Hausaufgaben

Ingo Blechschmidt

18. April 2007

Inhaltsverzeichnis

14.09.2005

1 Hausaufgaben

1.1 1. Hausaufgabe

1.1.1 Analysis-Buch Seite 14, Aufgabe 1

Gib´ drei verschiedene Stammfunktionen an zu

a) $\mathrm{f}\colon x \mapsto x^5; \Rightarrow$

$\mathrm{F}\colon x \mapsto \frac{1}{6}x^6 + C;$

b) $\mathrm{f}\colon x \mapsto \sin x; \Rightarrow$

$\mathrm{F}\colon x \mapsto -\cos x + C;$

c) $\mathrm{f}\colon x \mapsto 3x^2 - 7x + 19; \Rightarrow$

$\mathrm{F}\colon x \mapsto x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 19x + C;$

d) $\mathrm{f}\colon x \mapsto 2\sin x + \cos x; \Rightarrow$

$\mathrm{F}\colon x \mapsto -2\cos x + \sin x + C;$

e) $\mathrm{f}\colon x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}; \Rightarrow$

$\mathrm{F}\colon x \mapsto 2x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C;$

f) $\mathrm{f}\colon x \mapsto 0; \Rightarrow$

$\mathrm{F}\colon x \mapsto C;$

D_f sei jeweils maximal gewählt.

1.1.2 Analysis-Buch Seite 14, Aufgabe 2

Berechne

a) $\int x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 + C;$

b) $\int (x^2 + 1) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 + x + C;$

c) $\int (3x^2 + 2x + 1) \,\mathrm{d}x = x^3 + x^2 + x + C;$

d) $\int (\cos x - \sin x) \,\mathrm{d}x = \sin x + \cos x + C;$

e) $\int \mathrm{d}x = x + C;$

f) $\int 0 \,\mathrm{d}x = C;$

1.1.3 Analysis-Buch Seite 14, Aufgabe 3

Bestimme diejenige Stammfunktion von f, deren Graph durch P verläuft.

a) $\mathrm{f}\colon x \mapsto \frac{1}{2}x; \quad P(-2, 4); \Rightarrow$

$\mathrm{F}_C(x_P) = y_P; \Rightarrow \frac{1}{4}x_P^2 + C = y_P; \Rightarrow C = y_P - \frac{1}{4}x_P^2 = 4 - 1 = 3; \Rightarrow$

$\mathrm{F}_3\colon x \mapsto \frac{1}{4}x^2 + 3;$

b) $\mathrm{f}\colon x \mapsto x^2 - 2x - 1; \quad P(3, -2); \Rightarrow$

$\mathrm{F}_C(x_P) = y_P; \Rightarrow \frac{1}{3}x_P^3 - x_P^2 - x_P + C = y_P; \Rightarrow C = y_P - \frac{1}{3}x_P^3 + x_P^2 + x_P = 1;$
$\Rightarrow$

$\mathrm{F}_1\colon x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - x^2 - x + 1;$

c) $\mathrm{f}\colon x \mapsto \cos x + 1; \quad P(\pi, \pi); \Rightarrow$

$\mathrm{F}_C(x_P) = y_P; \Rightarrow \sin x_P + x_P + C = y_P; \Rightarrow C = y_P - \sin x_P - x_P = \pi - 0 - \pi = 0;$

$\mathrm{F}_0\colon x \mapsto \sin x + x;$

d) $\mathrm{f}\colon x \mapsto 0; \quad P(1980, 1980); \Rightarrow$

$\mathrm{F}_{1980}\colon x \mapsto 1980;$

17.09.2005

1.2 2. Hausaufgabe

1.2.1 Analysis-Buch Seite 14, Aufgabe 4

Berechne

a) $\int \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \int |x|\,\mathrm{d}x = \mathrm{F}_C(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + C & \text{für } x > 0; \\ C & \text{für } x = 0; \\ -\frac{1}{2}x^2 + C & \text{für } x < 0; \end{cases}$

Diffbarkeit für $x > 0$ und $x < 0$ gesichert, Nachweis des Falles für $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0+} \mathrm{F}'(x) = \lim\limits_{x \to 0-} \mathrm{F}'(x) = 0 = \mathrm{f}(0); \\ \mathrm{f} \text{ stetig bei } 0; \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Ermitteltes } \mathrm{F}_C \text{ ok}$$

b) $\int \operatorname{sgn} x\,\mathrm{d}x = \begin{cases} x + C_1 & \text{für } x > 0; \\ -x + C_2 & \text{für } x < 0; \end{cases} \quad x \neq 0;$

1.2.2 Analysis-Buch Seite 14, Aufgabe 5

$$\mathrm{f}\colon x \mapsto \begin{cases} x & \text{für } x \leq 0; \\ x^2 & \text{für } x > 0; \end{cases}$$

Berechne $\int \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x$.

$$\int \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{F}_C(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + C & \text{für } x \leq 0; \\ \frac{1}{3}x^3 + C & \text{für } x > 0; \end{cases}$$

Überprüfung des Falles für $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0-} \mathrm{F}'(x) = \lim\limits_{x \to 0+} \mathrm{F}'(x) = \mathrm{f}(0); \\ \mathrm{F}_C \text{ stetig bei } 0; \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Ermitteltes } \mathrm{F}_C \text{ ok}$$

1.2.3 Analysis-Buch Seite 14, Aufgabe 6

Gegeben sind die Funktionen a big g, bestimme die Scharen der zugehörigen Stammfunktionen A_c bis G_c.

$\mathrm{a}(x) = 6 - \frac{1}{24}x^2; \quad \Rightarrow \mathrm{A}_c(x) = 6x - \frac{1}{72}x^3 + C;$

$\mathrm{b}(x) = x^3 - 3x - 2; \quad \Rightarrow \mathrm{B}_c(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 - 2x + C;$

$\mathrm{c}(x) = -x^3 + 3x^2 - 2; \quad \Rightarrow \mathrm{C}_c(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 - 2x + C;$

$\mathrm{d}(x) = x^4 - 6x^2 + 5; \quad \Rightarrow \mathrm{D}_c(x) = \frac{1}{5}x^5 - 2x^3 + 5x + C;$ 19.09.2005

$\mathrm{e}(x) = \frac{1}{9}x^4 - \frac{8}{9}x^3 + 2x^2; \quad \Rightarrow \mathrm{E}_c(x) = \frac{1}{45}x^5 - \frac{2}{9}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + C;$

$\mathrm{f}(x) = \frac{1}{40}x^5 - \frac{1}{8}x^4; \quad \Rightarrow \mathrm{F}_c(x) = \frac{1}{240}x^6 - \frac{1}{40}x^5 + C;$

$\mathrm{g}(x) = -\frac{1}{16}x^6 + \frac{3}{8}x^4; \quad \Rightarrow \mathrm{G}_c(x) = -\frac{1}{112}x^7 + \frac{3}{40}x^5 + C;$

1.3 3. Hausaufgabe

1.3.1 Analysis-Buch Seite 14, Aufgabe 7

Gegeben sind die Funktionen h_a bis n_a; Bestimme die Scharen der zugehörigen Stammfunktionen H_a bis N_a.

$\mathrm{h}_a(x) = \frac{1}{2}x\left(x-a\right)^2; \quad \Rightarrow \mathrm{H}_a(x) = \frac{1}{36}x^3 - \frac{1}{18}ax^3 + \frac{1}{24}ax^2 + C;$

$\mathrm{i}_a(x) = \frac{2}{3a^2}x^3 - \frac{2}{a}x^2; \quad \Rightarrow \mathrm{I}_a(x) = \frac{1}{6a^2}x^4 - \frac{2}{3a}x^3 + C;$

$\mathrm{j}_s(x) = \frac{1}{6s}x^3 - x^2 + \frac{3}{2}sx; \quad \Rightarrow \mathrm{J}_s(x) = \frac{1}{24s}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{4}sx^2 + C;$

$\mathrm{k}_t(x) = \frac{1}{81}x^2\left(3x^2 - tx + 3t\right); \quad \Rightarrow \mathrm{K}_t(x) = \frac{1}{135}x^5 - \frac{1}{324}tx^4 + \frac{1}{81}tx^3 + C;$

$\mathrm{l}_k(x) = \frac{1}{2}x\left[x^2 - 2kx + k^2 - 4\right]; \quad \Rightarrow \mathrm{L}_k(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{9}kx^3 + \frac{1}{4}k^2x^2 - x^2 + C;$

$\mathrm{m}_k(x) = \frac{x}{729}\left(8k^3x^2 - 216k^2x + 1215k + 729\right); \quad \Rightarrow \mathrm{M}_k(x) = \frac{2}{729}k^3x^4 - \frac{8}{81}k^2x^3 + \frac{5}{6}kx^2 + \frac{1}{2}x^2 + C$

$\mathrm{n}_a(x) = \frac{1}{8}x\left(x^2 - 3ax + 3a^2x - 12\right); \quad \Rightarrow \mathrm{N}_a(x) = \frac{1}{32}x^4 - \frac{1}{8}ax^3 + \frac{1}{8}a^2x^3 - \frac{3}{4}x^2 + C;$

1.3.2 Analysis-Buch Seite 15, Aufgabe 8

Berechne

a) $\int (ax + a)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}ax^2 + ax + C;$

b) $\int (ax+a)\,\mathrm{d}a = \frac{1}{2}xa^2 + \frac{1}{2}a^2 + C;$

c) $\int (ax+a)\,\mathrm{d}t = (ax+a)\,t + C;$

20.09.2005

1.4 4. Hausaufgabe

1.4.1 Analysis-Buch Seite 15, Aufgabe 9

Zeige die Richtigkeit von

a) $\int (x^2 - x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + C;$

$\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + C\right)' = x^2 - x;$

b) $\int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C;$

$\left(\frac{2}{3}x\sqrt{x} + C\right)' = \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C\right)' = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x};$

c) $\int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{x} + C;$

$\left(-\frac{1}{x} + C\right)' = \frac{1}{2}x^2;$

d) $\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + C;$

$\left[\frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + C\right]' = \frac{1}{2}(1 - \cos x \cos x + \sin x \sin x) = \frac{1}{2}\left(1 - 1 + \sin^2 x + \sin^2 x\right) = \sin^2 x;$

e) $\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x) + C;$

$\left[\frac{1}{2}(x + \sin x \cos x) + C\right]' = \frac{1}{2}(1 + \cos x \cos x - \sin x \sin x) = \frac{1}{2}(1 - 1 + \cos^2 x + \cos^2 x) = \cos^2 x;$

f) $\int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x = -\sqrt{a^2 - x^2} + C;$

$$\left(-\sqrt{a^2 - x^2} + C\right)' = -\frac{1}{2\sqrt{a^2 - x^2}}(0 - 2x) = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}};$$

26.09.2005

1.5 5. Hausaufgabe

1.5.1 Analysis-Buch Seite 15, Aufgabe 10

$\int \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x - \sin x \cos x\right) + C_1;$

$\int \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\left(\sin x - \cos x\right)^2 + C_2;$

Welcher Zusammenhang besteht zwischen C_1 und C_2?

$\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\left(\sin x - \cos x\right)^2 + C_2 - \frac{1}{2}\left(x - \sin x \cos x\right) - C_1 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\sin x \cos x + C_2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin x \cos x - C_1 = \frac{1}{4} - C_1 + C_2;$

1.5.2 Analysis-Buch Seite 15, Aufgabe 11

Gib alle Stammfunktionen von f an mit

a) $\mathrm{f}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x < 1; \\ 1 & \text{für } 1 < x; \end{cases}$

$\int \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{F}_c(x) = \begin{cases} 1 + C_1 & \text{für } 0 \leq x < 1; \\ x + C_2 & \text{für } 1 < x; \end{cases}$

(Nachweis der Differenzierbarkeit von F_c an der Stelle 1 unnötig, da $1 \notin D_\mathrm{f}$)

b) $\mathrm{f}(x) = x + \operatorname{sgn} x; \quad D_\mathrm{f} = \mathbb{R} \setminus \{0\};$

$\int \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - x + C_1 & \text{für } x < 0; \\ \frac{1}{2}x^2 + x + C_2 & \text{für } x > 0; \end{cases}$

1.5.3 Analysis-Buch Seite 15, Aufgabe 12

Zeige, dass F und G Stammfunktionen der gleichen Funktion sind:

$\mathrm{F}(x) = \sqrt{x+1};$
$\mathrm{G}(x) = \frac{x}{1+\sqrt{x+1}};$

$D_\mathrm{F} = D_\mathrm{G} = \left]-1, \infty\right[;$

Wie heißt die Konstante, durch die sich F und G unterscheiden?

