24.01.2006

0.1 46. Hausaufgabe

0.1.1 Stochastik-Buch Seite 121, Aufgabe 4

Bei einer Röntgenreihenuntersuchung bedeute

- H_0: „Die untersuchte Person ist nicht an Tbc erkrankt“
- H_1: „Die untersuchte Person ist an Tbc erkrankt“
- T_0: „Das Röntgenbild ergibt keinen Tbc-Verdacht“
- T_1: „Das Röntgenbild ergibt einen Tbc-Verdacht“

Interpretieren Sie folgende Wahrscheinlichkeiten:

- $P_{H_1}(T_0)$: Kein Verdacht trotz Erkrankung
- $P_{H_0}(T_1)$: Verdacht trotz Gesundheit
- $P_{T_0}(H_1)$: Erkrankung trotz Fehlen eines Verdachts
- $P_{T_1}(H_0)$: Gesundheit trotz Verdacht

0.1.2 Stochastik-Buch Seite 122, Aufgabe 6

Folgende Ereignisse seien definiert:

- H: „Eine Person ist HIV-infiziert“
- $\overline{H}$: „Eine Person ist nicht HIV-infiziert“
- T: „Der HIV-Test liefert ein positives Ergebnis“
- $\overline{T}$: „Der HIV-Test liefert ein negatives Ergebnis“

Die Güte des HIV-Tests lässt sich mit den Wahrscheinlichkeiten in folgender Vierfeldertafel beschreiben:

	H	$\overline{\mathbf{H}}$	
T	$0{,}999 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$	$5{,}999 \cdot 10^{-3}$
$\overline{\mathbf{T}}$	$0{,}001 \cdot 10^{-3}$	$994 \cdot 10^{-3}$	$994{,}001 \cdot 10^{-3}$
	$1{,}000 \cdot 10^{-3}$	$999 \cdot 10^{-3}$	

Berechnen Sie daraus

a) die so genannte Sensitivität $P_H(T)$ und Spezifität $P_{\overline{H}}(\overline{T})$ des Tests.

$$P_H(T) = \frac{P(H \cap T)}{P(H)} = \frac{0{,}999 \cdot 10^{-3}}{1{,}000 \cdot 10^{-3}} = 99{,}9\,\%;$$

$$P_{\overline{H}}(\overline{T}) = \frac{P(\overline{H} \cap \overline{T})}{P(\overline{H})} = \frac{994 \cdot 10^{-3}}{999 \cdot 10^{-3}} \approx 99{,}5\,\%;$$

b) die so genannten Aussagewerte $P_T(H)$ und $P_{\overline{T}}(\overline{H})$ des Tests.

$$P_T(H) = \frac{P(H \cap T)}{P(T)} = \frac{0{,}999 \cdot 10^{-3}}{5{,}999 \cdot 10^{-3}} \approx 16{,}7\,\%;$$

$$P_{\overline{T}}(\overline{H}) = \frac{P(\overline{H} \cap \overline{T})}{P(\overline{T})} = \frac{994 \cdot 10^{-3}}{994{,}001 \cdot 10^{-3}} \approx 100\,\%;$$

0.1.3 Stochastik-Buch Seite 122, Aufgabe 7

a) Berechnen Sie bei einem normalen Würfel $P_A(B)$ für

α**)**

$$A = \{4\}; \quad B = \{1\};$$
$$\Rightarrow P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 0;$$

β**)**

$$A = \{1, 5\}; \quad B = \{1, 2, 3, 4, 6\};$$
$$\Rightarrow P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{2} = 50\,\%;$$

γ**)**

$$A = \{2, 4, 5\}; \quad B = \{1, 2, 3, 4\};$$
$$\Rightarrow P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{2}{3} \approx 66{,}7\,\%;$$

δ**)**

$$A = \{2, 3, 4, 5\}; \quad B = \{2, 3, 4\};$$
$$\Rightarrow P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{3}{4} = 75\,\%;$$

ε**)**

$$A = \{1, 3, 6\}; \quad B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\};$$
$$\Rightarrow P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{3}{3} = 1;$$

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem Wurf mit zwei Würfeln das Maximum der Augenzahlen gleich 5 ist unter der Bedingung, dass das Minimum der Augenzahlen höchstens 3 ist.

$A = \big\{(a,b) \bigm| (a < b \land a \leq 3) \lor (b < a \land b \leq 3) \lor a = b = 3\big\};$
$\Rightarrow |A| = 27;$

$B = \big\{(a,b) \bigm| (a > b \land a = 5) \lor (b > a \land b = 5) \lor a = b = 5\big\};$
$\Rightarrow |B| = 1 \cdot 4 + 4 \cdot 1 + 1 = 9;$

$\Rightarrow P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{6}{27} \approx 22{,}2\,\%;$

0.1.4 Stochastik-Buch Seite 122, Aufgabe 9

Aus einer Urne, die eine rote, fünf weiße und zwei schwarze Kugeln enthält, werden nacheinander drei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Es gelte die Laplace-Annahme. Man berechne unter Verwendung eines Ergebnisbaums die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

- A: „Die beim ersten Zug entnommene Kugel ist schwarz"

  $$P(A) = \underbrace{\frac{2}{8}\frac{6}{7}\frac{5}{6}}_{1,0,0} + \underbrace{\frac{2}{8}\frac{6}{7}\frac{1}{6}}_{1,0,1} + \underbrace{\frac{2}{8}\frac{1}{7}\frac{6}{6}}_{1,1,0} = \tfrac{1}{8 \cdot 7 \cdot 6} \cdot (2 \cdot 6) \cdot (7) = 25\,\%;$$

- B: „Die beim zweiten Zug entnommene Kugel ist schwarz"

  $$P(B) = \underbrace{\frac{6}{8}\frac{2}{7}\frac{5}{6}}_{0,1,0} + \underbrace{\frac{6}{8}\frac{2}{7}\frac{1}{6}}_{0,1,1} + \underbrace{\frac{2}{8}\frac{1}{7}\frac{6}{6}}_{1,1,0} = \tfrac{1}{8 \cdot 7 \cdot 6} \cdot (2 \cdot 6) \cdot (7) = 25\,\%;$$

- C: „Die beim dritten Zug entnommene Kugel ist schwarz"

  $$P(C) = \underbrace{\frac{6}{8}\frac{5}{7}\frac{2}{6}}_{0,0,1} + \underbrace{\frac{6}{8}\frac{2}{7}\frac{1}{6}}_{0,1,1} + \underbrace{\frac{2}{8}\frac{6}{7}\frac{1}{6}}_{1,0,1} = \tfrac{1}{8 \cdot 7 \cdot 6} \cdot (2 \cdot 6) \cdot (7) = 25\,\%;$$