = 1000 \cdot 1\,\% = 10; \quad \sigma^2 = 1000 \cdot (1\,\%)\,(99\,\%) = 9{,}9;$

$P(|X - 10| \leq 10) > 1 - \frac{9{,}9}{10^2} = 90{,}1\,\%$;

0.1.7 Stochastik-Buch Seite 258, Aufgabe 8

Eine Anlage besteht aus 10 unabhängig voneinander arbeitenden Elementen, von denen jedes innerhalb der Wartungszeit mit der Wahrscheinlichkeit $5\,\%$ ausfällt. Es ist die Wahrscheinlichkeit dafür abzuschätzen, dass die Zahl X der ausfallenden Elemente vom Erwartungswert um mindestens 2 abweicht. Vergleich mit dem exakten Wert!

$\mu = 10 \cdot 5\,\% = 0{,}5; \quad \sigma^2 = 10 \cdot (5\,\%)\,(95\,\%) = 0{,}475;$

$P(|X - 0{,}5| \geq 2) \leq \frac{0{,}475}{2^2} \approx 11{,}9\,\%$;