

0.1 95. Hausaufgabe

0.1.1 Stochastik-Buch Seite 199, Aufgabe 35

X sei eine Zufallsgröße mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung

x	-1	0	1	2
P	8/27	1/27	10/27	8/27

Berechnen Sie $\text{Var}(X)$ mit der Verschiebungsformel.

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(X) &= E(X^2) - E^2(X) = \\
 &= \left[1 \cdot \frac{8}{27} + 0 \cdot \frac{1}{27} + 1 \cdot \frac{10}{27} + 4 \cdot \frac{8}{27} \right] - \\
 &\quad - \left[(-1) \cdot \frac{8}{27} + 0 \cdot \frac{1}{27} + 1 \cdot \frac{10}{27} + 2 \cdot \frac{8}{27} \right]^2 = \\
 &= \frac{38}{27};
 \end{aligned}$$

0.1.2 Stochastik-Buch Seite 201, Aufgabe 50

Sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ mit $P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{3}$ für $i = 1, 2, 3$.

Ferner seien drei Zufallsgrößen X, Y, Z auf (Ω, P) definiert durch

$$X(\{\omega_1\}) = 1; \quad X(\{\omega_2\}) = 2; \quad X(\{\omega_3\}) = 3;$$

$$Y(\{\omega_1\}) = 2; \quad Y(\{\omega_2\}) = 3; \quad Y(\{\omega_3\}) = 1;$$

$$Z(\{\omega_1\}) = 3; \quad Z(\{\omega_2\}) = 1; \quad Z(\{\omega_3\}) = 2;$$

a) Konstruieren Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilungen von $X+Y$, $Y+Z$, $Z+X$.

w	w1	w2	w3
x	1	2	3
y	2	3	1
z	3	1	2
x+y	3	5	4
y+z	5	4	3
z+x	4	3	5
P		1/3	

b) Begründen Sie die Abhängigkeit von X , Y , Z .

Mit Kenntnis des Werts, den eine Zufallsgröße annimmt, ist ein Elementarereignis eindeutig identifiziert. Damit kennt man auch die Werte der anderen Zufallsgrößen.

c) Berechnen Sie die Erwartungswerte und Varianzen von X , Y , Z .

$$E(X) = E(Y) = E(Z) = 2;$$

$$\text{Var}(X) = \text{Var}(Y) = \text{Var}(Z) = \frac{1}{3} [(1-2)^2 + (2-2)^2 + (3-2)^2] = \frac{2}{3};$$

d) Berechnen Sie die Erwartungswerte und Varianzen der Summen in a).

$$E(X+Y) = E(Y+Z) = E(Z+X) = E(X) + E(Y) = 4;$$

$$\text{Var}(X+Y) = \text{Var}(Y+Z) = \text{Var}(Z+X) = \frac{1}{3} [(3-4)^2 + (5-4)^2 + (4-4)^2] = \frac{2}{3};$$

e) Berechnen Sie den Erwartungswert von $X \cdot Y$.

$$E(XY) = \frac{1}{3} [2 + 6 + 3] = \frac{11}{3};$$

f) Was lässt sich über die Verteilung von $X + Y + Z$ aussagen?

$$W_{X+Y+Z} = \{6\};$$

$$P(X+Y+Z=6) = 1;$$

g) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von $X + Y - Z$ und $\frac{Z}{|X-Y|}$.

$x+y-z$	0	2	4
P		1/3	
$z/ x-y $		1	3
P		2/3	1/3