26.09.2006

0.1 96. Hausaufgabe

0.1.1 Stochastik-Buch Seite 186, Aufgabe 13

Ein Spielautomat mit zwei Scheiben, deren zehn kongruente Kreisausschnitte mit dem Nummern 0 bis 9 nach dem Drehen zufällig stehen bleiben, schüttet folgende Gewinne aus:

5 €, wenn zweimal die 0 im Fenster steht, 2 € wenn irgendein anderes Paar gleicher Zahlen auftritt, 0,50 €, wenn genau eine 0 auftritt.

In allen anderen Fällen geht der Einsatz verloren.

a) Berechnen Sie den Erwartungswert der Ausschüttung.

$E(X) = \frac{1}{10^2} \left[5\,€ \cdot 1 + 2\,€ \cdot 9 + 0{,}50\,€ \cdot (1 \cdot 9 + 9 \cdot 1) \right] = 32\,¢;$

b) Ist der Einsatz von 0,50 € für den Automatenbesitzer rentabel?

Ja, weil $50\,¢ > 32\,¢$.

0.1.2 Stochastik-Buch Seite 188, Aufgabe 20

Ein Gerät bestehe aus drei komplizierten Systemen, die unabhängig voneinander ausfallen können. Die auf die Wartungszeit bezogene Ausfallswahrscheinlichkeits für jedes der Systeme sei 1 %. Die Zufallsgröße X kennzeichne die Anzahl der ausfallenden Systeme.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X.

$P(X = 0) = (1 - 1\,\%)^3\,;$

$P(X = 1) = 3 \cdot 1\,\% \cdot (1 - 1\,\%)^2\,;$

$P(X = 2) = 3 \cdot (1\,\%)^2 \cdot (1 - 1\,\%)\,;$

$P(X = 3) = (1\,\%)^3\,;$

b) Berechnen Sie die erwartete Anzahl von ausfallenden Systemen.

$E(X) = \cdots = 0{,}03 = 3\,\% = E(A_1) + E(A_2) + E(A_3);$

0.1.3 Stochastik-Buch Seite 189, Aufgabe 24

Welche Augensumme kann man beim zehnmaligen unabhängigen Werfen eines Laplace-Würfels erwarten?

$E(X_1 + X_2 + \cdots + X_{10}) = 10E(X) = 35;$

0.1.4 Stochastik-Buch Seite 202, Aufgabe 56

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein gerade 60-jähriger Mann im Laufe des folgenden Jahres stirt, ist ungefähr $0{,}02$. Der entsprechende Wert für eine 60-jährige Frau ist ungefähr $0{,}01$.

a) Ein 60-jähriger Mann schließt eine Risikoversicherung für ein Jahr ab über eine Summe von 10000 €. Die Versicherungsprämie sei 300 €. X kennzeichne den Reingewinn oder den Verlust, den die Versicherung an einem solchen Vertrag erzielt. Die Anzahl der unter gleichen Bedingungen Versicherten sei sehr groß. Konstruieren Sie die Wahrscheinlichkeitstabelle und berechnen Sie $E(X)$.

$E(X) = 300\,€ \cdot (1 - 2\,\%) + (300\,€ - 10000\,€) \cdot 2\,\% = 100\,€;$

b) Eine 60-jährige Frau schließt einen ebensolchen Vertrag über 10000 € ab. Y sei der Reingewinn bzw. Verlust der Versicherung. Wie hoch muss die Versicherung die Jahresprämie festsetzen, wenn $E(X) = E(Y)$ sein soll?

$E(Y) = p \cdot (1 - 1\,\%) + (p - 10000\,€) \cdot 1\,\% = E(X);$

$\Leftrightarrow p = \frac{E(X) + 10000\,€ \cdot 1\,\%}{1 - 1\,\% + 1\,\%} = E(X) + 100\,€ = 200\,€;$

c) Konstruieren sie die gemeinsame Wahrscheinlichkeitstabelle für X und Y unter der Voraussetzung, dass es sich um zwei unabhängige Personen handelt, und leiten Sie daraus die Wahrscheinlichkeitsverteilung für $X + Y$ ab.

y\x	300 €	-9700 €	
200 €	97 %	2 %	99 %
-9800 €	1 %	0 %	1 %
	98 %	2 %	100 %

x+y	-19500 €	-9500 €	500 €
P	0 %	3 %	97 %

d) Berechnen Sie $E(X+Y)$ mithilfe der Wahrscheinlichkeitsverteilung und dann nach der Summenregel.

$E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 200\,€$;