26.09.2005

0.1 5. Hausaufgabe

0.1.1 Analysis-Buch Seite 15, Aufgabe 10

$\int \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x - \sin x \cos x\right) + C_1;$

$\int \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\left(\sin x - \cos x\right)^2 + C_2;$

Welcher Zusammenhang besteht zwischen C_1 und C_2?

$\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\left(\sin x - \cos x\right)^2 + C_2 - \frac{1}{2}\left(x - \sin x \cos x\right) - C_1 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\sin x \cos x + C_2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin x \cos x - C_1 = \frac{1}{4} - C_1 + C_2;$

0.1.2 Analysis-Buch Seite 15, Aufgabe 11

Gib alle Stammfunktionen von f an mit

a) $\mathrm{f}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x < 1; \\ 1 & \text{für } 1 < x; \end{cases}$

$$\int \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{F}_c(x) = \begin{cases} 1 + C_1 & \text{für } 0 \leq x < 1; \\ x + C_2 & \text{für } 1 < x; \end{cases}$$

(Nachweis der Differenzierbarkeit von F_c an der Stelle 1 unnötig, da $1 \notin D_\mathrm{f}$)

b) $\mathrm{f}(x) = x + \operatorname{sgn} x; \quad D_\mathrm{f} = \mathbb{R} \setminus \{0\};$

$$\int \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - x + C_1 & \text{für } x < 0; \\ \frac{1}{2}x^2 + x + C_2 & \text{für } x > 0; \end{cases}$$

0.1.3 Analysis-Buch Seite 15, Aufgabe 12

Zeige, dass F und G Stammfunktionen der gleichen Funktion sind:

$\mathrm{F}(x) = \sqrt{x+1};$
$\mathrm{G}(x) = \frac{x}{1+\sqrt{x+1}};$

$D_\mathrm{F} = D_\mathrm{G} = \left]-1, \infty\right[;$

Wie heißt die Konstante, durch die sich F und G unterscheiden?

$\mathrm{F}'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$;

$$\mathrm{G}'(x) = \frac{\left(1+\sqrt{x+1}\right) - x\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{1+2\sqrt{x+1}+x+1} = \frac{2\sqrt{x+1}+x+2}{2\sqrt{x+1}\left(2\sqrt{x+1}+x+2\right)} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}};$$

$\Rightarrow \mathrm{F}'(x) = \mathrm{G}'(x)$;

$$\mathrm{F}(x) - \mathrm{G}(x) = \sqrt{x+1} - \frac{x}{1+\sqrt{x+1}} = \frac{x+\sqrt{x+1}-x+1}{1+\sqrt{x+1}} = 1;$$