21.10.2005

0.1 14. Hausaufgabe

0.1.1 Analysis-Buch Seite 37, Aufgabe 32

$$\mathrm{f}(x) := \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & \text{für } x \in [0,3]\,; \\ -x+5 & \text{für } x \in \,]3,4]\,; \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathrm{F}(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x & \text{für } x \in [0,3]\,; \\ \frac{15}{4} & \text{für } x = 3; \\ -\frac{1}{2}x^2 + 5x - \frac{27}{4} & \text{für } x \in \,]3,4]\,; \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{F} \text{ stetig in } D_\mathrm{f}; \\ \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3-} \mathrm{F}'(x) = 2 \\ \lim\limits_{x\to 3+} \mathrm{F}'(x) = 2 \end{array}\right\} = \mathrm{F}'(3) = \mathrm{f}(x); \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{F}' = \mathrm{f}';$$

Berechne

a) $\int\limits_0^3 \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{F}(3) - \mathrm{F}(0) = \frac{15}{4};$

b) $\int\limits_3^4 \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{F}(4) - \mathrm{F}(3) = \frac{3}{2};$

c) $\int\limits_0^4 \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{F}(4) - \mathrm{F}(0) = \int\limits_0^3 \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_3^4 \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{F}(3) - \mathrm{F}(0) + \mathrm{F}(4) - \mathrm{F}(3) = \mathrm{F}(4) - \mathrm{F}(0) = \frac{21}{4};$

0.1.2 Analysis-Buch Seite 37, Aufgabe 34

$\mathrm{f}(x) := \sqrt{4 - x^2}; \quad D_\mathrm{f} = [-2,2]\,;$

a) Zeige, dass für $(x_0, y_0) \in G_\mathrm{f}$ gilt: $x_0^2 + y_0^2 = 4;$

$x_0^2 + y_0^2 = x_0^2 + \mathrm{f}(x_0) = x_0^2 + 4 - x_0^2 = 4;$

Was folgt daraus für die Form von G_f?

f beschreibt einen Halbkreis mit Radius $r = \sqrt{4} = 2.$

b) Berechne mit Holfe geometrischer Überlegungen

- $\int\limits_{-2}^{+2} \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi r^2}{2} = 2\pi;$
- $\int\limits_{0}^{+2} \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi r^2}{4} = \pi;$
- $\int\limits_{0}^{1} \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = r^2\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot \mathrm{f}(1) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{\mathrm{f}(1)}{1}\right) r^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}}{2} r^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2};$
- $\int\limits_{1}^{2} \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{+2} \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{0}^{1} \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2};$

0.1.3 Analysis-Buch Seite 37, Aufgabe 35

Berechne $\int\limits_{0}^{2} \sqrt{9-x^2}\,\mathrm{d}x$, indem du den Kreis $x^2+y^2=9$ betrachtest.

$r = \sqrt{9} = 3;$

$\int\limits_{0}^{2} \sqrt{9-x^2}\,\mathrm{d}x = r^2\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot \mathrm{f}(2) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{\mathrm{f}(2)}{2}\right) r^2 + \sqrt{5} \approx 5{,}52;$