

0.1 145. Hausaufgabe

0.1.1 Stochastik-Buch Seite 336, Aufgabe 3

Bei einem Stichprobenumfang von $n = 20$ soll über die beiden Hypothesen $H_1: p = 0,25$ und $H_2: p = 0,5$ entschieden werden. Die irrtümliche Entscheidung für H_2 soll höchstens mit 5 % Wahrscheinlichkeit vorkommen.

a) Bestimmen Sie die Entscheidungsregel.

$$\begin{aligned} \text{An } H_1 &= \{0, 1, \dots, k\}; & \text{An } H_2 &= \{k + 1, \dots, n\}; \\ P_{H_1}^{20}(X \in \text{An } H_2) &= P_{0,25}^{20}(X \geq k + 1) = 1 - P_{0,25}^{20}(X < k + 1) = \\ &= 1 - P_{0,25}^{20}(X \leq k) = 1 - F(20, 0,25; k) \stackrel{!}{\leq} 5\%; \Leftrightarrow \\ &F(20, 0,25; k) \geq 1 - 5\% = 95\%; \Leftrightarrow k \geq 8; \\ \text{An } H_1 &= \{0, 1, \dots, 8\}; & \text{An } H_2 &= \{9, 10, \dots, 20\}; \end{aligned}$$

b) Stellen Sie die Wahrscheinlichkeiten für richtige und irrtümliche Entscheidungen in einer Vierfeldertafel entsprechend Beispiel 15.1 zusammen.

	$X \in \text{An } H_1$	$X \in \text{An } H_2$
H_1 „in Wahrheit“	$P_{0,25}^{20}(X \leq 8) \approx 95,9\%$	$P_{0,25}^{20}(X > 8) \approx 4,1\%$
H_2 „in Wahrheit“	$P_{0,5}^{20}(X \leq 8) \approx 25,2\%$	$P_{0,5}^{20}(X > 8) \approx 74,8\%$

c) Für welche Entscheidungsregel sind die beiden Fehlerwahrscheinlichkeiten etwa gleich groß? Entwerfen Sie auch in diesem Fall eine Vierfeldertafel der Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Entscheidungen.

$$\text{An } H_1 = \{0, 1, \dots, k\}; \quad \text{An } H_2 = \{k + 1, \dots, n\};$$

$$P_{0,25}^{20}(X \geq k + 1) \stackrel{!}{\approx} P_{0,5}^{20}(X \leq k); \Leftrightarrow$$

$$1 - P_{0,25}^{20}(X \leq k) \stackrel{!}{\approx} P_{0,5}^{20}(X \leq k);$$

Ausprobieren liefert: $k = 7$;

Fehlerwahrscheinlichkeiten sind dann 10,2 % bzw. 13,2 %.