$\mathrm{F}'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}};$

$$\mathrm{G}'(x) = \frac{\left(1+\sqrt{x+1}\right) - x\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{1+2\sqrt{x+1}+x+1} = \frac{2\sqrt{x+1}+x+2}{2\sqrt{x+1}\left(2\sqrt{x+1}+x+2\right)} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}};$$

$\Rightarrow \mathrm{F}'(x) = \mathrm{G}'(x);$

$$\mathrm{F}(x) - \mathrm{G}(x) = \sqrt{x+1} - \frac{x}{1+\sqrt{x+1}} = \frac{x+\sqrt{x+1}-x+1}{1+\sqrt{x+1}} = 1;$$ 03.10.2005

1.6 6. Hausaufgabe

1.6.1 Analysis-Buch Seite 36, Aufgabe 14

Berechne Ober- und Untersummen für eine Unterteilung in 2, 4 und 8 Streifen für die Fläche

- $F := \{(x,y) | 0 \leq x \leq 4 \wedge 0 \leq y \leq x\};$

  $\mathrm{f}(x) = x;$

  $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{4}{n} \cdot \mathrm{f}\left(\frac{4}{n} i\right);$

  $s_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{4}{n} \cdot \mathrm{f}\left(\frac{4}{n}(i-1)\right);$

  $\Rightarrow S_2 = 12; \quad S_4 = 10; \quad S_8 = 9;$
  $\Rightarrow s_2 = 4; \quad s_4 = 6; \quad s_8 = 7;$

- $G := \left\{(x,y) | 1 \leq x \leq 2 \wedge 0 \leq y \leq \frac{1}{2}x + 1\right\};$

  $\mathrm{f}(x) = \frac{1}{2}x + 1;$

  $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \mathrm{f}\left(1 + \frac{i}{n}\right);$

  $s_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \mathrm{f}\left(1 + \frac{i-1}{n}\right);$

05.10.2005

1.7 7. Hausaufgabe

1.7.1 Analysis-Buch Seite 35, Aufgabe 6

$\mathrm{f}(x) := -x^2 + 4x - 3; \quad D_\mathrm{f} = [1,3];$

Gib die Flächenfunktion $\mathrm{A}_{\frac{3}{3}}$ an und berechne damit die Flächen

a) $\left\{(x,y)|\frac{3}{2} \leq x \leq 2 \wedge 0 \leq y \leq \mathrm{f}(x)\right\}$

$$A = \int\limits_{\frac{3}{2}}^{2} \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{11}{24};$$

b) $\left\{(x,y)|\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{2} \wedge 0 \leq y \leq \mathrm{f}(x)\right\}$

$$A = \int\limits_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{11}{12};$$

c) $\left\{(x,y)|\frac{3}{2} \leq x \leq 3 \wedge 0 \leq y \leq \mathrm{f}(x)\right\}$

$$A = \int\limits_{\frac{3}{2}}^{3} \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{9}{8};$$

1.7.2 Analysis-Buch Seite 35, Aufgabe 7

$\mathrm{f}(x) := -x^2 + 4x - 3; \quad D_{\mathrm{f}} = [1,3]\,;$

Berechne die Flächenfunktionen

a) $\mathrm{A}_1(b) = \int\limits_{1}^{b} \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3} - \frac{b^3-6b^2+9b}{3};$

b) $\mathrm{A}_2(b) = \int\limits_{2}^{b} \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3} - \frac{b^3-6b^2+9b}{3};$

c) $\mathrm{A}_{\frac{3}{2}}(b) = \int\limits_{\frac{3}{2}}^{b} \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{5}{24} - \frac{b^3-6b^2+9b}{3};$

1.7.3 Analysis-Buch Seite 36, Aufgabe 8

$\mathrm{f}(x) := -x^2 + 4x - 3; \quad D_{\mathrm{f}} = [1,3]\,;$

Berechne folgende Flächen (vgl. Aufgabe 7!)

a) $\{(x,y)|1 \leq x \leq 2 \wedge 0 \leq y \leq \mathrm{f}(x)\}$

$$A = \int\limits_{1}^{2} \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{2}{3};$$

b) $\{(x,y)|2 \leq x \leq 3 \wedge 0 \leq y \leq \mathrm{f}(x)\}$

$$A = \int\limits_{2}^{3} \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{2}{3};$$

c) $\left\{(x,y)|\tfrac{5}{2} \leq x \leq 3 \wedge 0 \leq y \leq \mathrm{f}(x)\right\}$

$$A = \int\limits_{\frac{5}{2}}^{3} \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{5}{24};$$

d) $\{(x,y)|2{,}9 \leq x \leq 2{,}9 \wedge 0 \leq y \leq \mathrm{f}(x)\}$

$$A = \int\limits_{2{,}9}^{2{,}9} \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = 0;$$

08.10.2005

1.8 8. Hausaufgabe

1.8.1 Analysis-Buch Seite 36, Aufgabe 17a

Berechne mit Hilfe der Streifenmetnode den Flächeninhalt von
$F := \{(x,y)\,|\,0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq 1 - x^2\}\,;$
[$\sum\limits_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2};\quad \sum\limits_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$]
$\mathrm{f}(x) = 1 - x^2;$

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{n}\mathrm{f}\left(\tfrac{i-1}{n}\right) = \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[1 - \tfrac{i^2-2i+1}{n^2}\right] = \tfrac{n\cdot 1}{n} + \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} -\tfrac{i^2-2i+1}{n^2} = \\
&= 1 - \tfrac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}\left[i^2 - 2i + 1\right] = 1 - \tfrac{1}{n^3}\left(\sum_{i=1}^{n} i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} i + n\right) = \\
&= 1 - \tfrac{1}{n^3}\left[\tfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + n\,(n+1) + n\right] = 1 - \tfrac{2n^2+9n+13}{6n^2};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_n &= \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{n}\mathrm{f}\left(\tfrac{i}{n}\right) = \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[1 - \tfrac{i^2}{n^2}\right] = \tfrac{n\cdot 1}{n} - \tfrac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \\
&= 1 - \tfrac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = 1 - \tfrac{2n^2+n+2n+1}{6n^2} = 1 - \tfrac{2n^2+3n+1}{6n^2};
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3};\\ \lim\limits_{n\to\infty} s_n = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3};\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{2}{3} =: A;$$

11.10.2005

1.9 9. Hausaufgabe

1.9.1 Analysis-Buch Seite 36, Aufgabe 16

$\mathrm{f}\colon x \mapsto 4 - x;\quad D_\mathrm{f} = [0, 4]\,;$

Berechne die Ober- und Untersumme für eine Einteilung in vier Streifen für die Fläche $F = \{(x, y) \,|\, 0 \le x \le 4 \wedge 0 \le y \le \mathrm{f}(x)\}$. Beachte die Monotonie von G_f!

$S_n = \frac{4}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{f}\left(4\frac{i-1}{n}\right);$

$s_n = \frac{4}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{f}\left(4\frac{i}{n}\right);$

$\Rightarrow S_4 = 10;\quad s_4 = 6;$

1.9.2 Analysis-Buch Seite 36, Aufgabe 19

Schreibe A_k als Integralfunktion $x \mapsto \int_k^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t$ mit geeigneter Integrandenfunktion f.

a) $\mathrm{A}_0(x) = x;$

$$\mathrm{A}_k(x) = \int\limits_k^x 1\,\mathrm{d}t;$$

b) $\mathrm{A}_0(x) = 2x + x^2;$

$$\mathrm{A}_k(x) = \int\limits_k^x (2 + 2t)\,\mathrm{d}t;$$

c) $\mathrm{A}_0(x) = \sin x;$

$$\mathrm{A}_k(x) = \int\limits_k^x \cos t\,\mathrm{d}t;$$

d) $\mathrm{A}_1(x) = 1 - x;$

$$\mathrm{A}_k(x) = \int\limits_k^x -1\,\mathrm{d}t;$$

e) $\mathrm{A}_1(x) = x^2 - 1;$

$$\mathrm{A}_k(x) = \int\limits_k^x 2t\,\mathrm{d}t;$$

f) $\mathrm{A}_{-1}(x) = -x^2 + 1;$

$$\mathrm{A}_k(x) = \int\limits_k^x -2t\,\mathrm{d}t;$$

12.10.2005

1.10 10. Hausaufgabe

1.10.1 Analysis-Buch Seite 37, Aufgabe 33

$\mathrm{f}_a(x) := x^3 - ax; \quad D_{\mathrm{f}_a} = \mathbb{R}; \quad a \geq 0;$

a) Diskutiere die Kurvenschar (Nullstellen, Extrema, Wendepunkte) und zeichne die Graphen von f_3 und f_0.

$\mathrm{f}_a(x) = x^3 - ax = x\,(x + \sqrt{a})\,(x - \sqrt{a})\,;$

$\Rightarrow N_1(0,0); \quad N_2(-\sqrt{a},0); \quad N_3(\sqrt{a},0);$

$\mathrm{f}_a'(x) = 3x^2 - a = 3\left(x + \sqrt{\frac{a}{3}}\right)\left(x - \sqrt{\frac{a}{3}}\right);$

$$\Rightarrow \begin{cases} P_{\mathrm{HOP}}\left(-\sqrt{\frac{a}{3}}, -\left(\frac{a}{3}\right)^{\frac{3}{2}} + a\sqrt{\frac{a}{3}}\right), \quad P_{\mathrm{TIP}}\left(\sqrt{\frac{a}{3}}, \left(\frac{a}{3}\right)^{\frac{3}{2}} - a\sqrt{\frac{a}{3}}\right) & \text{für } a \neq 0; \\ P_{\mathrm{TEP}}(0,0) & \text{für } a = 0; \end{cases}$$

$\mathrm{f}_a''(x) = 6x;$

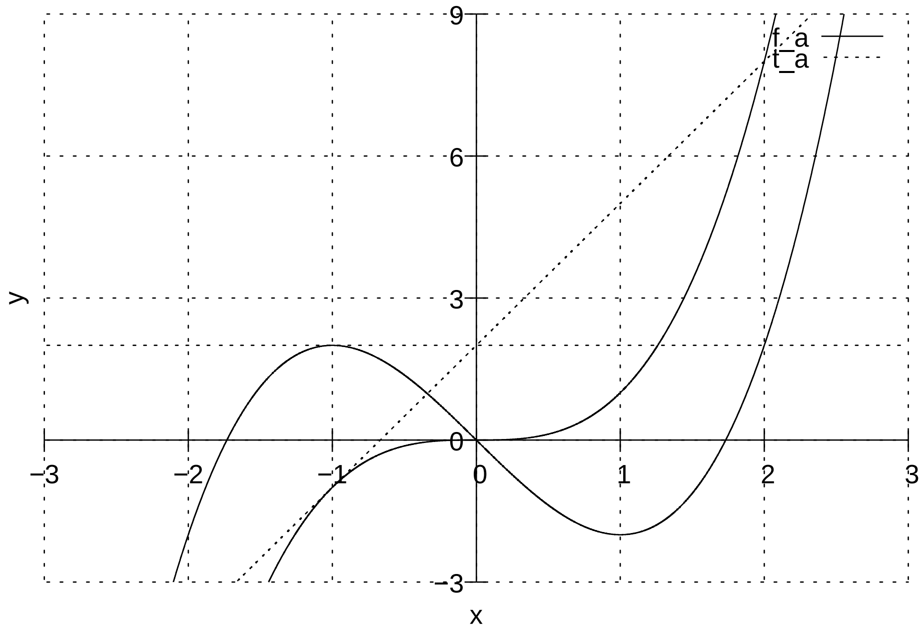
$\Rightarrow P_{\mathrm{WEP}}(0,0);$

b) t_a sei die Tangente an G_{f_a} im Punkt $B(-1,b)$. Berechne den Inhalt des Flächenstücks zwischen t_a und G_{f_a} für $a = 3$, $a = 0$ und allgemein.

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{t}_a(x) - \mathrm{f}_a(-1)}{x+1} = \mathrm{f}_a'(-1) = 3 - a; \Rightarrow \mathrm{t}_a(x) = x\,(3-a) + 2;$$

$\mathrm{t}_a(d) = \mathrm{f}_a(d); \Rightarrow 0 = d^3 - 3d - 2 = (d-2)\,(d+1)^2\,;$

$$A = \int\limits_{-1}^{2} \mathrm{t}_a(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{-1}^{2} \mathrm{f}_a(x)\,\mathrm{d}x = \ldots = \tfrac{27}{4};$$



17.10.2005

„Einer vons uns beiden ist doof“

„Gehen können so viel wie sie wollen *rausdrück*“ 18.10.2005

Elementargeometrische Lösung von b) für $a = 3$:

$A = 1 \cdot 2 - \int\limits_{-1}^{0} \mathrm{f}_3(x)\,\mathrm{d}x + 2 \cdot 2 - \int\limits_{\sqrt{3}}^{2} \mathrm{f}_3(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{\sqrt{3}} -\mathrm{f}_3(x)\,\mathrm{d}x = 2 - \frac{5}{4} + 4 - \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{27}{4};$ 17.10.2005

1.11 11. Hausaufgabe

1.11.1 Analysis-Buch Seite 36, Aufgabe 11

$\mathrm{A}_k\colon x \mapsto x + 1; \quad D_{\mathrm{A}_k} = [-1, \infty[\,;$

A_k ist eine Flächenfunktion. Welche Randfunktion f begrenzt die betrachtete Fläche? Welchen Wert hat k? Skizze!

$\mathrm{f}(x) = \mathrm{A}_k'(x) = 1;$

$\mathrm{A}_k(x) = \int\limits_{k}^{x} \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(k) = x + 1 - k - 1 = x - k = \mathrm{A}_k(x) = x + 1; \Rightarrow k = -1;$

(alternativ: $\mathrm{A}_k(k) = 0; \Rightarrow k = -1;$)

1.11.2 Analysis-Buch Seite 36, Aufgabe 12

$\mathrm{f}\colon x \mapsto 2x + 1;\quad D_{\mathrm{f}} = \left[-\frac{1}{2}, \infty\right[;$

Gib drei verschiedene Flächenfunktionen an, bei denen f eine Randfunktion ist. Gib jeweils auch k an.

$\mathrm{A}_k(x) = \int\limits_k^x \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \left[x^2 + x\right]_k^x = x^2 + x - k^2 - k;\quad k \in D_{\mathrm{f}};$ 18.10.2005

1.12 12. Hausaufgabe

1.12.1 Analysis-Buch Seite 36, Aufgabe 20

Berechne die beiden ersten Ableitungen folgender Integralfunktionen

a) $\mathrm{a}(x) := \int\limits_0^x t\,\mathrm{d}t; \Rightarrow \mathrm{a}''(x) = 1;$

b) $\mathrm{b}(x) := \int\limits_1^x t\,\mathrm{d}t; \Rightarrow \mathrm{b}''(x) = 1;$

c) $\mathrm{c}(x) := \int\limits_0^x (t^2 - t + 1)\,\mathrm{d}t; \Rightarrow \mathrm{c}''(x) = 2x - 1;$

d) $\mathrm{d}(x) := \int\limits_0^x \sin t\,\mathrm{d}t; \Rightarrow \mathrm{d}''(x) = \cos x;$

e) $\mathrm{e}(x) := \int\limits_0^x \sqrt{t}\,\mathrm{d}t; \Rightarrow \mathrm{e}''(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}};$

f) $\mathrm{f}(x) := \int\limits_{1054}^x (t^3 - 1)\cos t\,\mathrm{d}t; \Rightarrow \mathrm{f}''(x) = -3x^2 \sin x + \sin x;$

1.12.2 Analysis-Buch Seite 36, Aufgabe 22

Berechne und deute geometrisch

a) $\int\limits_0^2 x\,\mathrm{d}x = 2;$

b) $\int\limits_0^2 (x+1)\,\mathrm{d}x = 4;$

c) $\int\limits_0^2 (2-x)\,\mathrm{d}x = 2;$

d) $\int\limits_0^2 (3-x)\,\mathrm{d}x = 4;$

1.12.3 Analysis-Buch Seite 37, Aufgabe 24

Berechne

a) $\int\limits_0^1 (x^2+x)\,\mathrm{d}x = \frac{5}{6};$

b) $\int\limits_1^2 (x^2+x)\,\mathrm{d}x = \frac{23}{6};$

c) $\int\limits_0^2 (x^2+x)\,\mathrm{d}x = \frac{14}{3};$

1.12.4 Analysis-Buch Seite 37, Aufgabe 25

Berechne die Fläche, die von der Parabel mit der Gleichung $y = 1 - x^2$ und der x-Achse begrenzt wird.

