02.02.2006

0.1 51. Hausaufgabe

0.1.1 Stochastik-Buch Seite 146, Aufgabe 2

Es sei $0 < P(A) < 1$.

a) Begründen Sie anschaulich, warum A abhängig von sich selbst ist.

Ist A eingetreten, so wissen wir, dass A eingetreten ist; also ist $P_A(A) = 1$.

b) Weisen Sie dies mathematisch nach.

Beweis durch Widerspruch.

Annahmen:

- $0 < P(A) < 1$;
- $P(A \cap A) = P(A)P(A)$;

$P(A \cap A) = P(A) = P(A)P(A)$;

Division durch $P(A)$ mit $P(A) \neq 0$ bringt:

$1 = P(A)$;

Dieser Fall wurde von der Angabe ausgeschlossen. Also ist A abhängig von sich selbst.

0.1.2 Stochastik-Buch Seite 146, Aufgabe 3

Zeigen Sie rechnerisch:

a) Sei $A = \varnothing$ oder $A = \Omega$. Dann sind für alle $B \subseteq \Omega$ die Ereignisse A und B unabhängig. Suchen Sie eine anschauliche Begründung.

- $A = \varnothing$;
  $\forall B \subseteq \Omega\colon 0 = P(A) = P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0P(B) = 0$;
  A ist das unmögliche Ereignis. Die Frage nach der bedingten Wahrscheinlichkeit unter der Bedingung $\varnothing$ ist nicht sinnvoll, da die Bedingung niemals eintreten kann.

- $A = \Omega$;
  $\forall B \subseteq \Omega\colon P(B) = P(A \cap B) = P(A)P(B) = 1P(B) = P(B)$;
  A ist das sichere Ereignis. Sein Eintreten gibt keine Information über das Eintreten anderer Ereignisse, da es immer eintritt.

b) Sind die Ereignisse A und B unabhängig und gilt $A \subseteq B$, so folgt $P(A) = 0$ oder $P(B) = 1$.

$A \subseteq B; \Leftrightarrow A \cap B = A; \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) = P(A)P(B)$;

Damit als einzige Lösungen $P(A) = 0$ (dann $0 = 0$) oder $P(B) = 1$ (dann $P(A) = P(A)$). Andere Lösungen gibt es nicht, wie die durch $P(A)$ dividierte Gleichung zeigt:

$1 = P(B)$;

0.1.3 Stochastik-Buch Seite 146, Aufgabe 4

Beim Roulette sei A: „1. Dutzend“ ($\{1, 2, 3, \ldots, 12\}$) und B: „1. Querreihe“ ($\{1, 2, 3\}$).

a) Warum sind A und B notwendigerweise abhängig?

Weil das Eintreten von A Informationen über das Eintreten von B preisgibt ($B \subset A$).

b) Zeigen Sie die Abhängigkeit mit Hilfe der Definitionsgleichung.

$\frac{3}{|\Omega|} = P(A \cap B) \neq P(A)P(B) = \frac{12}{|\Omega|}\frac{3}{|\Omega|}$;

c) Zeigen Sie allgemein, dass gilt: $B \subset A; \Rightarrow A$ und B abhängig für $P(A) \neq 1$ und $P(B) \neq 0$.

$\forall P(A) \neq 1, P(B) \neq 0\colon B \subset A; \Rightarrow P(B) \neq P(A \cap B) = P(A)P(B)$;

(Siehe Aufgabe 3.)