11.02.2007

0.1 135. Hausaufgabe

0.1.1 Stochastik-Buch Seite 260, Aufgabe 11

Die Lebensdauer X bestimmter Projektionslampen schwankt mit einer Standardabweichung von $\sigma = 10\,\mathrm{h}$ um den Erwartungswert $\mu = 150\,\mathrm{h}$.

a) Mit welcher Mindestwahrscheinlichkeit ergibt eine Zufallsauswahl von vier Lampen eine mittlere Lebensdauer zwischen 130 und 170 Stunden?

$P\left(\left|\overline{X} - 150\,\mathrm{h}\right| \leq 20\,\mathrm{h}\right) > 1 - \frac{(10\,\mathrm{h})^2}{4(20\,\mathrm{h})^2} \approx 93{,}8\,\%;$

b) Mit welcher Mindestwahrscheinlichkeit kann bei insgesamt 16 Lampen mit einer Gesamtlebensdauer zwischen 2240 und 2560 Stunden gerechnet werden?

$P\left(\left|X^{\Sigma} - 2400\,\mathrm{h}\right| \leq 160\,\mathrm{h}\,\mathrm{h}\right) > 1 - \frac{16(10\,\mathrm{h})^2}{(160\,\mathrm{h})^2} \approx 93{,}8\,\%;$

0.1.2 Stochastik-Buch Seite 260, Aufgabe 12

Für die Brenndauer X einer Glühlampenserie kann die Standardabweichung $\sigma < 100\,\mathrm{h}$ angenommen werden. Wie viele Lampen müssen mindestens getestet werden, damit der arithmetische Mittelwert der Brenndauer mit einer Wahrscheinlichkeit von wenigstens $95\,\%$ um weniger als $50\,\mathrm{h}$ vom Erwartungswert abweicht?

$95\,\% = P\left(\left|\overline{X} - \mu\right| < 50\,\mathrm{h}\right) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{n\cdot(50\,\mathrm{h})^2};\ \Leftrightarrow$

$n \leq \frac{\sigma^2}{\left[1-P\left(\left|\overline{X}-\mu\right|<50\,\mathrm{h}\right)\right]c^2} = 80;$

XXX Fehler: n müsste $\geq$ irgendwas sein 4,21

0.1.3 Stochastik-Buch Seite 260, Aufgabe 13

Ein fairer Würfel wird n Mal unabhängig geworfen. X_i sei die beim i-ten Wurf erzielte Augenzahl.

a) Geben Sie mit Hilfe der Ungleichung von Tschebyschew eine Abschätzung der Wahrscheinlichkeit dafür an, dass das arithmetische Mittel $\overline{X}$ der erzielten Augenzahlen einen Wert aus dem Intervall $[3,4]$ annimmt, wenn $n = 70$ Würfe durchgeführt werden.

Führen Sie dieses Experiment durch und berechnen Sie $\overline{x}$.

$\mathrm{Var}(X_i) = E(X_i^2) - E^2(X_i) = \frac{1}{6}\left[1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2\right] - (3{,}5)^2 = \frac{35}{12};$

$P\left(\left|\overline{X} - 3{,}5\right| \leq 0{,}5\right) > 1 - \frac{35/12}{70\cdot(0{,}5)^2} \approx 83{,}3\,\%;$

Berechnung von $\overline{x}$:

```
module Main where

import System.Random
import Control.Monad
import Data.List

main = study 10000 >>= putStrLn . show

run = fmap (avg . take 70 . randomRs (1,6))

study n = do
  ws <- replicateM n $ run (newStdGen >> getStdGen)
  let ok = filter (\x -> x >= 3 && x <= 4) ws
  return $ genericLength ok / genericLength ws

avg xs = fromIntegral (sum xs) / genericLength xs
```

Ergebnis: Mit ca. $98{,}679\,\%$ Wahrscheinlichkeit ($100\,100$ durchgeführte Experimente) liegt $\overline{x}$ in $[3,4]$.

b) Wie oft muss man nach der Tschebyschew-Abschätzung mindestens werfen, damit $\overline{X}$ mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als $90\,\%$ einen Wert aus dem Intervall $[3{,}3, 3{,}7]$ annimmt?

$90\,\% = P\left(\left|\overline{X} - 3{,}5\right| \leq 0{,}2\right) > 1 - \frac{35/12}{n\cdot(0{,}2)^2}; \Leftrightarrow$

$n < \frac{35/12}{(1-90\,\%)\cdot(0{,}2)^2} \approx 729{,}2;$ (XXX müsste $>$ heißen)

Man muss mindestens 730 Mal werfen.