$\int\limits_{-1}^1 (1-x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3};$ 19.10.2005

1.13 13. Hausaufgabe

1.13.1 Analysis-Buch Seite 37, Aufgabe 27

Gib eine Integralfunktion zur Integrandenfunktion $\mathrm{f}\colon x \mapsto x^2; \quad D_\mathrm{f} = \mathbb{R}$ an, die

a) an der Stelle 1 den Funktionswert 0

b) an der Stelle a den Funktionswert b hat.

$\varphi\colon x \mapsto \varphi(x) = \int\limits_k^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}k^3;$

$\varphi(a) = \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{3}k^3 = b; \Rightarrow k = \sqrt[3]{a^3 - 3b};$

$\Rightarrow \int\limits_{\sqrt[3]{a^3-3b}}^{x} \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t;$

$\Rightarrow \int\limits_{\sqrt[3]{1^3-3\cdot 0}}^{x} \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_1^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t;$

1.13.2 Analysis-Buch Seite 37, Aufgabe 28c

Berechne die Fläche zwischen der x-Achse und G_f im Bereich von $x = a$ bis $x = b$.

$\mathrm{f}(x) := -x^2 + x; \quad a = -1; b = 0;$

$\int\limits_a^b |\mathrm{f}(x)|\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^0 -\mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{5}{6};$

1.13.3 Analysis-Buch Seite 37, Aufgabe 29

Berechne die Fläche zwischen G_f und der x-Achse für

a) $\mathrm{f}\colon x \mapsto 2 - x - x^2;$

$\mathrm{f}(x) = 0; \Rightarrow x_1 = -2; \quad x_2 = 1;$

$\Rightarrow \int\limits_{-2}^1 \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{9}{2};$

b) $\mathrm{f}\colon x \mapsto x^2\,(x+2) = x^3 + 2x^2;$

$\mathrm{f}(x) = 0; \Rightarrow x_1 = -2; \quad x_2 = 0;$

$\Rightarrow \int\limits_{-2}^0 -\mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3};$

1.13.4 Analysis-Buch Seite 37, Aufgabe 31

Berechne

a) $\int\limits_0^1 (x - x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6};$

b) $\int\limits_2^3 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{19}{3};$

c) $\int\limits_2^3 t^2\,\mathrm{d}t = \frac{19}{3};$

d) $\int\limits_{-2}^{+2} v^2\,\mathrm{d}v = \frac{16}{3};$

e) $\int\limits_0^b (ax - x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}ab^2 - \frac{1}{3}b^3;$

f) $\int\limits_0^b (ax - x^2)\,\mathrm{d}a = \frac{1}{2}b^2x - bx^2;$

g) $\int\limits_0^b (ax - x^2)\,\mathrm{d}t = b\,(ax - x^2)\,;$

21.10.2005

1.14 14. Hausaufgabe

1.14.1 Analysis-Buch Seite 37, Aufgabe 32

$$\mathrm{f}(x) := \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & \text{für } x \in [0,3]\,; \\ -x + 5 & \text{für } x \in \,]3,4]\,; \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathrm{F}(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x & \text{für } x \in [0,3]\,; \\ \frac{15}{4} & \text{für } x = 3; \\ -\frac{1}{2}x^2 + 5x - \frac{27}{4} & \text{für } x \in \,]3,4]\,; \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{F} \text{ stetig in } D_{\mathrm{f}}; \\ \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3-} \mathrm{F}'(x) = 2 \\ \lim\limits_{x\to 3+} \mathrm{F}'(x) = 2 \end{array}\right\} = \mathrm{F}'(3) = \mathrm{f}(x); \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{F}' = \mathrm{f}';$$

Berechne

a) $\int\limits_0^3 \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{F}(3) - \mathrm{F}(0) = \frac{15}{4};$

b) $\int\limits_3^4 \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{F}(4) - \mathrm{F}(3) = \frac{3}{2};$

c) $\int\limits_0^4 \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{F}(4) - \mathrm{F}(0) = \int\limits_0^3 \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_3^4 \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{F}(3) - \mathrm{F}(0) + \mathrm{F}(4) - \mathrm{F}(3) = \mathrm{F}(4) - \mathrm{F}(0) = \frac{21}{4};$

1.14.2 Analysis-Buch Seite 37, Aufgabe 34

$\mathrm{f}(x) := \sqrt{4-x^2}; \quad D_\mathrm{f} = [-2,2]\,;$

a) Zeige, dass für $(x_0, y_0) \in G_\mathrm{f}$ gilt: $x_0^2 + y_0^2 = 4;$

$x_0^2 + y_0^2 = x_0^2 + \mathrm{f}(x_0) = x_0^2 + 4 - x_0^2 = 4;$

Was folgt daraus für die Form von G_f?

f beschreibt einen Halbkreis mit Radius $r = \sqrt{4} = 2$.

b) Berechne mit Holfe geometrischer Überlegungen

- $\int\limits_{-2}^{+2} \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi r^2}{2} = 2\pi;$
- $\int\limits_{0}^{+2} \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi r^2}{4} = \pi;$
- $\int\limits_{0}^{1} \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = r^2\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot \mathrm{f}(1) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{\mathrm{f}(1)}{1}\right) r^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}}{2} r^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2};$
- $\int\limits_{1}^{2} \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{+2} \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{0}^{1} \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2};$

1.14.3 Analysis-Buch Seite 37, Aufgabe 35

Berechne $\int\limits_0^2 \sqrt{9-x^2}\,\mathrm{d}x$, indem du den Kreis $x^2 + y^2 = 9$ betrachtest.

$r = \sqrt{9} = 3;$

$\int\limits_0^2 \sqrt{9-x^2}\,\mathrm{d}x = r^2\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot \mathrm{f}(2) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{\mathrm{f}(2)}{2}\right) r^2 + \sqrt{5} \approx 5{,}52;$ 24.10.2005

1.15 15. Hausaufgabe

1.15.1 Analysis-Buch Seite 37, Aufgabe 36

Berechne folgende Integrale durch geometrische Überlegungen

a) $\int\limits_0^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2 = 2;$

b) $\int\limits_1^4 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,(1+4)\,3 = \frac{15}{2};$

c) $\int\limits_{-3}^5 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 5 - \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3 = 8;$

d) $\int\limits_0^2 (x+1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,(1+3)\,2 = 4;$

e) $\int\limits_1^4 (5-x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,(4+1)\,3 = \frac{15}{2};$

f) $\int\limits_2^{\frac{5}{2}} \left(\frac{1}{2}x+3\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(4+\frac{17}{4}\right)\frac{1}{2} = \frac{33}{16};$

1.15.2 Analysis-Buch Seite 38, Aufgabe 41

Ein Körper bewegt sich mit der Geschwindigkeit $v(t) = t^2 \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3}$. Wie groß ist seine mittlere Geschwindigkeit $\overline{v}$ während der ersten Sekunde, während der ersten zwei Sekunden, während der ersten zehn Sekunden und während der zweiten Sekunde?

$\overline{v}_{a,b} = \dfrac{\int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t}{b-a} = \dfrac{\frac{b^3}{3}-\frac{a^3}{3}}{b-a};$

$\Rightarrow \overline{v}_{0,1} = \frac{1}{3}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}};$

$\Rightarrow \overline{v}_{0,2} = \frac{4}{3}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}};$

$\Rightarrow \overline{v}_{0,10} = \frac{100}{3}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}};$

$\Rightarrow \overline{v}_{1,2} = \frac{7}{3}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}};$ 25.10.2005

1.16 16. Hausaufgabe

1.16.1 Analysis-Buch Seite 72, Aufgabe 68

$\mathrm{f}_a(x) = \frac{1}{4}\,(ax-5)^2; \quad D_{\mathrm{f}_a} = \mathbb{R}; \quad a \in \mathbb{R};$

Jede Scharkurve schließt mit den Randgeraden des Streifens $0 \leq x \leq 5$ und der x-Achse eine Fläche ein. Bestimme a so, dass der Inhalt am kleinsten ist (mit Nachweis des Minimums).

$\forall x \in D_{\mathrm{f}_a}: \mathrm{f}_a(x) \geq 0;$

$\Rightarrow \mathrm{A}(a) = \int\limits_0^5 \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\left[\frac{a^2}{3}x^3 - 5ax^2 + 25x\right]_0^5 = \frac{1}{4}\left(\frac{a^2}{3}125 - 125a + 125\right);$

$\Rightarrow \mathrm{A}'(a) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\mathrm{A}(a) = \frac{1}{4}\left(\frac{250}{3}a - 125\right);$

$\Rightarrow \mathrm{A}'(a_0) = 0; \Rightarrow a_0 = \frac{3}{2};$ (VZW von A' bei $\frac{3}{2}$ von $-$ nach $+$)

1.16.2 Analysis-Buch Seite 72, Aufgabe 70

$\mathrm{f}_a(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + a; \quad D_\mathrm{f} = \mathbb{R}; \quad a \in \mathbb{R};$

Bestimme a so, dass G_{f_a} durch $(3, -\frac{7}{3})$ geht. Berechne für dieses a den Inhalt des Flächenstücks im 1. und 4. Quadranten, das die Gerade $\mathrm{g}(x) = \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$ und G_{f_a} umschließen.

$\mathrm{f}_{a_0}(3) = -\frac{7}{3}; \Rightarrow a_0 = \frac{2}{3};$

$\mathrm{f}_{a_0}(x) = \mathrm{g}(x); \Rightarrow x_1 = -4; \quad x_2 = 0; \quad x_3 = 4;$

$\int\limits_0^4 \mathrm{g}(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^4 \mathrm{f}_{a_0}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{64}{3};$ 26.10.2005

1.17 17. Hausaufgabe

1.17.1 Analysis-Buch Seite 72, Aufgabe 62

$\mathrm{g}(x) = ax^2 + bx + c; \quad D_\mathrm{g} = \mathbb{R}; \quad a, b, c \in \mathbb{R};$

$\mathrm{G}(x) = \int\limits_0^x \mathrm{g}(t)\,\mathrm{d}t;$

Der Graph der Integralfunktion G hat bei 1 eine waagrechte Tangente und bei $\frac{1}{2}$ einen Wendepunkt, in dem die Tangente parallel ist zur Geraden $y = -\frac{1}{4}x + 4711$. Ermittle die Funktionsterme von G und g.

I.	$\mathrm{g}(1) = 0; \Rightarrow a + b + c = 0;$	$\Rightarrow c = -b - a;$
II.	$\mathrm{g}'(\frac{1}{2}) = 0; \Rightarrow a + b = 0;$	$\Rightarrow b = -a; \Rightarrow c = a - a = 0;$
III.	$\mathrm{g}(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}; \Rightarrow \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + c = -\frac{1}{4};$	$\Rightarrow a = 1; \Rightarrow b = -a = -1;$

$\Rightarrow \mathrm{g}(x) = x^2 - x;$

$\Rightarrow \mathrm{G}(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2;$

Nachweis des Wendepunktes von G_G an der Stelle $\frac{1}{2}$:

VZW von g' bei $\frac{1}{2}$ von $-$ nach $+$; 02.11.2005

1.18 18. Hausaufgabe

1.18.1 Analysis-Buch Seite 70, Aufgabe 33

Gegeben sind die Funktionen

$\mathrm{p}\colon x \mapsto \mathrm{p}(x) := -\frac{1}{2}(x-3)^2 + \frac{9}{2}; \quad D_\mathrm{p} = \mathbb{R};$

$\mathrm{g}_a\colon x \mapsto \mathrm{g}_a(x) := ax; \quad D_{\mathrm{g}_a} = \mathbb{R}; \quad a \in \mathbb{R};$

a) Berechne den Inhalt A der Fläche, die von der Parabel und der x-Achse eingeschlossen ist.

$\mathrm{p}(x) = 0; \Rightarrow -\frac{1}{2}x^2 + 3x = 0;$

$\Rightarrow x_1 = 0; \quad -\frac{1}{2}x_2 = -3; \Rightarrow x_2 = 6;$

$\Rightarrow \mathrm{p}(x) = -\frac{1}{2}x\,(x-6);$

$\Rightarrow$ VZW von $-$ nach $+$ bei 0 und von $+$ nach $-$ bei 6;

$\Rightarrow A = \int\limits_0^6 \mathrm{p}(x)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_0^6 = 18;$

b) Berechne die Koordinaten der Punkte P und Q, in denen sich G_p und G_{g_a} schneiden.

$\mathrm{p}(x) = \mathrm{g}_a(x); \Rightarrow -\frac{1}{2}x^2 + 3x = ax;$

$\Rightarrow x_3 = 0; \quad -\frac{1}{2}x_4^2 + (3-a) = 0; \Rightarrow x_4 = 6 - 2a;$

$\Rightarrow P(0,0); \quad Q(6-2a, 6a-2a^2);$

c) Berechne den Inhalt $B(a)$ der Fläche, die zwischen G_p und G_{g_a} liegt.

$$\begin{aligned}\mathrm{B}(a) \quad := \quad & \left|\int\limits_0^{6-2a} \mathrm{p}(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^{6-2a} \mathrm{g}_a(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\left[-\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_0^{6-2a} - \left[\frac{a}{2}x^2\right]_0^{6-2a}\right| = \\ & \left|-\frac{1}{6}(6-2a)^3 + \frac{3}{2}(6-2a)^2 - \frac{a}{2}(6-2a)^2\right| = (6-2a)^2\left|-1 + \frac{1}{3}a + \frac{3}{2} - \frac{a}{2}\right| = \\ & \left|\frac{1}{12}(6-2a)^3\right| = \frac{2}{3}\left|3-a\right|^3;\end{aligned}$$

d) Für welchen Wert von a liegt zwischen G_{p} und G_{g_a} keine Fläche? Welche besondere Lage hat dann G_{p} zu G_{g_a}?

$\mathrm{B}(a) = 0; \Rightarrow 3 - a = 0; \Rightarrow a = 3;$

G_{g_a} ist dann Tangente von G_{p} an der Stelle 0. (Beweis: $\mathrm{g}_3'(0) = \mathrm{p}'(0);$)

e) Eine Gerade durch den Ursprung geht durch den Scheitel der Parabel; diese Gerade zerlegt die Fläche A von a) in zwei Teilflächen. Berechne das Verlältnis: größere Teilfläche durch kleinere Teilfläche.

$\mathrm{p}'(x_5) = 0; \Rightarrow x_5 = 3; \quad \mathrm{p}(3) = 9;$

$\mathrm{u}(x) := \frac{\mathrm{p}(3)}{6} x = \frac{3}{2} x;$

$$\Rightarrow \frac{A - \left(\int\limits_0^3 \mathrm{p}(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^3 \mathrm{u}(x)\,\mathrm{d}x \right)}{\int\limits_0^3 \mathrm{p}(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^3 \mathrm{u}(x)\,\mathrm{d}x} = \frac{A}{9 - \frac{27}{4}} - 1 = 7;$$

f) Für welchen Wert von a ist $\mathrm{B}(a)$ achtmal so groß wie die Fläche zwischen der Parabel und der x-Achse?

