02.05.2006

0.1 74. Hausaufgabe

0.1.1 Geometrie-Buch Seite 129, Aufgabe 3

Warum ist die Menge aller Polynome von genau zweitem Grad (Koeffizient $a_2 \neq 0$) kein Vektorraum mit den Verknüpfungen vom [Vektorraum aller Polynome dritten Grades]?

Weil es keinen Nullvektor gibt ($0x^2 + 0x + 0$ wegen der Bedingung $a_2 \neq 0$ ausgeschlossen).

0.1.2 Geometrie-Buch Seite 129, Aufgabe 6

Sind folgende Mengen von Tripeln Vektorräume mit den Verknüpfungen vom [dreidimensionalen arithmetischen Vektorraum]?

a) $M = \{(a, b, c)|a = 2b \wedge a, b, c \in \mathbb{R}\}$;

Ja.

b) $M = \{(a, b, c)|a \leq b \leq c \wedge a, b, c \in \mathbb{R}\}$;

Nein: $(1, 2, 3)$ hat kein Inverses ($(-1, -2, -3) \notin M$).

c) $M = \{(a, b, c)|ab = 0 \wedge a, b, c \in \mathbb{R}\}$;

Nein: $(a, 0, c) + (0, \beta, \gamma) = (a, \beta, c + \gamma) \notin M$; ($a\beta$ nicht allgemein 0)

d) $M = \{(a, b, c)|a = b = c \wedge a, b, c \in \mathbb{R}\}$;

Ja, M ist isomorph zu $\mathbb{R}^1$.

e) $M = \{(a, b, c)|a = b^2 \wedge a, b, c \in \mathbb{R}\}$;

Nein.

$-(b^2, b, c) = (-b^2, -b, -c) \notin M$; ($(-b)^2 = b^2 \neq -b^2$)

f) $M = \{(a, b, c)|k_1 a + k_2 b + k_3 c = 0 \wedge a, b, c \in \mathbb{R}\}$; k_i seien feste reelle Zahlen.

Ja, da $k_i = 0$ möglich, ist $M = \mathbb{R}^3$ und bildet damit mit den üblichen Verknüpfungen einen Vektorraum.

0.1.3 Geometrie-Buch Seite 130, Aufgabe 7

M sei die Menge alle Paare reeller Zahlen.

Zeige: M ist kein Vektorraum über $\mathbb{R}$, wenn die Verknüpfungen $(+)$ und $(\cdot)$ so definiert werden:

a) $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d); \quad \mu \cdot (a, b) = (\mu a, b);$

Nein: $(0,0) = 0 \cdot (a, b) \neq (-1 + 1) \cdot (a, b) = (-1) \cdot (a, b) + (a, b) = (-a, b) + (a, b) = (0, 2b)$; (Verletzung des Distributivgesetzes für Skalare)

b) $(a, b) + (c, d) = (a, b); \quad \mu \cdot (a, b) = (\mu a, \mu b);$

Nein: $a + b = a \neq b = b + a$ (Verletzung des Kommutativgesetzes)

c) $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d); \quad \mu \cdot (a, b) = (\mu^2 a, \mu^2 b);$

Nein: $(-1) \cdot (a, b) = (a, b) = 1 \cdot (a, b)$; (Mehrere neutrale Elemente)