07.03.2006

0.1 58. Hausaufgabe

0.1.1 Geometrie-Buch Seite 162, Aufgabe 3

$A(-5,4,-2)$, $B(6,-3,4)$, $C(10,-6,18)$, $D(0,0,22)$. Zeige durch Berechnung des Diagonalschnittpunkts, dass $ABCD$ ein ebenes Viereck ist.

Annahme: Diagonalen sind AC und BD, nicht AB und CD!

$AC : \vec{X} = \vec{A} + k\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}-5\\4\\-2\end{pmatrix} + k\begin{pmatrix}15\\-10\\20\end{pmatrix};$

$BD : \vec{X} = \vec{B} + k\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix}6\\-3\\4\end{pmatrix} + k\begin{pmatrix}-6\\3\\18\end{pmatrix};$

$\begin{pmatrix}-5\\4\\-2\end{pmatrix} + k\begin{pmatrix}15\\-10\\20\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\-3\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-6\\3\\18\end{pmatrix};$

$\Leftrightarrow k\begin{pmatrix}15\\-10\\20\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}11\\-7\\6\end{pmatrix} + l\begin{pmatrix}-6\\3\\18\end{pmatrix};$

$15k = 11 - 6l; \Leftrightarrow k = \frac{11-6l}{15};$

$-\frac{10}{15}(11-6l) = -7 + 3l; \Leftrightarrow l = \frac{1}{3};$

Die Lösungen für k und l erfüllen auch die dritte Gleichung.

0.1.2 Geometrie-Buch Seite 163, Aufgabe 5

Beschreibe die möglichen lagen der Geraden v und w im Raum, die bei bestimmter Blickrichtung so ausschauen:

a) echt parallel, windschief

b) echt parallel, identisch, schneiden sich in einem Punkt

c) schneiden sich in einem Punkt, windschief

d) windschief

e) echt parallel

f) identisch

0.1.3 Geometrie-Buch Seite 163, Aufgabe 6a

Die Ortsvektoren von $A(6,0,3)$, $B(6,12,0)$ und $C(-3,0,6)$ spannen ein Spat auf.

M ist Kantenmittelpunkt, S ist Mittelpunkt der Deckfläche.

Berechne den Schnittpunkt T von $[AM]$ und $[OS]$.

- $[AM]$: $\vec{X} = \vec{A} + k\overrightarrow{AM}; \quad k \in [0,1]$;
  - $\vec{M} = \frac{\vec{G}+\vec{C}}{2}$;
    - $\vec{G} = \vec{C} + \vec{B}$;

    $\Rightarrow \vec{M} = \frac{\vec{G}+\vec{C}}{2} = \vec{C} + \frac{1}{2}\vec{B}$;
- $[0S]$: $\vec{X} = 0 + k\overrightarrow{0S}; \quad k \in [0,1]$;
  - $\vec{S} = \frac{\vec{C}+\vec{F}}{2}$;
    - $\vec{F} = \vec{G} + \vec{A} = \vec{C} + \vec{B} + \vec{A}$;

    $\Rightarrow \vec{S} = \vec{C} + \frac{\vec{A}+\vec{B}}{2}$;

Nun sind die Streckengleichungen bekannt. Gleichsetzen bringt:

$\vec{A} + k_T\left(\vec{C} + \frac{1}{2}\vec{B} - \vec{A}\right) = 0 + l_T\left(\vec{C} + \frac{\vec{A}+\vec{B}}{2}\right)$;

Nun erweitere ich unsere Kurzschreibweisendefinition: Wird k_T als Vektor verwendet, steht k_T für $\begin{pmatrix} k_T \\ k_T \\ k_T \end{pmatrix}$, wobei die Vektorkomponenten gleich dem originalen, skaleren k_T sind.

Idee: Expandiert man die Vektorgleichung zu einem Gleichungssystem mit drei Gleichungen (je eine für jede Komponente), kommt k_T, als reelle Zahl, in jeder der Teilgleichungen vor.

Laut unserer Kurzschreibweisenvereinbarung ist es damit zulässig, folgende Ersetzung durchzuführen:

Original:
$a = \ldots;$
$b = \ldots;$
$c = \ldots;$

Ersetzung: $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$;

Diese Ersetzung führe ich nun auch durch – nur statt a, b und c steht jedesmal k_T.

Dies ermöglicht es mir, $\vec{A}$ von der linken auf die rechte Seite zu bringen, und – wichtiger – durch $\left(\vec{C} + \frac{1}{2}\vec{B} - \vec{A}\right)$ zu teilen!

$$k_T = \frac{l_T \left(\vec{C} + \frac{\vec{A}+\vec{B}}{2}\right) - \vec{A}}{\vec{C} + \frac{1}{2}\vec{B} - \vec{A}};$$

Die Komponenten dieses Ergebnisses müssen nun – sonst bricht unsere Kurzschreibweisenargumentation zusammen – alle den gleichen Wert aufweisen, damit wir ein skalares k_T erhalten.

Also setze ich an: 1. Komponente = 2. Komponente = 3. Komponente;

$$\frac{l_T \left(\vec{C}_1 + \frac{\vec{A}_1+\vec{B}_1}{2}\right) - \vec{A}_1}{\vec{C}_1 + \frac{1}{2}\vec{B}_1 - \vec{A}_1} = \frac{l_T \left(\vec{C}_2 + \frac{\vec{A}_2+\vec{B}_2}{2}\right) - \vec{A}_2}{\vec{C}_2 + \frac{1}{2}\vec{B}_2 - \vec{A}_2} = \frac{l_T \left(\vec{C}_3 + \frac{\vec{A}_3+\vec{B}_3}{2}\right) - \vec{A}_3}{\vec{C}_3 + \frac{1}{2}\vec{B}_3 - \vec{A}_3};$$

Überraschenderweise erhält man für l_T $\frac{2}{3}$ – aber ohne die Komponenten einsetzen zu müssen; l_T ist also unabhängig von $\vec{A}$, $\vec{B}$ und $\vec{C}$!

Mit $0 \leq l_T = \frac{2}{3} \leq 1$ kann auch k_T berechnet werden. Vektoriell ergibt sich für k_T $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, gemäß der obigen Definition ist es also zulässig von k_T nur als $\frac{2}{3}$ zu sprechen.

Mit bekanntem k_T und l_T ist es nun natürlich möglich, die Schnittspunktskoordinaten durch Einsetzen zu berechnen. Es ist nicht wichtig, in welche Gleichung man k_T bzw. l_T einsetzt – die Äquivalenz haben wir ja soeben bewiesen. Man erhält für T:

$T = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$;

(Definition der hier benutzten Vektordivision: $\frac{\vec{a}}{\vec{b}} = \frac{a_1}{b_1}$, falls $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$;)