$\mathrm{B}(a) = 8A; \Rightarrow \frac{2}{3} |3 - a|^3 = 8A; \Rightarrow (3 - a)^3 = \pm 12A; \Rightarrow a = 3 - \sqrt[3]{\pm 12A}$ „=“ $3 - \sqrt[3]{\pm 216}$ „=“ $3 - \pm 2 \cdot 3; \Rightarrow a_1 = -3; \quad a_2 = 9;$

g) $\int\limits_c^x \mathrm{p}(t)\,\mathrm{d}t =: \mathrm{I}_c(x);$

Berechne die Integralfunktion I_c von p.

$\mathrm{I}_c(x) = \int\limits_c^x \mathrm{p}(t)\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{6} x^3 + \frac{3}{2} x^2 \right]_c^x = \frac{1}{6} \left(-x^3 + 9x^2 + c^3 - 9c^2 \right);$

h) Für welche Werte von c ist I_c symmetrisch zum Koordinatensystem?

$\mathrm{I}_c(x) = \mathrm{I}_c(-x); \Rightarrow -1 = 0;$

$\mathrm{I}_c(x) = -\mathrm{I}_c(-x); \Rightarrow$ (Keine von x unabhängige Aussage)

$\Rightarrow$ Es gibt kein $c \in \mathbb{R}$, für welches I_c symmetrisch zum Koordinatensystem ist;

i) Für welche Werte von c geht I_c durch den Ursprung?

$\mathrm{I}_c(0) = 0; \Rightarrow -x^3 + 9x^2 + c^3 - 9c^2 = 0;$

$\Rightarrow c_1 = 0; \quad c_2 - 9 = 0; \Rightarrow c_2 = 9;$

1.18.2 Analysis-Buch Seite 72, Aufgabe 61

$\mathrm{f}_a(x) := -\frac{4}{a^2}\,(8-a)\,(x^2-ax)\,; \quad D_{\mathrm{f}_a} = \mathbb{R}; \quad a \neq 0;$

a) Bestimme den Flächeninhalt $\mathrm{A}(a)$ der Fläche zwischen G_{f_a} und der x-Achse.

$\mathrm{f}_a(x) = 0; \Rightarrow x^2 - ax = 0;$

$\Rightarrow x_1 = 0; \quad x_2 - a = 0; \Rightarrow x_2 = a;$

$\Rightarrow \mathrm{f}_a(x) = -\frac{4}{a^2}\,(8-a)\cdot x\,(x-a)\,;$

$$\mathrm{A}(a) = \left|\int\limits_0^a \mathrm{f}_a(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|-\tfrac{4}{a^2}\,(8-a)\left[\tfrac{x^3}{3} - \tfrac{a}{2}x^2\right]_0^a\right| = \frac{2}{3}\left|(8-a)\,a\right|;$$

b) Für welche a ist der Inhalt der Fläche $\mathrm{A}(a)$ gleich 8?

$\mathrm{A}(a) = 8; \Rightarrow \frac{2}{3}\,(8-a)\,a = \pm_1 8; \Rightarrow (8-a)\,a = \pm_1 12; \Rightarrow -a^2 + 8a \mp_1 12 = 0;$

$$\Rightarrow a_{1,2,3,4} = \frac{-8 \pm_2 \sqrt{64 + 4\cdot \mp_1 12}}{-2} = \frac{-8 \pm_2 4\sqrt{4 \mp_1 3}}{-2} = 4 \mp_2 2\sqrt{4 \mp_1 3};$$

$\Rightarrow a_1 = 2; \quad a_2 = 6;$
$\Rightarrow a_3 = 4 + 2\sqrt{7}; \quad a_4 = 4 - 2\sqrt{7};$

(Kontrolle durch Einsetzen in Anfangsgleichung beweist Korrektheit.)

Es gibt aber kein globales Maximum, da $\mathrm{A}(a) \to \infty$ für $a \to \pm\infty$.

c) Bestimme a so, dass $\mathrm{A}(a)$ möglichst groß wird. Gib den maximalen Flächeninhalt an.

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\mathrm{A}(a) = \operatorname{sgn}\!\left(\frac{2}{3}\,(8-a)\,a\right)\cdot \frac{2}{3}\,(8-2a) = 0;$ (für $a \neq 0$)

$\Rightarrow 8 = 2a_5; \Rightarrow a_5 = 4;$ (VZW gegeben)

$\mathrm{A}(4) = \frac{32}{3};$

d) $\mathrm{F}_4(x) := \int\limits_4^x \mathrm{f}_4(t)\,\mathrm{d}t;$

Bestimme den Term $\mathrm{F}_4(x)$ und alle Nullstellen von F_4.

$\mathrm{F}_4(x) = \int\limits_4^x \mathrm{f}_4(t)\,\mathrm{d}t \int\limits_4^x \mathrm{f}_4(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - \frac{32}{3};$

Nullstellen: $\mathrm{F}_4(x) = 0; \Rightarrow x_3 = -2; \quad x_4 = 4;$

e) Berechne die Hoch-, Tief- und Wendepunkte von $\mathrm{G}_{\mathrm{F}_4}$.

$\mathrm{f}_4(x) = -x\,(x-4)\,;$

$\Rightarrow$ VZW von f_4 von $-$ nach $+$ bei 0 und von $+$ nach $-$ bei a;

$\Rightarrow P_{\mathrm{HOP}}(4,0)$;

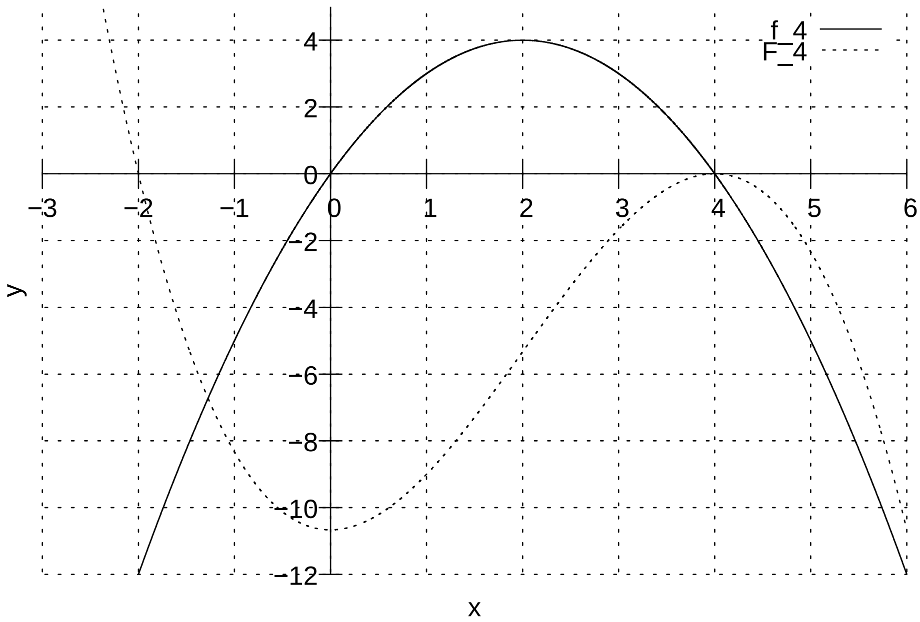
$\Rightarrow P_{\mathrm{TEP}}\left(0,-\frac{32}{3}\right)\,;$

$\mathrm{f}_4'(x) = 4-2x = -2\,(x-2)\,;$

$\Rightarrow$ VZW von f_4' von $+$ nach $-$ bei 2;

$\Rightarrow P_{\mathrm{WEP}}\left(2,-\frac{16}{3}\right)\,;$

f) Skizziere G_{f_4} und G_{F_4} in ein und demselben Koordinatensystem.



07.11.2005

„Und das kann man zweimal unterstreichen, wenn das einen befriedigt“

„[Jeder ist] defizitär“

„Mei´ Doofheit hat halt keine Grenzen“ 11.11.2005

1.19 19. Hausaufgabe

1.19.1 Altes Stochastik-Buch Seite 50, Aufgabe 7

Vier Politiker sollen nebeneinander auf einem Gruppenbild für die Presse fotografiert werden, können sich aber über die Anordnung nicht einigen. Man beschließt, alle Anordnungen aufzunehmen, die Bilder in eine Urne zu legen und daraus das Bild für die Presse zu ziehen.

Wie viele Bilder müssen gemacht werden?

$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24;$

1.19.2 Altes Stochastik-Buch Seite 50, Aufgabe 11

Auf einer Speisekarte stehen 3 Vorspeisen, 4 Hauptspeisen und 6 Nachspeisen. Wie viele verschiedene Menüs mit Vor-, Haupt- und Nachspeise lassen sich daraus zusammenstellen?

$3 \cdot 4 \cdot 6 = 72;$

1.19.3 Altes Stochastik-Buch Seite 50, Aufgabe 19

Wie viele 6-stellige Zahlen gibt es, die die Eins einmal, die Zwei zweimal und die Drei dreimal enthalten?

$6 \cdot 10 \cdot 1 = 60;$

(Beliebige Wahl bei Verteilung der Eins (6 Möglichkeiten); Eingeschränkte Wahl bei Verteilung der Zweien ($1{+}2{+}3{+}4 = 10$ Möglichkeiten); Keine Wahl bei Verteilung der Dreien (0 Möglichkeiten))

(Alternativ: Beliebige Wahl bei Verteilung der Dreien ($1+3+6+10 = 20$ Möglichkeiten); Eingeschränkte Wahl bei Verteilung der Zweien ($1 + 2 = 3$ Möglichkeiten); Keine Wahl bei Verteilung der Eins (0 Möglichkeiten)) 14.11.2005

1.20 20. Hausaufgabe

1.20.1 Aufgabe 4) der 1. Klausur

Siehe Verbesserung der 1. Klausur. 15.11.2005

1.21 21. Hausaufgabe

1.21.1 Differenzen zwischen Folgegliedern

$a_n = 3 \cdot 1{,}8^n;$

n	a_n	Differenz (gerundet)	Differenz der Differenz (gerundet)	Differenz der Differenz der Differenz (gerundet)
0	3	2	1	1
1	5	4	3	2
2	9	7	6	4
3	17	13	11	8
4	31	25	20	16
5	56	45	36	29
6	102	81	65	52
7	183	146	117	94
8	330	264	211	169
9	595	476	380	304
10	1071	856	685	548
11	1928	1542	1233	987
12	3470	2776	2221	1776
13	6246	4997	3998	
14	11244	8995		
15	20239			

$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n = 3 \cdot 1{,}8^{n+1} - 3 \cdot 1{,}8^n = 3 \cdot (1{,}8 - 1) \cdot 1{,}8^n = 2{,}4 \cdot 1{,}8^n;$

$\Delta^2 a_n = \Delta\left(\Delta a_n\right) = 2{,}4 \cdot 1{,}8^{n+1} - 2{,}4 \cdot 1{,}8^n = 2{,}4 \cdot (1{,}8 - 1)\, 1{,}8^n = 1{,}92 \cdot 1{,}8^n;$

$\Delta^k a_n = \Delta\left(\Delta\left(\cdots a_n\right)\cdots\right) = 3 \cdot 0{,}8^k \cdot 1{,}8^n;$

$\Rightarrow \Delta^k a_n \stackrel{!}{=} 0; \Rightarrow 3 \cdot 0{,}8^k \cdot 1{,}8^n \stackrel{!}{=} 0;$

$\Rightarrow$ Es gibt kein $k \in \mathbb{N}$, für das $\Delta^k a_n$ 0 wäre.

1.21.2 Differenzen zwischen Folgegliedern

$c_n = n^3;$

$\Delta c_n = c_{n+1} - c_n = (n+1)^3 - n^3 = \cdots = n^3 + 3n^2 + 2n + 1;$

$\Delta^2 c_n = \Delta\left(\Delta c_n\right) = (n+1)^3 + 3\,(n+1)^2 + 2\,(n+1) + 1 - n^3 - 3n^2 - 2n - 1 = \cdots = 3n^2 + 9n + 6;$

$\Delta^3 c_n = \Delta\left(\Delta\left(\Delta c_n\right)\right) = 3\,(n+1)^2 + 9\,(n+1) + 6 - 3n^2 - 9n - 6 = \cdots = 6n + 12;$

$\Delta^4 c_n = \Delta\left(\Delta\left(\Delta\left(\Delta c_n\right)\right)\right) = 6\,(n+1) + 12 - 6n - 12 = 6;$

1.21.3 Augensummen bei Würfelwürfen

Wurf von n Würfeln
$s \in \{n, n+1, \dots, 6n-1, 6n\}$;

Wurf von 10^9 Würfeln
$s \in \{10^9, 10^9+1, \dots, 6 \cdot 10^9 - 1, 6 \cdot 10^9\}$;

Wurf von 10^6 Würfeln
$s \in \{10^6, 10^6+1, \dots, 6 \cdot 10^6 - 1, 6 \cdot 10^6\}$;

Wurf von 10^3 Würfeln
$s \in \{1000, 1001, \dots, 5999, 6000\}$;

Wurf von 10^2 Würfeln
$s \in \{100, 101, \dots, 599, 600\}$;

Wurf von 10^1 Würfeln
$s \in \{10, 11, \dots, 59, 60\}$;

Wurf von 10^0 Würfeln
$s \in \{1, 2, \dots, 5, 6\}$;

16.11.2005

1.21.4 Exzerpt von Kapitel 1 des Stochastik-Buchs („Zufallsexperimente“)

- Experimente können **determiniert** oder **zufällig** sein.
- Determinierte Experimente lassen sich beliebig oft wiederholen; ihr Ausgang unterscheidet sich nie.
- Der Ausgang zufälliger Experimente ist nicht vorhersagbar; der Ausgang kann sich unterscheiden.
- Experimente werden auch dann als „zufällig“ bezeichnet, wenn sie theoretisch zwar determiniert wären, aber so viele Variablen im Spiel sind, dass eine genaue Vorhersage in der Praxis unmöglich wird.

