24.03.2006

0.1 66. Hausaufgabe

0.1.1 Geometrie-Buch Seite 190, Aufgabe 2

Gegeben sind die Ebenen und Geraden:

$E\colon x_1 - 2x_2 + x_3 - 1 = 0; \quad F\colon 2x_1 - x_2 - x_3 - 8 = 0;$

Bestimme von jeder Gerade ihre Lage zu E und F.

Berechne gegebenenfalls den Schnittpunkt.

Umrechnung der Koordinatengleichungen von E und F in Parametergleichungen:

$E\colon \vec{X} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}; \quad F\colon \vec{X} = \begin{pmatrix}0\\-9\\0\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix};$

a) $a\colon \vec{X} = \begin{pmatrix}0\\4\\6\end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix}-1\\3\\4\end{pmatrix};$

- $D = \begin{vmatrix}2 & -1 & 1\\1 & 0 & -3\\0 & 1 & -4\end{vmatrix} = 3;$

  $D_3 = \begin{vmatrix}2 & -1 & -1\\1 & 0 & 4\\0 & 1 & 6\end{vmatrix} = -3;$

  $\alpha = \frac{D_3}{D} = -1; \Leftrightarrow a \cap E = \{S\}$ mit $\vec{S} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix};$

- $D = \begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\2 & -1 & -3\\0 & 1 & -4\end{vmatrix} = 9;$

  $D_3 = \begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\2 & -1 & 12\\0 & 1 & 6\end{vmatrix} = -18;$

  $\alpha = \frac{D_3}{D} = -2; \Leftrightarrow a \cap F = \{S\}$ mit $\vec{S} = \begin{pmatrix}2\\-2\\-2\end{pmatrix};$

b) $b\colon \vec{X} = \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix};$

- $D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3;$

  $D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3;$

  $\beta = \frac{D_3}{D} = 1; \Leftrightarrow b \cap E = \{S\}$ mit $\vec{S} = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right);$

- $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0;$

  Verbindungsvektor der Aufpunkte: $\vec{d} = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 7 \\ 0 \end{smallmatrix}\right);$

  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0; \Leftrightarrow b \cap F = \varnothing;$

c) $c \colon \vec{X} = \gamma \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right);$

- $D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0;$

  Verbindungsvektor der Aufpunkte: $\vec{d} = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right);$

  $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0; \Leftrightarrow c \cap E = \varnothing;$

- $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0;$

  Verbindungsvektor der Aufpunkte: $\vec{d} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{smallmatrix}\right);$

  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & 8 \end{vmatrix} = -16 \neq 0; \Leftrightarrow c \cap F = \varnothing;$

d) $d \colon \vec{X} = \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + \delta \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right);$

- $D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0;$

Verbindungsvektor der Aufpunkte: $\vec{d} = \left(\begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix}\right)$;

$\begin{vmatrix}2 & -1 & 3\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix} = 0; \Leftrightarrow d \cap E = d;$

- $D = \begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & -1 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix} = 0;$

  Verbindungsvektor der Aufpunkte: $\vec{d} = \left(\begin{smallmatrix}0\\10\\1\end{smallmatrix}\right)$;

  $\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 10\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix} = -9 \neq 0; \Leftrightarrow d \cap F = \varnothing;$

e) $e \colon \vec{X} = \left(\begin{smallmatrix}5\\2\\0\end{smallmatrix}\right) + \varepsilon \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right);$

- $D = \begin{vmatrix}2 & -1 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix} = 0;$

  Verbindungsvektor der Aufpunkte: $\vec{d} = \left(\begin{smallmatrix}4\\2\\0\end{smallmatrix}\right)$;

  $\begin{vmatrix}2 & -1 & 4\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix} = 0; \Leftrightarrow e \cap E = e;$

- $D = \begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & -1 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix} = 0;$

  Verbindungsvektor der Aufpunkte: $\vec{d} = \left(\begin{smallmatrix}5\\10\\0\end{smallmatrix}\right)$;

  $\begin{vmatrix}1 & 0 & 5\\ 2 & -1 & 10\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix} = 0; \Leftrightarrow e \cap F = e = E \cap F;$

f) $f \colon \vec{X} = \left(\begin{smallmatrix}4\\0\\0\end{smallmatrix}\right) + \varphi \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\2\end{smallmatrix}\right);$

- $D = \begin{vmatrix}2 & -1 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2\end{vmatrix} = -3;$

  $D_3 = \begin{vmatrix}2 & -1 & 3\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix} = 3;$

$\varphi = \frac{D_3}{D} - 1; \Leftrightarrow f \cap E = \{S\}$ mit $\vec{S} = \left(\begin{smallmatrix}5\\0\\2\end{smallmatrix}\right)$;

- $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0;$

  Verbindungsvektor der Aufpunkte: $\vec{d} = \left(\begin{smallmatrix}4\\8\\0\end{smallmatrix}\right)$;

  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0; \Leftrightarrow f \cap F = f;$

28.03.2006

0.1.2 Geometrie-Buch Seite 190, Aufgabe 5

Die Würfelecken A, C, F und H sind die Ecken eines regelmäßigen Tetraeders. (Siehe Aufgabe 17 auf Seite 177.)

a) In welchem Punkt schneidet die Raumdiagonale HB die Ebene ACF?

$A(-4,-4,0)$; $B(0,-4,0)$; $C(0,0,0)$; $F(0,-4,4)$; $E(-4,-4,4)$; $H(-4,0,4)$; $G($

HB: $\vec{X} = \vec{H} + \alpha\overrightarrow{HB}$;

ACF: $\vec{X} = \vec{C} + \lambda\overrightarrow{CA} + \mu\overrightarrow{CF}$;

$\lambda\overrightarrow{CA} + \mu\overrightarrow{CF} - \alpha\overrightarrow{HB} = \vec{H} - \vec{C}$;

$$D = \begin{vmatrix} -4 & 0 & -4 \\ -4 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 192 \neq 0;$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} -4 & 0 & -4 \\ -4 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 128; \Leftrightarrow \alpha = \frac{D_3}{D} = \frac{2}{3};$$

$$\Leftrightarrow HB \cap ACF = \{S\} \text{ mit } \vec{S} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ -\frac{8}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix};$$

b) In welchen Punkten schneidet die Gerade durch die Kantenmitten von $[GC]$ und $[AE]$ das Tetraeder?

[XXX]