28.03.2006

0.1 67. Hausaufgabe

0.1.1 Geometrie-Buch Seite 191, Aufgabe 6

$A(2,-1,0)$; $\quad g\colon \vec{X} = \begin{pmatrix}-2\\6\\1\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$; $\quad h\colon \vec{X} = \begin{pmatrix}3\\0\\-4\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}-2\\4\\5\end{pmatrix}$;

Stelle eine Gleichung der Gerade k auf, die durch A geht und g und h schneidet. Berechne die Schnittpunkte.

$k\colon \vec{X} = \vec{A} + \beta\vec{w}$;

- Gleichsetzen von $\vec{X}_k$ mit $\vec{X}_g$ und $\vec{X}_h$ bringt:

$$\begin{array}{lrcl}
\text{I.} & A_1 + \beta_g w_1 & = & G_1 + \lambda g_1; \\
\text{II.} & A_2 + \beta_g w_2 & = & G_2 + \lambda g_2; \\
\text{III.} & A_3 + \beta_g w_3 & = & G_3 + \lambda g_3; \\
\text{IV.} & A_1 + \beta_h w_1 & = & H_1 + \mu h_1; \\
\text{V.} & A_2 + \beta_h w_2 & = & H_2 + \mu h_2; \\
\text{VI.} & A_3 + \beta_h w_3 & = & H_3 + \mu h_3;
\end{array}$$

- Elimination von λ (I.):

$$\lambda = \frac{A_1 - G_1 + \beta_g w_1}{g_1};$$

- Elimination von β_g (II.):

$$A_2 + \beta_g w_2 = G_2 + \lambda g_2 = G_2 + \tfrac{g_2}{g_1}\left(A_1 - G_1 + \beta_g w_1\right);$$

$$\Leftrightarrow \beta_g = \frac{\overbrace{G_2 - A_2 + \frac{g_2}{g_1}A_1 - \frac{g_2}{g_1}G_1}^{o}}{w_2 - \frac{g_2}{g_1}w_1};$$

- Elimination von w_3 (III.):

$$w_3 = \frac{\left(w_2 - \frac{g_2}{g_1}w_1\right)\left(G_3 - A_3 + \lambda g_3\right)}{\underbrace{G_2 - A_2 + \frac{g_2}{g_1}A_1 - \frac{g_2}{g_1}G_1}_{k}};$$

- Elimination von μ (IV.):

$$\mu = \frac{A_1 - H_1 + \beta_h w_1}{h_1};$$

- Elimination von w_2 (V.):

$$w_2 = \frac{H_2 - A_2 + \mu h_2}{\beta_h} = \frac{\overbrace{H_2 - A_2 + \frac{h_2}{h_1}A_1 - \frac{h_2}{h_1}H1}^{l} + \frac{h_2}{h_1}\beta_h w_1}{\beta_h};$$

- Elimination von β_h (VI.):

$A_3 + \beta_h w_3 = \underbrace{H_3 + \frac{h_3}{h_1}A_1 - \frac{h_3}{h_1}H_1}_{m} + \frac{h_3}{h_1}\beta_h w_1;$

$$A_3 + \frac{\beta_h \left(w_2 - \frac{g_2}{g_1}w_1\right)\left(\overbrace{G_3 + \frac{g_3}{g_1}A_1 - \frac{g_3}{g_1}G_1 - A_3}^{n} + \frac{g_3}{g_1}\beta_g w_1\right)}{k} = m + \frac{h_3}{h_1}\beta_h w_1;$$

[...]

$p := \frac{h_2}{h_1} - \frac{g_2}{g_1};$

$A_3 l + A_3\beta_h p + \frac{l^2}{k}n + \frac{l}{k}n\beta_h p + \frac{g_2}{g_1}\frac{l}{k}w_1 o + \beta_h\frac{w_1}{k}pn + \beta_h\frac{w_1}{k}p\frac{g_2}{g_1}w_1 o = lm + \beta_h pm + \frac{h_3}{h_1}\beta_h + w_1 l + \frac{h_3}{h_1}\beta_h^2 w_1 p;$

- Auflösen nach β_h:

$$\beta_h = \frac{5w_1^2 + 36w_1 - 57 \pm \sqrt{25w_1^4 + 360w_1^3 - 274w_1^2 + 7296w_1 + 3249}}{50w_1};$$

- Speziell für $w_1 = 0$:

$(\beta_g, \beta_h, \lambda, \mu, w_1, w_2, w_3) = \left(\frac{10}{3}, 2, 2, \frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2}, \frac{21}{10}\right);$

$k \cap g = \left\{\begin{pmatrix}2\\4\\7\end{pmatrix}\right\}; \quad k \cap h = \left\{\begin{pmatrix}2\\2\\-\frac{3}{2}\end{pmatrix}\right\};$

0.1.2 Geometrie-Buch Seite 191, Aufgabe 7

$E\colon \vec{X} = \begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}; \quad g_a\colon \vec{X} = \sigma\begin{pmatrix}1+a\\1-a\\1\end{pmatrix};$

Welche Schargerade ist parallel zu E? Ist sie echt parallel?

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & -1-a\\ 1 & -1 & -1+a\\ 0 & 3 & -1\end{vmatrix} = 2 - 6a = 0; \Leftrightarrow a = \frac{1}{3};$$

Verbindungsvektor der Aufpunkte: $\vec{d} = \begin{pmatrix}-3\\-2\\1\end{pmatrix};$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -5; \Leftrightarrow g_{\frac{1}{3}} \cap E = \varnothing;$$