17.11.2005

1.21.5 Wertetabelle der Funktionen F_k und F_l der Aufgabe 5 der 1. Klausur

x	$\mathrm{F}_k(x)$	$\mathrm{F}_l(x)$
a	$\mathrm{F}_k(0) + A = \frac{1}{2}A$	$\mathrm{F}_l(0) + A = -\frac{1}{2}A$
0	$-A + \frac{1}{2}A = -\frac{1}{2}A$	$-2A + \frac{1}{2}A = -\frac{3}{2}A$
	$-A$	$\mathrm{F}_l(k) - A = -2A$
k	0	$\mathrm{F}_l(l) - A = -A$
l	$\mathrm{F}_k(k) + A = A$	0
	$\mathrm{F}_k(l) - A = 0$	$-A$
b	$\frac{3}{2}A$	$-A + \frac{3}{2}A = \frac{1}{2}A$

19.11.2005

[Vielzahl von undeterminierten Systemen → sehr scharfes System]

„Das Wesen der Mathematik ist weder logisch noch unlogisch, sie ist a-logisch."

„[die entscheidensten Fragen haben keine Antwort]"

„bloß wir beten dem in der Schule immer wieder [. . .]" 19.11.2005

1.22 22. Hausaufgabe

1.22.1 Allgemeine Differenzenbildung von n^2 und n^3

$\Delta^1 n^2 = (n+1)^2 - n^2 = 2n + 1;$

$\Delta^2 n^2 = 2(n+1) + 1 - 2n - 1 = 2;$

$\Delta^3 n^3 = 2 - 2 = 0;$

(Für n^3 siehe 21. Hausaufgabe.)

1.22.2 Unterschiedlich grobe Ergebnisräume für das Sockenbeispiel

$\Omega_1 = \{\text{Socke}\};$

$\Omega_2 = \{\text{linke Socke}, \text{rechte Socke}\};$

$\Omega_3 = \{(1,1), (1,2), \ldots, (7,6), (7,7)\};$

1.22.3 Unterschiedlich grobe Ergebnisräume für den Wurf zweier Würfel

$\Omega_1 = \{\{\text{gerade}, \text{gerade}\}, \{\text{ungerade}, \text{gerade}\}, \{\text{ungerade}, \text{ungerade}\}\}\,;$

$\Omega_2 = \{2, 3, \ldots, 11, 12\}\,;$

$\Omega_3 = \{(1,1), (1,2), \ldots (6,5), (6,6)\}\,;$

1.22.4 Exzerpt der Kapitel 2.1–2.4 des Stochastik-Buchs

- Ein **Ergebnisraum** Ω ist eine Menge an Ergebnissen ω_i.

  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}\,;$

- Lässt sich ein Ergebnisraum Ω_1 auf einen anderen Ergebnisraum, Ω_2, abbilden und gilt $|\Omega_1| > |\Omega_2|$, so ist Ω_1 eine **Verfeinerung** von Ω_2.

  Umgekehrt ist Ω_2 eine **Vergröberung** von Ω_1.

- Kann ein Teilergebnis eines mehrstufigen Versuchs in mehreren Versuchsstufen vorkommen, so wird **mit Zurücklegen** gezogen. Anderfalls spricht man von Ziehen **ohne Zurücklegen**.

- Durch Zerlegung eines Zufallsexperiments in Teilexperimente, kombiniert mit der Darstellung von **Pfaden**, erleichtert die Bestimmung der **Mächtigkeit** $|\Omega|$ eines Ergebnisraums Ω.

21.11.2005

„zwei Hände klatschen so [...Demo. . .] und eine Hand halb so laut“

„Mich interessiert jetzt wann die Stunde aus ist [und das bringt und auch/trotzdem nicht weiter]“

[Zielmenge = Wertemenge; $\Leftrightarrow$ surjektiv;]

[($\forall x_1, x_2 \in D$: $\mathrm{f}(x_1) = \mathrm{f}(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$;) $\Leftrightarrow$ injektiv;]

[surjektiv $\wedge$ injektiv; $\Leftrightarrow$ bijektiv;] 21.11.2005

1.23 23. Hausaufgabe

1.23.1 Stochastik-Buch Seite 20, Aufgabe 1

Warum ist beim Würfelwurf mit den Augenzahlen 1 bis 6 die Menge $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, \text{gerade Augenzahl}\}$ kein Ergebnisraum?

Weil einigen Versuchsergebnissen (2, 4 und 6) mehrere Elemente aus der Menge zugeordnet werden können (2, 4 oder 6 oder gerade Augenzahl).

1.23.2 Stochastik-Buch Seite 20, Aufgabe 2

Eine Urne enthält drei gleichartige Kugeln mit den Nummern 1, 2, 3. Diese drei Kugeln werden nacheinander rein zufällig herausgegriffen. Geben Sie einen geeigneten Ergebnisraum an und bestimmen Sie davon die Mächtigkeit mit dem Zählprinzip.

$\Omega = \{(1,2,3),(1,3,2),\ldots\}$;

$|\Omega| = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$;

1.23.3 Stochastik-Buch Seite 20, Aufgabe 3

Zwei Personen A und B tragen einen Tenniswettkampf aus. Sieger ist, wer als Erster zwei Sätze gewonnen hat. Wie lautet ein geeigneter Ergebnisraum?

$\Omega = \{\{A,A\},\{A,B\},\{B,B\}\}$;

1.23.4 Stochastik-Buch Seite 20, Aufgabe 4

Bei einer Auswahl von Familien mit drei Kindern werden im Auftrag eines Insituts für Verhaltensforschung die Kinder nach dem Geschlecht in der Reihenfolge des Alters registriert. Konstruieren Sie einen geeigneten Ergebnisraum.

$\Omega = \{(\mathrm{m},\mathrm{m},\mathrm{m}),(\mathrm{m},\mathrm{m},\mathrm{w}),\ldots,(\mathrm{w},\mathrm{w},\mathrm{w})\}$;

1.23.5 Stochastik-Buch Seite 20, Aufgabe 5

Eine Urne enthält drei weiße und zwei schwarze Kugeln. Es werden drei Kugeln zufällig herausgegriffen, und zwar

a) gleichzeitig. Konsturieren Sie passende Ergebnisräume.

$\Omega = \{\{\mathrm{w},\mathrm{w},\mathrm{w}\},\{\mathrm{w},\mathrm{w},\mathrm{s}\},\{\mathrm{w},\mathrm{s},\mathrm{s}\}\}$;

b) nacheinander, ohne die einzelnen Kugeln zurückzulegen.

$\Omega = \{(w,w,w),(w,w,s),(w,s,w),\ldots\}$;

c) nacheinander, jedoch nach Zurücklegen der jeweils gezogenen Kugel.

$\Omega = \{(w,w,w),(w,w,s),\ldots,(s,s,s)\}$;

„offene Fragestellung ist in“ 22.11.2005

1.24 24. Hausaufgabe

1.24.1 Stochastik-Buch Seite 21, Aufgabe 6

Ein Würfel wird so lange geworfen, bis zum ersten Mal 6 erscheint, aber höchstens drei Mal. Geben Sie einen geeigneten Ergebnisraum an.

$\Omega = \{(6),(1,6),(2,6),\ldots,(1,1,6),(1,2,6),\ldots(1,1,1),(1,1,2),\ldots,(5,5,5)\}$;

1.24.2 Stochastik-Buch Seite 21, Aufgabe 7

Eine Münze und ein Würfel werden gleichzeitig geworfen. Geben Sie einen Ergebnisraum an. Wie viele Elemente enthält er?

$\Omega = \{\{z,1\},\{z,2\},\ldots,\{z,6\},\{k,1\},\{k,2\},\ldots,\{k,6\}\}$;

$|\Omega| = 6 \cdot 2 = 12$;

1.24.3 Stochastik-Buch Seite 21, Aufgabe 8

Eine Münze und ein Würfel werden nacheinander geworfen. Gesucht sind ein geeigneter Ergebnisraum und dessen Mächtigkeit.

$\Omega = \{\{z,1\},\{z,2\},\ldots,\{z,6\},\{k,1\},\{k,2\},\ldots,\{k,6\}\}$;

$|\Omega| = 6 \cdot 2 = 12$;

1.24.4 Stochastik-Buch Seite 21, Aufgabe 9

In einer Urne befinden sich fünf von 1 bis 5 nummerierte Kugeln.

a) Es werden zwei Kugeln gleichzeitig geogen. Geben Sie einen Ergebnisraum an. Welche Mächtigkeit hat er?

$\Omega = \{\{1,2\},\{1,3\},\ldots,\{5,4\}\}$;

$|\Omega| = 5 \cdot 4 : 2 = 10$;

b) Es werden drei Kugeln gleichzeitig geogen. Wie lautet jetzt der Ergebnisraum?

$\Omega = \{\{1,2,3\},\{1,2,4\},\ldots,\{5,4,3\}\}$;

Vergleichen Sie seine Mächtigkeit mit der von a).

$|\Omega| = 5 \cdot 4 \cdot 3 : 3! = 10$;

Wie lässt sich das Ergebnis anschaulich begründen?

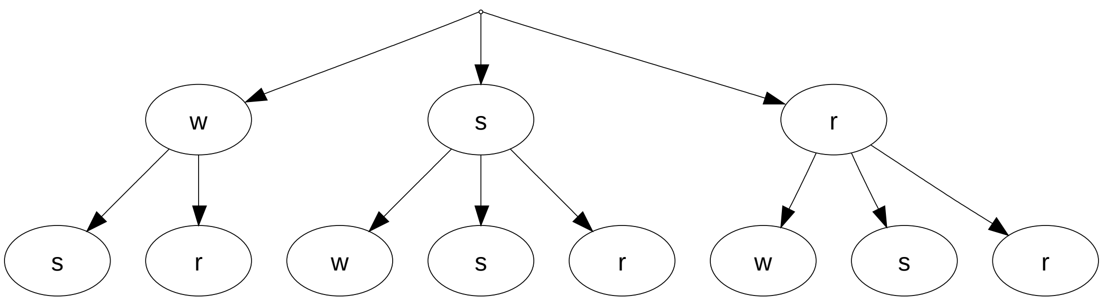
1.24.5 Stochastik-Buch Seite 21, Aufgabe 10

In einer Urne befindne sich eine weiße, zwei schwarze und drei rote Kugeln. Es werden zwei Kugeln gezogen

a) nacheinander ohne Zurücklegen.

$\Omega = \{(\mathrm{w},\mathrm{s}),(\mathrm{w},\mathrm{r}),(\mathrm{s},\mathrm{w}),(\mathrm{s},\mathrm{s}),(\mathrm{s},\mathrm{r}),(\mathrm{r},\mathrm{w}),(\mathrm{r},\mathrm{s}),(\mathrm{r},\mathrm{r})\}$;

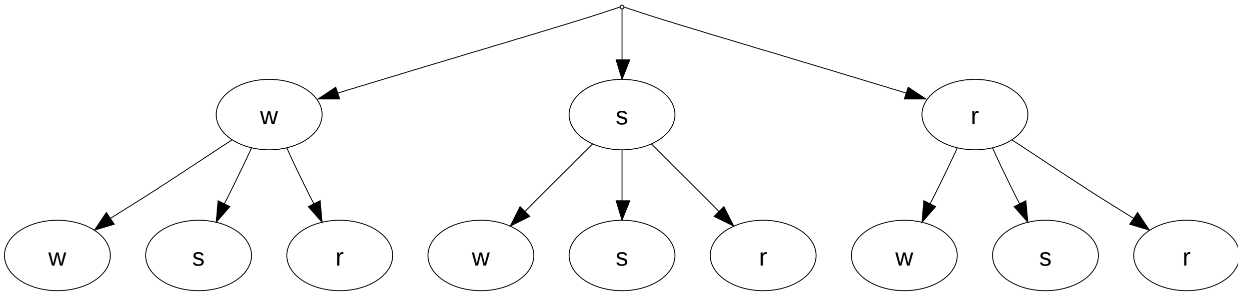
$|\Omega| = 8$;



b) mit Zurücklegen der Kugel nach jedem Zug.

$\Omega = \{(\mathrm{w},\mathrm{w}),\ldots,(\mathrm{r},\mathrm{r})\}$;

$|\Omega| = 3 \cdot 3 = 9$;



23.11.2005

1.25 25. Hausaufgabe

1.25.1 Stochastik-Buch Seite 21, Aufgabe 11

Beim Kinderspiel „Knobeln“, bei dem zwei Spieler gleichzeitig eine Hand öffnen, kommt es darauf an, dieselbe Anzahl von Fingern zu zeigen wie der andere. Stellen Sie den Ergebnisraum dieses Spiels dar und berechnen Sie seine Mächtigkeit.

$\Omega = \{(1,1),(1,2),\ldots,(5,5)\}\,;$

$|\Omega| = 5 \cdot 5 = 25;$

1.25.2 Stochastik-Buch Seite 21, Aufgabe 12

Beim Spiel „Papier-Schere-Stein“ müssen zwei Spieler auf ein Signal entweder die offene Hand (Papier), zwei Finger (Schere) oder die Faust (Stein) zeigen, wobei der jeweilige Sieger nach festen Regeln ermittelt wird: Die Schere schneidet das Papier, das Papier wickelt den Steick ein, der Steich macht die Schere stumpf. Es gewinnt Schere gegen Papier, Papier gegen Stein, Stein gegen Schere.

Stellen Sie den Ergebnisraum dar und geben Sie seine Mächtigkeit an.

$\Omega = \{(\text{Papier},\text{Papier}),(\text{Papier},\text{Schere}),\ldots\}\,;$

$|\Omega| = 3 \cdot 3 = 9;$

1.25.3 Stochastik-Buch Seite 21, Aufgabe 13

Zum n-maligen Münzwurf mit den Seiten Kopf und Zahl und zum n-maligen Würfelwurf mit den Augenzahlen 1 bis 6 sollen die Mächtigkeiten angegeben werden.

$|\Omega_{n,\text{Münz}}| = 2^n;$

$|\Omega_{n,\text{Würfel}}| = 6^n;$

1.25.4 Stochastik-Buch Seite 21, Aufgabe 14

Ein Arzt hat an einem Vormittag drei Patienten zu operieren. Die Reihenfolge sei zufällig.

Wie viele Möglichkeiten gibt es?

$|\Omega_3| = 3! = 6;$

Wie viele Möglichkeiten gibt es bei vier Patienten?

$|\Omega_4| = 4! = 24;$

1.25.5 Stochastik-Buch Seite 21, Aufgabe 15

Drei nicht unterscheidbare Kugeln sollen zufällig auf drei Zellen mit den Nummern 1, 2, 3 verteilt werden, wobei eine Zelle bis zu drei Kugeln aufnehmen kann. Sind beispielsweise zwei Kugeln in der ersten Zelle und eine in der dritten, so drücken wir das Ergebnis aus in der Form $\{1,1,3\}$. Entsprechend stellt man die anderen Verteilungen dar.

a) Stellen Sie die möglichen Ergebnisse dar.

