20.09.2006

0.1 94. Hausaufgabe

21.09.2006

0.1.1 Stochastik-Buch Seite 190, Aufgabe 29

Beim unabhängigen Werfen zweier unterscheidbarer Laplace-Würfel sei X die kleinste, Y die größte der Augenzahlen.

a) Stellen Sie die gemeinsame Wahrscheinlichkeitstafel auf und leiten Sie daraus die beiden Randverteilungen ab.

y\x	1	2	3	4	5	6	
1	1	0	0	0	0	0	1
2	2	1	0	0	0	0	3
3	2	2	1	0	0	0	5
4	2	2	2	1	0	0	7
5	2	2	2	2	1	0	9
6	2	2	2	2	2	1	11
	11	9	7	5	3	1	36

b) Begründen Sie anschaulich, warum X und Y nicht unabhängig sind und bestätigen Sie dies auch durch Rechnung.

$P(X = 2 \cap Y = 1) = 0 \neq \frac{9}{36}\frac{1}{36} = P(X = 2)P(Y = 1);$

c) Berechnen Sie $E(X)$, $E(Y)$ und $E(X + Y)$.

$E(X) = \frac{1}{36}\left[1 \cdot 11 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 5 + 6 \cdot 1\right] = \frac{91}{36};$

$E(Y) = \frac{1}{36}\left[1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 + 5 \cdot 9 + 6 \cdot 11\right] = \frac{161}{36};$

$E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 7;$

d) Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Augensumme Z und der Summe aus X und Y?

$E(Z) = \frac{1}{36}\left[2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + \cdots + 10 \cdot 3 + 11 \cdot 2 + 12 \cdot 1\right] = 7 = E(X+Y);$

e) Bestimmen Sie $P(X \leq 3 \cap Y \leq 4)$.

$P(X \leq 3 \cap Y \leq 4) = \frac{1}{36}\left[(1 + 0 + 0) + (2 + 1 + 0) + (2 + 2 + 1) + (2 + 2 + 2)\right] = \frac{5}{12};$

20.09.2006

0.1.2 Stochastik-Buch Seite 190, Aufgabe 31

X sei eine Zufallsgröße mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung

x	-2	0	2
$P(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Ferner sei $Y = X^2$.

Zeigen Sie, dass $E(XY) = E(X)E(Y)$ ist, obwohl X und Y abhängig sind.

$P(X=2)P(Y=4) = \frac{1}{3}\frac{2}{3} = \frac{2}{9} \neq \frac{1}{3} = P(X=2 \cap Y=4)$;

$E(X)E(Y) = \frac{1}{3}\left[(-2)+0+2\right]\cdot\frac{1}{3}\left[4+0+4\right] = 0 = \frac{1}{3}\left[(-2)\cdot 4 + 0\cdot 0 + 2\cdot 4\right] = E(XY)$;

0.1.3 Stochastik-Buch Seite 190, Aufgabe 32

Die Seiten zweier Laplace-Würfel sind mit den Zahlen -3, -2, -1, 1, 2, 3 bezeichnet. Die mit den Würfeln unabhängig geworfenen Augenzahlen seien mit X bzw. Y bezeichnet.

a) Berechnen Sie $E(X)$ und $E(Y)$.

$E(X) = E(Y) = \frac{1}{6}\left[3+2+1-1-2-3\right] = 0$;

b) Berechnen Sie $E(X^2)$ und $E(Y^2)$.

$E(X^2) = E(Y^2) = \frac{1}{6}\left[9+4+1+1+4+9\right] = \frac{14}{3}$;

c) Berechnen Sie $E(XY)$.

$E(XY) = E(X)E(Y) = 0$;

d) Berechnen Sie $E((X+Y)^2)$ zunächst im direkten Ansatz über die Aufstellung der möglichen Summen und dann nach der Summenregel.

$E((X+Y)^2) = E(X^2 + 2XY + Y^2) = \frac{14}{3} + 2\cdot 0\cdot 0 + \frac{14}{3} = \frac{28}{3}$;