26.12.2005

0.1 39. Hausaufgabe

0.1.1 Stochastik-Buch Seite 104, Aufgabe 41

Ein Würfel wird viermal geworfen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^4$; (Laplace)

- A_1: „Es erscheint genau dreimal Augenzahl 1, einmal Augenzahl 2“

  $P(A_1) = \frac{|A_1|}{|\Omega|} = \frac{4}{6^4} = \frac{1}{324}$;

- A_2: „Es erscheint genau dreimal Augenzahl 1“

  $P(A_2) = \frac{|A_2|}{|\Omega|} = 5P(A_1) = \frac{4\cdot5}{6^4} = \frac{5}{324}$;

- A_3: „Es erscheint genau dreimal die gleiche Augenzahl“

  $P(A_3) = \frac{|A_3|}{|\Omega|} = 6P(A_3) = \frac{4\cdot5\cdot6}{6^4} = \frac{5}{54}$;

- A_4: „Es erscheint beim 1. Wurf Augenzahl 1, beim 2. und 3. Wurf Augenzahl 2, beim 4. Wurf Augenzahl 3“

  $P(A_4) = \frac{|A_4|}{|\Omega|} = \frac{1}{1296}$;

- A_5: „Es erscheint genau einmal Augenzahl 1, zweimal Augenzahl 2, einmal Augenzahl 3“

  $P(A_5) = \frac{|A_5|}{|\Omega|} = \frac{6\cdot2}{1296} = \frac{1}{108}$;

- A_6: „Die Augensumme ist höchstens 22“

  $P(A_6) = \frac{|A_6|}{|\Omega|} = \frac{6^4-1-4\cdot1}{1296} = \frac{1291}{1296}$;

- A_7: „Alle vier Augenzahlen sind verschieden“

  $P(A_7) = \frac{|A_7|}{|\Omega|} = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{1296} = \frac{5}{18}$;

- A_8: „Mindestens zwei Augenzahlen sind gleich“

  $$P(A_8) = \frac{|A_8|}{|\Omega|} = \frac{6\cdot(6\cdot1\cdot5\cdot4)+4\cdot(6\cdot1\cdot1\cdot5)+1\cdot(6\cdot1\cdot1\cdot1)+\frac{6}{2}\cdot(6\cdot1\cdot5\cdot1)}{1296} = \frac{13}{18};$$

- A_9: „Genau ein Zweier-Pasch wird geworfen“

  $P(A_9) = \frac{|A_9|}{|\Omega|} = \frac{6\cdot(6\cdot1\cdot5\cdot4)}{1296} = \frac{5}{9}$;

- A_{10}: „Zwei verschiedene Zweier-Pasche werden geworfen“

  $P(A_{10}) = \frac{|A_{10}|}{|\Omega|} = \frac{\frac{6}{2}\cdot(6\cdot1\cdot5\cdot1)}{1296} = \frac{5}{72}$;

0.1.2 Stochastik-Buch Seite 112, Aufgabe 51

Eine Urne enthält elf gleichartige Kugeln, von denen vier schwarz und sieben weiß sind. Der Urne werden fünf Kugeln

a) auf einmal,

b) nacheinander mit Zurücklegen

entnommen. Berechnen Sie in beiden Fällen die Wahrscheinlichkeit, zwei schwarze und drei weiße Kugeln zu ziehen.

a) $\Omega = \left\{M \;\middle|\; |M| = 5 \wedge M \subset \{1,2,3,\ldots,10,11\}\right\}$; (Laplace)

$|\Omega| = 11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7 : 5! = \binom{11}{5} = 462$;

(Nummern 1 bis 4 $\leftarrow$ schwarze Kugeln, Nummern 5 bis 11 $\leftarrow$ weiße Kugeln)

$|A| = \binom{4}{2}\binom{7}{3} = 210$;

$$\Rightarrow P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{11-4}{5-2}}{\binom{11}{5}} = \frac{5}{11};$$

b) $\Omega = \{1,2,3,\ldots,10,11\}^5$; (Laplace)

$|\Omega| = 11^5 = 161\,051$;

(Nummern 1 bis 4 $\leftarrow$ schwarze Kugeln, Nummern 5 bis 11 $\leftarrow$ weiße Kugeln)

29.12.2005

$|A| = (4\cdot4\cdot7\cdot7\cdot7)\cdot\binom{5}{2}$;

$$\Rightarrow P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \binom{5}{2}\cdot\left(\frac{4}{11}\right)^2\cdot\left(1-\frac{4}{11}\right)^3 = \frac{54880}{161051};$$

0.1.3 [Buch Seite 112, Aufgabe 53

In einem Lotterietopf befinden sich 100 Lose, von denen nur fünf gewinnen. Jemand kauft zehn Lose. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit

a) kein Gewinnlos,

b) genau ein Gewinnlos,

c) genau zwei Gewinnlose oder

d) höchstens zwei Gewinnlose

zu ziehen?

a) $P(A) = \frac{\binom{5}{0}\binom{100-5}{5-0}}{\binom{100}{5}} \approx 0{,}77;$

b) $P(B) = \frac{\binom{5}{1}\binom{100-5}{5-1}}{\binom{100}{5}} \approx 0{,}21;$

c) $P(C) = \frac{\binom{5}{2}\binom{100-5}{5-2}}{\binom{100}{5}} \approx 0{,}018;$

d) $A \cap B = A \cap C = B \cap C = \varnothing;$

$\Rightarrow P(D) = P(A) + P(B) + P(C) \approx 1{,}0;$

(Lösungen falsch; es werden zehn Kugeln gezogen!)]

0.1.4 [Buch Seite 112, Aufgabe 54

Eine Lotterie besteht aus 1000 Losen und ist mit 50 Treffern ausgestattet. Jemand kauft fünf Lose. Welche Wahrscheinlichkeit hat er, mindestens einen Treffer zu machen?

$$P(A) = \frac{\binom{50}{1}\binom{950}{5-1} + \binom{50}{2}\binom{950}{5-2} + \binom{50}{3}\binom{950}{5-3} + \binom{50}{5}\binom{950}{5-5} + \binom{50}{5}\binom{950}{5-5}}{\binom{1000}{5}} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{5}\binom{50}{k}\binom{950}{5-k}}{\binom{1000}{5}};$$

$\Rightarrow P(A) = \frac{186\,974\,260\,001}{825\,029\,125\,020} \approx 0{,}23;$]

0.1.5 Stochastik-Buch Seite 112, Aufgabe 56

Ein Laplace-Würfel wird fünfmal geworfen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, genau zweimal eine Sechs zu werfen.

$$P(A) = \frac{(1 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) \cdot \binom{5}{2}}{6^5} = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right)^3 = \frac{625}{3888};$$

0.1.6 Stochastik-Buch Seite 112, Aufgabe 57

In einer Urne liegen zwei schwarze und drei weiße gleichartige Kugeln. Vier Kugeln werden mit Zurücklegen gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden höchstens zwei schwarze Kugeln gezogen?

$$P(A) = \frac{\binom{4}{0}(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) + \binom{4}{1}(2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) + \binom{4}{2}(2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3)}{5^4} = \frac{513}{625};$$