$\Omega = \{\{1,1,1\},\{1,1,2\},\{1,1,3\},\{1,2,3\},\{2,2,1\},\{2,2,2\},\{2,2,3\},\{3,3,1\},\{3,3,2\},\{3,3,$

b) Man kann die Verteilungen auch durch die Höchstzahl der Kugeln in einer der drei Zellen beschreiben. Stellen Sie den vergröberten Ergebnisraum dar.

$\Omega' = \{1,2,3\};$

c) Kennzeichnen Sie die Abbildung des Ergebnisraums zu a) auf den Ergebnisraum zu b) durch ein Pfeildiagramm.

$\mathrm{f} : \omega \mapsto \max\{V_{\Omega'}(1), V_{\Omega'}(2), V_{\Omega'}(3)\};$

d) Wie sieht das Pfeildiagramm aus, wenn die Verteilungen durch die kleinste Zahl von Kugeln in irgendeiner Zelle gekennzeichnet werden und wie lautet jetzt der Ergebnisraum?

$\mathrm{g}: \omega \mapsto \min \left\{ V_{\Omega'}(1), V_{\Omega'}(2), V_{\Omega'}(3) \right\};$

25.11.2005

„Der Dominik ist da, und der Dominik ist da, und der Ralph ist da, und der Dominik ist da – also ist der Raum voll, die anderen müssen raus" 25.11.2005

1.26 26. Hausaufgabe

1.26.1 Stochastik-Buch Seite 22, Aufgabe 16

Fünf weiße Kugeln mit den Nummern 1 bis 5 und vier rote Kugeln mit den Bezeichnungen a, b, c, d sollen auf alle möglichen Arten so in einer Reihe angeordnet werden, dass die Farben wechseln. Auf wie viele Arten kann dies geschehen?

Hinweis: Überlegen Sie, auf wie viele Arten die Plätze in der speziellen Anordnung besetzbar sind.

$|\Omega| = 5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 5! \cdot 4! = 2880;$

1.26.2 Stochastik-Buch Seite 22, Aufgabe 17

Ein Autokennzeichen besteht neben dem Städtesymbol aus einem oder zwei Buchstaben sowie aus einer ein- bis vierzifferigen von Null verschiedenen Zahl. Wie viele verschiedene Kennzeichen können so in dieser Stadt ausgegeben werden, wenn 26 Buchstaben zur Wahl stehen?

$|\Omega| = 26 \cdot 27 \cdot 9999 = 7\,019\,298;$

1.26.3 Stochastik-Buch Seite 87, Aufgabe 1

Berechen Sie die Anzahl der 2-Tupel aus $\{1, 2, 3\}$ und stellen Sie diese dar.

$|M| = 3^2 = 9;$

$M = \left\{ (a, b) \;\middle|\; a, b \in \{1, 2, 3\} \right\};$

1.26.4 Stochastik-Buch Seite 87, Aufgabe 2

a) Berechnen Sie die Anzahl der 3-Tupel aus $\{1,2,3,4\}$.

$4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3 = 64;$

b) Berechnen Sie die Anzahl der 3-Tupel aus $\{1,2,3,4\}$, die mit 3 beginnen.

$1 \cdot 4 \cdot 4 = 16;$

1.26.5 Stochastik-Buch Seite 87, Aufgabe 3

Geben Sie die Anzahl der fünfzifferigen Zahlen an, die mit den Ziffern 1 und 9 bzw. 0,1,9 geschrieben werden können.

$|\Omega_1| = 2^5 = 32;$

$|\Omega_2| = 3^5 = 243;$

1.26.6 Stochastik-Buch Seite 87, Aufgabe 4

Das genetische Alphabet besteht aus den vier Buchstaben:

$A =$ Adenin, $C =$ Cytosin, $G =$ Guanin, $T =$ Thymin.

Eine Sequenz von jeweils drei dieser Buchstaben (Reihenfolge wesentlich) auf einem Strang der Doppelhelix der DNS ist der Code für die Synthetisierung einer speziellen Arminosäure. Dabei kann in einer derartigen Sequenz ein Buchstabe auch mehrmals auftreten. Wie viele Sequenzen sind möglich?

$4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3 = 64;$

1.26.7 Exzerpt der Kapitel 7.1–7.3 des Stochastik-Buchs

- Unter einem k-Tupel aus einer n-Menge versteht man einen k-Tupel, bei dem jede der k Stellen mit einem Element der Menge besetzt werden kann.
- Die Anzahl der k-Tupel aus einer n-Menge ist n^k.
- Unter einer n-Permutation aus einer n-Menge versteht man ein n-Tupel mit n verschiedenen Elementen aus der Menge.
- Die Anzahl der Permutationen aus einer n-Menge ist $n!$.

28.11.2005

1.27 27. Hausaufgabe

1.27.1 Stochastik-Buch Seite 87, Aufgabe 5

Die Zeichen des Morsealphabets – benannt nach dem amerikanischen Erfinder Samuel Morse (1791–1872) – sind aus zwei Elementen, Punkt und Strich zusammengesetzt, wobei ein Zeichen aus höchstens fünf Elementen besteht. Wie viele Zeichen können so gebildet werden? (Berechnen Sie jeweils die Anzahl der k-elementigen Zeichen für $k = 1, 2, 3, 4, 5$ und die Summe.)

$2+2\cdot 2+2\cdot 2\cdot 2+2\cdot 2\cdot 2\cdot 2+2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 2+4+8+16+32 = 63-1 = 62;$ 29.11.2005

1.28 28. Hausaufgabe

1.28.1 Stochastik-Buch Seite 87, Aufgabe 6

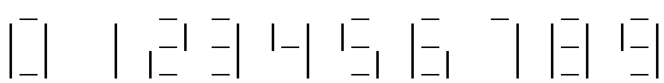
Der französische Offizier Ch. Barbier (1767–1841) und der blinde Lehrer L. Braille (1809–1852) sind die Erfinder der Blindenschrift. Die Buchstaben und Zeichen bestehen aus Punkten, die an sechs möglichen Stellen in dickeres Papier geprägt sind und somit ertastet werden können. Wie viele verschiedene Symbole kann man auf diese Weise erzeugen?

$2^6 = 64;$

1.28.2 Stochastik-Buch Seite 88, Aufgabe 7

Die Ziffern 0 bis 9 lassen sich elektronisch durch sogenanntes Sieben-Segmentanzeigen von a bis g darstellen.

a) Stellen Sie die Ziffern dar.



b) Wie viele Symbole sind so darstellbar, wenn der Fall, dass kein Segment ausgeleuchtet ist, nicht als Zeichen gewertet wird?

$2^7 - 1 = 127;$

1.28.3 Stochastik-Buch Seite 88, Aufgabe 8

Bei einer Parade stellen sich 11 Lipizzaner-Schimmelhengste mit ihren Reitern in Reihe auf.

a) Auf wie viele Arten können die Pferde in der Reihe stehen?

$11! = 39\,916\,800;$

b) Das Pferd des Hauptmanns soll immer in der Mitte stehen. Wie viele Anordnungen sind jetzt möglich?

$10! = 3\,628\,800;$

Wie viele Anordnungen sind möglich, wenn nur die Pferde auf der linken bzw. rechten Seite des Hauptmanns ihre Plätze wechseln können?

$5! = 120;$

1.28.4 Stochastik-Buch Seite 88, Aufgabe 9

Wie viele Permutationen der Ziffern 1,2,3,4,5,6,7,8 beginnen a) mit 5, b) mit 1,2,3, c) mit 8,6,4,2?

a) $7! = 5040;$

b) $5! = 120;$

c) $4! = 24;$

1.28.5 Exzerpt von Kapitel 7.6 des Stochastik-Buchs

- Die Anzahl der k-Teilmengen aus einer n-Menge ist $\binom{n}{k}$.
- $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}; \quad n \in \mathbb{N}; k \in \{0, 1, \ldots, n\};$
- Binomische Formel: $\displaystyle(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k; \quad n \in \mathbb{N};$

30.11.2005

1.29 29. Hausaufgabe

1.29.1 Stochastik-Buch Seite 95, Aufgabe 24 [in der Schule gemacht]

Auf wie viele Arten lassen sich 15 nummerierte Kugeln so auf vier Fächer verteilen, dass das erste Fach 4, das zweite 5, das dritte und vierte je 3 Kugeln enthält? (Lösung mit Binomialkoeffizienten.)

$\binom{15}{4}\binom{11}{5}\binom{6}{3}\binom{3}{3} = 12\,612\,000;$

1.29.2 Stochastik-Buch Seite 95, Aufgabe 25 [in der Schule gemacht]

Ein Skatspiel wird ausgeteilt. Drei Spieler A,B,C bekommen je 10 Karten, 2 Karten kommen in den Skat.

a) Auf wie viele Arten können die Karten ausgeteilt werden?

$\binom{32}{10}\binom{22}{10}\binom{12}{10}\binom{2}{2} \approx 2{,}8 \cdot 10^{15};$

b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, bei denen A zwei Buben und B und C jeweils einen Buben bekommen? (Lösung mit Binomialkoeffizienten.)

$\binom{28}{8}\binom{20}{9}\binom{11}{9}\binom{2}{2} \cdot \binom{4}{2}\binom{2}{1}\binom{1}{1} \approx 3{,}5 \cdot 10^{14};$

1.29.3 Stochastik-Buch Seite 96, Aufgabe 27 [in der Schule gemacht]

Es sei $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

a) Bilden Sie alle 2-Tupel aus A.

$\Omega = \left\{(a, b) \;\middle|\; a, b \in A\right\};$

$|\Omega| = 4^2 = 16;$

b) Bilden Sie alle 2-Permutationen aus A.

$\Omega = \left\{(a, b) \;\middle|\; a, b \in A \wedge a \neq b\right\};$

$|\Omega| = 4 \cdot 3 = 12;$

c) Bilden Sie alle 2-Teilmengen aus A.

$\Omega = \big\{\{a, b\} \bigm| \{a, b\} \subset A\big\}$;

$|\Omega| = \binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$;

d) Bilden Sie alle 2-Kombinationen aus A.

$\Omega = \big\{\{_{\mathrm{M}}a, b\} \bigm| a, b \in A\big\}$;

$|\Omega| = \binom{4+2-1}{2} = 10$;

1.29.4 Stochastik-Buch Seite 96, Aufgabe 30 [in der Schule gemacht]

Dominosteine haben die Form doppelter Quadrate. Jedes Quadrat trägt eine Augenzahl von 0 bis 6. Wie viele Steine gibt es?

$\binom{7}{2} + 7 = \frac{7^2+7}{2} = 28$; 01.12.2005

1.29.5 Exzerpt der Kapitel 7.4–7.5 und 7.7–7.8 des Stochastik-Buchs

- Eine k-Permutation aus einer n-Menge mit Wiederholung ist ein k-Tupel, dessen Komponenten mit Elementen aus der Menge besetzt werden. Dabei ist Wiederholung zulässig, also ist $k > n$.

  Die Anzahl dieser Permutationen errechnet sich durch Bildung des Quotienten aus $k!$ und den „ausgleichenden Faktoren" (die selbst auch Fakultäten sind).

- Eine k-Permutation aus einer n-Menge ohne Wiederholung ist ein k-Tupel, bei dem jede Komponente mit einem anderen Element aus der Menge besetzt werden muss, also ist $k \leq n$.

  Die Anzahl dieser Permutationen ist $\frac{n!}{(n-k)!}$.

- Eine k-Kombination aus einer n-Menge ist eine Multimenge, deren Gesamtzahl an Elementen (kommt also beispielsweise ein Element doppelt vor, zählt es auch zweifach) gleich k ist. Die Multimenge wird mit Elementen aus der n-Menge besetzt, wobei Wiederholungen zugelassen sind.

  Die Anzahl dieser Kombinationen ist $\binom{n+k-1}{k}$.

02.12.2005

1.30 30. Hausaufgabe

1.30.1 Exzerpt der Kapitel 3.1–3.3 des Stochastik-Buchs

- Jede Teilmenge eines Ergebnisraums ist ein Ereignis.

  Ein Ereignis gilt genau dann als eingetroffen, wenn das Ereignis ein eingetroffenes Ergebnis enthält.

  Die Menge aller Ereignisse heißt Ereignisraum $\mathcal{P}$.

- Die leere Menge $\varnothing$ ist ebenfalls eine Teilmenge des Ergebnisraums, sie ist also ebenfalls ein Ereignis. Dieses Ereignis kann aber natürlichen im Modell nicht auftreten (es ist das unmögliche Ereignis).

- Der Ergebnisraum selbst ist auch eine Teilmenge von sich, er ist also auch ein Ereignis. Es tritt immer ein, es ist das sichere Ereignis.

- Ereignisse, die nur aus einem Ergebnis bestehen (z.B. $\{\omega\}$) heißen Elementarereignisse. $\omega \neq \{\omega\}$;

- Sind A und B Ereignisse und gilt $A \subset B$, so tritt Ereignis B „automatisch“ auch ein, wenn Ereignis A eintritt.

- Zwei Ereignisse A und B sind gleich, wenn gilt: $A \subset B \wedge B \subset A$;

- Zwei Ereignisse A und B heißen unvereinbar, wenn gilt: $A \cap B = \varnothing$;

  Mehr als oder genau zwei Ereignisse heißen paarweise unvereinbar, wenn jeweils zwei von ihnen unvereinbar sind.

- Eine Menge von paarweise unvereinbaren Ereignissen A_1, A_2, ... heißt Zerlegung von A wenn gilt: $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \ldots$;

1.30.2 Stochastik-Buch Seite 29, Aufgabe 1

Beim Würfeln interessiere die geworfene Augenzahl. Dabei seien folgende Ereignisse festgehalten:

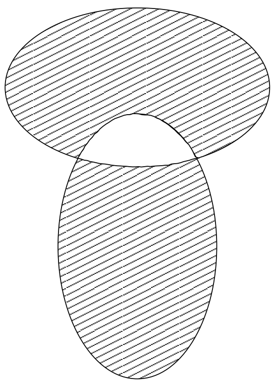
$A = \{2,4\}\,;\quad B = \{2,6\}\,;\quad C = \{2,4,6\}\,;$

a) Bilden Sie

- $\overline{A} = \{1, 3, 5, 6\}$;
- $\overline{B} = \{1, 3, 4, 5\}$;
- $\overline{C} = \{1, 3, 5\}$;
- $A \cap B = \{2\}$;
- $\overline{A} \cap B = \{6\}$;
- $A \cap \overline{B} = \{4\}$;
- $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1, 3, 5\}$;
- $A \cup B = \{2, 4, 6\}$;
- $\overline{A} \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6\}$;
- $A \cup \overline{B} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;
- $\overline{A} \cup \overline{B} = \{1, 3, 4, 5, 6\}$;

b) Interpretieren Sie das Ereignis $\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)$ und stellen Sie es im Venn-Diagramm und als Menge dar.

$\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right) = \left\{x \in \Omega \,\middle|\, (x \in A \vee x \in B) \wedge \overline{x \in A \wedge x \in B}\right\} = \{4, 6\}$;



05.12.2005

1.31 31. Hausaufgabe

1.31.1 Stochastik-Buch Seite 29, Aufgabe 2

Drei Ereignisse seien beim zweifachen Münzwurf mit $\Omega = \{\text{KK}, \text{KZ}, \text{ZK}, \text{ZZ}\}$ gegeben durch A: „Mit dem 1. Wurf K“, B: „Mit dem 2. Wurf K“, C: „Genau mit einem Wurf K“.

Zeigen Sie, dass jedes der drei Ereignisse A,B,C genau dann eintritt, wenn von den beiden anderen genau eines eintritt.

- $A = \{\mathrm{KK}, \mathrm{KZ}\}$;
- $B = \{\mathrm{KK}, \mathrm{ZK}\}$;
- $C = \{\mathrm{KZ}, \mathrm{ZK}\}$;

- $\forall \omega \in \Omega : \omega \in A \Leftrightarrow (\omega \in B \vee \omega \in C) \wedge \overline{\omega \in (B \cup C)}$;
- $\forall \omega \in \Omega : \omega \in B \Leftrightarrow (\omega \in A \vee \omega \in C) \wedge \overline{\omega \in (A \cup C)}$;
- $\forall \omega \in \Omega : \omega \in C \Leftrightarrow (\omega \in A \vee \omega \in B) \wedge \overline{\omega \in (A \cup B)}$;

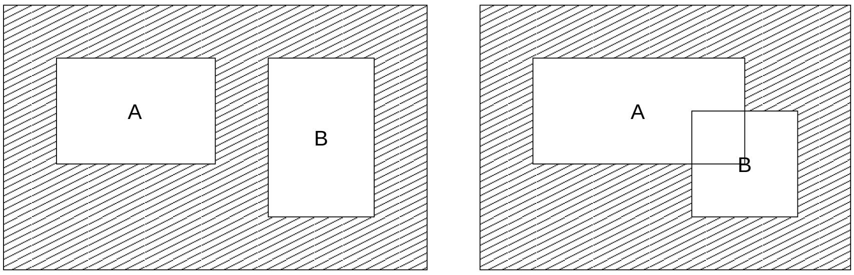
XXX was soll ich hier noch zeigen? Alle möglichen Ergebnisse durchgehen?
$A = \left(\overline{B} \cap C\right) \cup \left(B \cap \overline{C}\right)$;

1.31.2 Stochastik-Buch Seite 29, Aufgabe 3

Aufgabe 12 in Abschnitt 2 behandelt das Spiel „Papier–Schere–Stein". Stellen Sie folgende Ergebnisse dar:

- A: „Der 1. Spieler gewinnt"
  $A = \{(\text{Schere}, \text{Papier}), (\text{Papier}, \text{Stein}), (\text{Stein}, \text{Schere})\}$;
- B: „Der 2. Spieler gewinnt"
  $B = \{(\text{Papier}, \text{Schere}), (\text{Stein}, \text{Papier}), (\text{Schere}, \text{Stein})\}$;
- C: „Einer der beiden Spieler gewinnt"
  $C = A \cup B = \left\{(x, y) \mid x, y \in \{\text{Schere}, \text{Papier}, \text{Stein}\} \wedge x \neq y\right\}$;
- D: „Kein Spieler gewinnt"
  $D = \Omega \setminus C = \Omega \setminus (A \cup B) = \left\{(x, x) \mid x \in \{\text{Schere}, \text{Papier}, \text{Stein}\}\right\}$;

1.31.3 Gesetze von de Morgan



06.12.2005

„Die [Schüler des Kurses ohne die Mädchen] interessieren mich aus irgendeinem Grund überhaupt nicht.“ [aber aus dem Kontext gerissen; diente zur Erklärung von Ereignissen] 06.12.2005

1.32 32. Hausaufgabe

1.32.1 Stochastik-Buch Seite 29, Aufgabe 5

A, B und C symbolisieren drei Ereignisse. Drücken Sie die folgenden Aussagen symbolisch aus:

a) Alle drei Ereignisse treten ein.

$$M_{\mathrm{a}} = A \cap B \cap C;$$

b) Keines der drei Ereignisse tritt ein.

$$M_{\mathrm{b}} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C};$$

c) Genau eines der drei Ereignisse tritt ein.

$$M_{\mathrm{c}} = \left(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B \cap \overline{C}\right) \cup \left(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C\right);$$

d) Mindestens eines der drei Ereignisse tritt ein.

$$M_{\mathrm{d}} = A \cup B \cup C;$$

e) Höchstens eines der drei Ereignisse tritt ein.

$$M_{\mathrm{e}} = M_{\mathrm{b}} \cup M_{\mathrm{c}};$$

f) Genau zwei der drei Ereignisse treten ein.

$$M_{\mathrm{f}} = \left(A \cap B \cap \overline{C}\right) \cup \left(A \cap \overline{B} \cap C\right) \cup \left(\overline{A} \cap B \cap C\right);$$

g) Mindestens zwei der drei Ereignisse treten ein.

$M_{\mathrm{g}} = M_{\mathrm{f}} \cup M_{\mathrm{a}};$

h) Höchstens zwei der drei Ereignisse treten ein.

$M_{\mathrm{h}} = M_{\mathrm{b}} \cup M_{\mathrm{c}} \cup M_{\mathrm{f}} = M_{\mathrm{e}} \cup M_{\mathrm{f}};$

i) Nur die Ereignisse B und C treten ein.

$M_{\mathrm{i}} = \overline{A} \cap B \cap C;$

k) Nur das Ereignis C tritt ein.

$M_{\mathrm{k}} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap C;$

09.12.2005

„Physik ist sowieso eine Chaotendisziplin, im positiven Sinne“ 09.12.2005

1.33 33. Hausaufgabe

1.33.1 Stochastik-Buch Seite 29, Aufgabe 4

A und B seien zwei Ereignisse. Drücken Sie folgende Aussagen symbolisch aus:

a) Beide Ereignisse treten ein.

$A \cap B$

b) Höchstens eines von beiden Ereignissen tritt ein.

$\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right) \cup \left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)$

c) Keines von beiden Ereignissen tritt ein.

$\overline{A} \cap \overline{B}$

d) Mindestens eines von beiden Ereignissen tritt ein.

$A \cup B$

e) Genau eines von beiden Ereignissen tritt ein.

$\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)$

1.33.2 Stochastik-Buch Seite 30, Aufgabe 6

In einem Kraftwerk wird die Haverie einer Anlage von drei unabhängig voneinander arbeitenden Kontrollsignalen angezeigt. Diese unterliegen einer gewissen Störanfälligkeit. S_i sei das Ereignis: „Das i-te Signal funktioniert“ ($i = 1, 2, 3$). Drücken Sie die folgenden Ereignisse durch die S_i aus:

- A: „Alle drei Signale funktionieren“
  $A = S_1 \cap S_2 \cap S_3$;
- B: „Kein Signal funktioniert“
  $B = \overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \overline{S_3}$;
- C: „Mindestens ein Signal funktioniert“
  $C = S_1 \cup S_2 \cup S_3$;
- D: „Genau zwei von drei Signalen funktionieren“
  $D = \left(S_1 \cap S_2 \cap \overline{S_3}\right) \cup \left(S_1 \cap \overline{S_2} \cap S_3\right) \cup \left(\overline{S_1} \cap S_2 \cap S_3\right)$;
- E: „Mindestens zwei der drei Signale funktionieren“
  $E = (S_1 \cap S_2) \cup (S_1 \cap S_3) \cup (S_2 \cap S_3)$;
- F: „Genau ein Signal funktioniert“
  $F = \left(S_1 \cap \overline{S_2} \cap \overline{S_3}\right) \cup \left(\overline{S_1} \cap S_2 \cap \overline{S_3}\right) \cup \left(\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap S_3\right)$;

1.33.3 Exzerpt der Kapitel 5.1–5.3 des Stochastik-Buchs

- Der Anteil der für ein Ereignis günstiger Fälle an den insgesamt möglichen Fällen ist nach der Anteilsregel die Chance für das Eintreten des Ereignisses.
- Die Laplace-Wahrscheinlichkeit $P(A)$ eines Ereignisses A ist $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.
- Dabei muss Ω endlich sein und jedes Elementarergebnis muss die gleiche Wahrscheinlichkeit besitzen. Experimente, denen man Ergebnisräume zuordnet, die diese Eigenschaften erfüllen, heißen Laplace-Experimente.

Ω beschreibt ein Laplace-Experiment $\Rightarrow$

- $\forall A \subset \Omega : P(A) \in \mathbb{Q} \cap [0,1]\,;$
- $P(\varnothing) = 0;$
- $P(\Omega) = 1;$
- $\forall A \subset \Omega : P(A) + P(\overline{A}) = 1;$
- $\forall A \subset \Omega : \left\{\begin{matrix} A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots A_n; \\ A_i \cap A_j = \varnothing; \quad i,j = 1,2,\ldots,n; i \neq j; \end{matrix}\right\} \Rightarrow$
  $P(A) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n);$

13.12.2005

1.34 35. Hausaufgabe

1.34.1 Stochastik-Buch Seite 103, Aufgabe 35

a) Eine Münze wird 4 Mal geworfen.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Symbol Zahl genau k Mal oben liegt.

$p(k) = \frac{\binom{4}{k}}{2^4};$

b) Eine Münze wird n Mal geworfen.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Symbol Zahl genau k Mal oben liegt.

$p(k) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n};$

1.34.2 Stochastik-Buch Seite 104, Aufgabe 36

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Roulette-Kugel 37 Mal hintereinander im gleichen [bestimmten] Feld landet?

$\left(\frac{1}{37}\right)^{37}$

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Roulette-Kugel 37 Mal hintereinander in verschiedenen Feldern landet?

$$\frac{37!}{37^{37}}$$

1.34.3 Exzerpt von Kapitel 5.4 des Stochastik-Buchs

- Da die in der 33. Hausaufgabe beschriebenen Gesetze nur für Laplace-Experimente gelten, muss man beim Aufstellen des Ergebnisraums vorsichtig sein.
- Beispiel: Wurf zweier Münzen

  $\Omega = \{\{0,0\},\{1,1\},\{0,1\}\}$;

  Dieser Ergebnisraum beschreibt **kein** Laplace-Experiment.

  $\Omega' = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$;

  Die Elementarereignisse von Ω' hingegen haben sehr wohl alle die gleiche Wahrscheinlichkeit, namentlich $\frac{1}{4}$.

  Das Elementarereignis $\{\{0,1\}\}$ aus Ω hat also die Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.
- Über die Frage, ob ein Ergebnisraum ein Laplace-Experiment beschreibt oder nicht, kann die Mathematik meistens keine Antwort geben; stattdessen muss der „Intuition“/Erfahrung „vertraut“ werden.

14.12.2005

1.35 36. Hausaufgabe

1.35.1 Stochastik-Buch Seite 104, Aufgabe 37

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln

a) Augensumme 7 oder 11,

b) eine gerade Augensumme und

c) eine ungerade Augensumme zu werfen.

$\Omega = \{1,2,\ldots,6\}^2$; (Laplace)

$\Rightarrow |\Omega| = 6^2 = 36;$

a) $E_7 = \left\{(a,b) \,\middle|\, (a,b) \in \Omega \wedge a+b=7\right\};$

$a+b=7; \Rightarrow a = 7-b;$

$1 \leq 7-b \leq 6; \Rightarrow b \in \{1,2,3,4,5,6\};$

$\Rightarrow P(E_7) = \frac{|E_7|}{|\Omega|} = \frac{1}{6};$

$E_{11} = \left\{(a,b) \,\middle|\, (a,b) \in \Omega \wedge a+b=11\right\};$

$a+b=11; \Rightarrow a = 11-b;$

$1 \leq 11-b \leq 6; \Rightarrow b \in \{5,6\};$

$\Rightarrow P(E_{11}) = \frac{|E_{11}|}{|\Omega|} = \frac{1}{18};$

b) $E_{\text{gerade}} = \left\{(a,b) \,\middle|\, (a,b) \in \Omega \wedge (a+b) \bmod 2 = 0\right\};$

$\Rightarrow P(E_{\text{gerade}}) = \frac{\left|E_{\text{gerade}}\right|}{|\Omega|} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2};$

c) $E_{\text{ungerade}} = \left\{(a,b) \,\middle|\, (a,b) \in \Omega \wedge (a+b) \bmod 2 \neq 0\right\};$

$\Rightarrow P(E_{\text{ungerade}}) = \frac{\left|E_{\text{ungerade}}\right|}{|\Omega|} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2};$

1.35.2 Stochastik-Buch Seite 104, Aufgabe 39

Ein Würfel wird dreimal geworfen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

- A_1: „Augenzahl 6 nur beim 1. Wurf“
  $P(A_1) = \frac{1}{6}\frac{5}{6}\frac{5}{6} = \frac{25}{216};$
- A_2: „Augenzahl 6 bei genau einem Wurf“
  $P(A_2) = 3P(A_1) = \frac{25}{72};$
- A_3: „Augenzahl 6 nur beim 1. und 3. Wurf“
  $P(A_3) = \frac{1}{6}\frac{5}{6}\frac{1}{6} = \frac{5}{216};$
- A_4: „Augenzahl 6 bei genau zwei Würfen“
  $P(A_4) = 3P(A_3) = \frac{5}{72};$
- A_5: „Augenzahl 6 bei mindestens einem Wurf“
  $P(A_5) = \frac{|A_5|}{36^3} = \frac{3\cdot\left(5^2+5\right)+1}{6^3} = \frac{91}{216};$

- A_6: „Augenzahl 6 bei mindestens zwei Würfen"
  $P(A_6) = \frac{|A_6|}{36^3} = \frac{3\cdot(1\cdot1\cdot5)+1}{6^3} = \frac{2}{27};$

19.12.2005

1.36 37. Hausaufgabe

1.36.1 Stochastik-Buch Seite 104, Aufgabe 40

Mit welcher Wahrscheinlichkeit wirft man mit drei Würfeln einen Zweier-Pasch, d.h. genau zwei gleiche Augenzahlen?

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^3$; (Laplace)

$A_1 = \left\{(a,b,c) \mid (a,b,c) \in \Omega \wedge [(a=b \wedge a \neq c) \vee (a=c \wedge a \neq b) \vee (b=c \wedge b \neq a)]\right\};$

$\Rightarrow |A_1| = (6 \cdot 1 \cdot 5) \cdot 3 = 90;$

$\Rightarrow P(A_1) = \frac{|A_1|}{|\Omega|} = \frac{5}{12};$

Mit welcher Wahrscheinlichkeit wirft man mindestens zwei gleiche Augenzahlen?

$A_2 = \left\{(a,b,c) \mid (a,b,c) \in \Omega \wedge (a=b \vee a=c \vee b=c)\right\};$

$\Rightarrow |A_2| = |A_1| + 6 = (6 \cdot 1 \cdot 5) \cdot 3 + 6 = 96;$

$\Rightarrow P(A_2) = \frac{|A_2|}{|\Omega|} = \frac{4}{9};$

20.12.2005

1.37 38. Hausaufgabe

1.37.1 Stochastik-Buch Seite 106, Aufgabe 45

Ein Kartenspiel bestehe aus 32 Karten. Es wird gut durchgemischt. Jeder der 4 Spieler erhält gleich viele Karten. Man berechne die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

[Prinzipiell Aufgabe so unlösbar, da erstens nicht klar ist, dass alle Karten aufgeteilt werden und zweitens über den Kartentyp keine Aussage getroffen wurde...]

$$\Omega = \left\{ (a,b,c,d) \;\middle|\; \begin{array}{ll} & a,b,c,d \subset \{7,8,9,10,\mathrm{B},\mathrm{D},\mathrm{K},\mathrm{A}\} \times \{\heartsuit,\diamondsuit,\spadesuit,\clubsuit\} \\ \wedge & |a| = |b| = |c| = |d| = 8 \\ \wedge & \forall x \in \{a,b,c,d\} \colon \forall y \in \{a,b,c,d\} \setminus \{x\} \colon x \cap y = \emptyset; \end{array} \right\};$$

(Laplace)

- A: „Jeder Spieler bekommt ein Ass“

  $$P(A) = \frac{4! \cdot 1 \cdot \binom{28}{7}\binom{21}{7}\binom{14}{7}\binom{7}{7}}{\binom{32}{8}\binom{24}{8}\binom{16}{8}\binom{8}{8}} = \frac{512}{4495};$$

- B: „Ein bestimmter Spieler bekommt lauter Herz“

  $$P(B) = \frac{\binom{8}{8} \cdot \binom{24}{8}\binom{16}{8}\binom{8}{8}}{\binom{32}{8}\binom{24}{8}\binom{16}{8}\binom{8}{8}} = \frac{1}{\binom{32}{8}} = \frac{1}{10518300};$$

- C: „Ein beliebiger Spieler bekommt lauter Herz“

  $$P(C) = 4P(B) = \frac{1}{2629575};$$

1.37.2 Stochastik-Buch Seite 106, Aufgabe 46

Beim Skatspiel bekommen drei Spieler je 10 Karten, zwei Karten liegen im Skat. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass

a) die erste verteilte Karte ein Unter ist.

$P(A) = \frac{4}{32};$

b) die ersten beiden verteilten Karten Unter sind.

$P(B) = \frac{4}{32}\frac{3}{31};$

c) Eichel- und Grün-Unter im Skat liegen.

$P(C) = \frac{1}{32}\frac{1}{31} \cdot 2 = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{32}{2}};$

d) der erste Spieler alle Unter und Asse erhält.

$P(D) = \frac{\binom{8}{8} \cdot \binom{24}{2}}{\binom{32}{10}};$

e) ein Spieler alle Unter und alle Asse erhält.

$P(E) = 3P(D);$

1.37.3 Exzerpt von Kapitel 5.5 des Stochastik-Buchs

- Bei der Aufstellung eines Ergebnisraums, der die Laplace-Annahme erfüllen soll, ist besondere Vorsicht geboten.
- Beispielsweise ist beim Werfen zweier unterscheidbarer „Laplace"-Würfel $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$ ein Laplace-Raum, $\left\{\{_\mathrm{M}a, b\} \mid a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\right\}$ jedoch nicht.
- Daher sollte man immer die Tabelle im Hinterkopf haben, die wir aufgestellt haben.

26.12.2005

1.38 39. Hausaufgabe

1.38.1 Stochastik-Buch Seite 104, Aufgabe 41

Ein Würfel wird viermal geworfen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^4$; (Laplace)

- A_1: „Es erscheint genau dreimal Augenzahl 1, einmal Augenzahl 2"

  $P(A_1) = \frac{|A_1|}{|\Omega|} = \frac{4}{6^4} = \frac{1}{324}$;

- A_2: „Es erscheint genau dreimal Augenzahl 1"

  $P(A_2) = \frac{|A_2|}{|\Omega|} = 5P(A_1) = \frac{4 \cdot 5}{6^4} = \frac{5}{324}$;

- A_3: „Es erscheint genau dreimal die gleiche Augenzahl"

  $P(A_3) = \frac{|A_3|}{|\Omega|} = 6P(A_3) = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{6^4} = \frac{5}{54}$;

- A_4: „Es erscheint beim 1. Wurf Augenzahl 1, beim 2. und 3. Wurf Augenzahl 2, beim 4. Wurf Augenzahl 3"

  $P(A_4) = \frac{|A_4|}{|\Omega|} = \frac{1}{1296}$;

- A_5: „Es erscheint genau einmal Augenzahl 1, zweimal Augenzahl 2, einmal Augenzahl 3"

  $P(A_5) = \frac{|A_5|}{|\Omega|} = \frac{6 \cdot 2}{1296} = \frac{1}{108}$;

- A_6: „Die Augensumme ist höchstens 22“
  $P(A_6) = \frac{|A_6|}{|\Omega|} = \frac{6^4-1-4\cdot 1}{1296} = \frac{1291}{1296};$
- A_7: „Alle vier Augenzahlen sind verschieden“
  $P(A_7) = \frac{|A_7|}{|\Omega|} = \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{1296} = \frac{5}{18};$
- A_8: „Mindestens zwei Augenzahlen sind gleich“
  $P(A_8) = \dfrac{|A_8|}{|\Omega|} = \frac{6\cdot(6\cdot 1\cdot 5\cdot 4)+4\cdot(6\cdot 1\cdot 1\cdot 5)+1\cdot(6\cdot 1\cdot 1\cdot 1)+\frac{6}{2}\cdot(6\cdot 1\cdot 5\cdot 1)}{1296} = \frac{13}{18};$
- A_9: „Genau ein Zweier-Pasch wird geworfen“
  $P(A_9) = \frac{|A_9|}{|\Omega|} = \frac{6\cdot(6\cdot 1\cdot 5\cdot 4)}{1296} = \frac{5}{9};$
- A_{10}: „Zwei verschiedene Zweier-Pasche werden geworfen“
  $P(A_{10}) = \frac{|A_{10}|}{|\Omega|} = \frac{\frac{6}{2}\cdot(6\cdot 1\cdot 5\cdot 1)}{1296} = \frac{5}{72};$

1.38.2 Stochastik-Buch Seite 112, Aufgabe 51

Eine Urne enthält elf gleichartige Kugeln, von denen vier schwarz und sieben weiß sind. Der Urne werden fünf Kugeln

a) auf einmal,

b) nacheinander mit Zurücklegen

entnommen. Berechnen Sie in beiden Fällen die Wahrscheinlichkeit, zwei schwarze und drei weiße Kugeln zu ziehen.

a) $\Omega = \left\{M \;\middle|\; |M| = 5 \wedge M \subset \{1,2,3,\ldots,10,11\}\right\}$; (Laplace)

$|\Omega| = 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7 : 5! = \binom{11}{5} = 462;$

(Nummern 1 bis 4 $\leftarrow$ schwarze Kugeln, Nummern 5 bis 11 $\leftarrow$ weiße Kugeln)

$|A| = \binom{4}{2}\binom{7}{3} = 210;$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{11-4}{5-2}}{\binom{11}{5}} = \frac{5}{11};$$

b) $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, 10, 11\}^5$; (Laplace)

$|\Omega| = 11^5 = 161\,051$;

(Nummern 1 bis $4 \leftarrow$ schwarze Kugeln, Nummern 5 bis $11 \leftarrow$ weiße Kugeln) 29.12.2005

$|A| = (4 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7) \cdot \binom{5}{2}$;

$\Rightarrow P(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|} = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{4}{11}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{4}{11}\right)^3 = \frac{54880}{161051}$;

1.38.3 [Buch Seite 112, Aufgabe 53

In einem Lotterietopf befinden sich 100 Lose, von denen nur fünf gewinnen. Jemand kauft zehn Lose. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit

a) kein Gewinnlos,

b) genau ein Gewinnlos,

c) genau zwei Gewinnlose oder

d) höchstens zwei Gewinnlose

zu ziehen?

a) $P(A) = \dfrac{\binom{5}{0}\binom{100-5}{5-0}}{\binom{100}{5}} \approx 0{,}77$;

b) $P(B) = \dfrac{\binom{5}{1}\binom{100-5}{5-1}}{\binom{100}{5}} \approx 0{,}21$;

c) $P(C) = \dfrac{\binom{5}{2}\binom{100-5}{5-2}}{\binom{100}{5}} \approx 0{,}018$;

d) $A \cap B = A \cap C = B \cap C = \varnothing$;

$\Rightarrow P(D) = P(A) + P(B) + P(C) \approx 1{,}0$;

(Lösungen falsch; es werden zehn Kugeln gezogen!)]

1.38.4 [Buch Seite 112, Aufgabe 54

Eine Lotterie besteht aus 1000 Losen und ist mit 50 Treffern ausgestattet. Jemand kauft fünf Lose. Welche Wahrscheinlichkeit hat er, mindestens einen Treffer zu machen?

$$P(A) = \frac{\binom{50}{1}\binom{950}{5-1} + \binom{50}{2}\binom{950}{5-2} + \binom{50}{3}\binom{950}{5-3} + \binom{50}{5}\binom{950}{5-5} + \binom{50}{5}\binom{950}{5-5}}{\binom{1000}{5}} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{5}\binom{50}{k}\binom{950}{5-k}}{\binom{1000}{5}};$$

$\Rightarrow P(A) = \frac{186\,974\,260\,001}{825\,029\,125\,020} \approx 0{,}23;$]

1.38.5 Stochastik-Buch Seite 112, Aufgabe 56

Ein Laplace-Würfel wird fünfmal geworfen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, genau zweimal eine Sechs zu werfen.

$$P(A) = \frac{(1 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) \cdot \binom{5}{2}}{6^5} = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right)^3 = \frac{625}{3888};$$

1.38.6 Stochastik-Buch Seite 112, Aufgabe 57

In einer Urne liegen zwei schwarze und drei weiße gleichartige Kugeln. Vier Kugeln werden mit Zurücklegen gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden höchstens zwei schwarze Kugeln gezogen?

$$P(A) = \frac{\binom{4}{0}(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) + \binom{4}{1}(2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) + \binom{4}{2}(2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3)}{5^4} = \frac{513}{625};$$ 09.01.2006

1.39 40. Hausaufgabe

1.39.1 Stochastik-Buch Seite 112, Aufgabe 52

In einer Warenlieferung von 50 gleichartigen Teilen sei der Ausschuss $10\,\%$. Es werden 10 Teile ohne Zurücklegen entnommen. Die Zahl der Ausschussstücke in der Probe sei X. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit

a) für $X = 0$.

$$P_1 = \frac{\binom{5}{0}\binom{50-5}{10-0}}{\binom{50}{10}} \approx 31{,}1\,\%;$$

b) für $X \leq 1$.

$$P_2 = P_1 + \frac{\binom{5}{1}\binom{50-5}{10-1}}{\binom{50}{10}} \approx 74{,}2\,\%;$$

c) für $X > 1$.

$$P_3 = 1 - P_2 \approx 25{,}8\,\%;$$

26.12.2005

1.39.2 Stochastik-Buch Seite 112, Aufgabe 55

Eine Laplace-Münze wird zehnmal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, genau fünfmal Zahl zu erhalten?

$$P(A) = \frac{1^5 1^5 \binom{10}{5}}{2^{10}} = \tfrac{63}{256} \approx 24{,}6\,\%;$$

14.01.2006

1.40 41. Hausaufgabe

1.40.1 Exzerpt von Kapitel 4.2.2 des Stochastik-Buchs

- Die relative Häufigkeit $h_n(A)$ des Ereignisses A bei n-maliger Durchführung des Experiments ergibt sich zu $h_n(A) = \sum\limits_{\omega \in A} h_n(\{\omega\})$.
- Damit gilt:

  $0 \leq h_n(A) \leq 1$; („Zähler immer kleinergleich Nenner")
- $h_n(\varnothing) = 0;$
- $h_n(\Omega) = 1;$
- $A \cap B = \varnothing; \Rightarrow h_n(A \cup B) = h_n(A) + h_n(B);$
- $h_n(\overline{A}) = 1 - h_n(A)$; (wegen $A \cap \overline{A} = \varnothing$)
- $A, B \subset \Omega; \Rightarrow h_n(A \cup B) = h_n(A) + h_n(B) - h_n(A \cap B);$

1.40.2 Exzerpt von Kapitel 4.5 des Stochastik-Buchs

- Frequentistischer Wahrscheinlichkeitsbegriff: $P(A) := \lim\limits_{n \to \infty} h_n(A);$
- Empirische Gesetz der großen Zahlen: $h_n(A)$ stabilisiert sich bei bestimmten Ereignissen A für genügend große n.

16.01.2006

1.41 42. Hausaufgabe

1.41.1 Stochastik-Buch Seite 37, Aufgabe 3

50 % der Beschäftigten einer Baufirma rauchen Zigaretten, 35 % Pfeife und 30 % rauchen beides. Sonst wird nichts geraucht.

	Z	$\overline{\mathbf{Z}}$	
P	30 %	5 %	35 %
$\overline{\mathbf{P}}$	20 %	45 %	65 %
	50 %	50 %	100 %

a) Wie groß ist der Prozentsatz derer, die Zigratten oder Pfeife oder beides rauchen?

55 %

b) Wie groß ist der Prozentsatz derer, die entweder Zigratten oder Pfeife rauchen?

25 %

c) Wie groß ist der Prozentsatz der Nichtraucher?

45 %

d) Wie groß ist der Prozentsatz derer, die nicht beides rauchen?

70 %

1.41.2 Stochastik-Buch Seite 37, Aufgabe 4

Von 100 Personen sprechen 60 Englisch, 70 Französisch. Jede Person spricht wenigstens eine dieser Sprachen.

	E	$\overline{\mathbf{E}}$	
F	30	40	70
$\overline{\mathbf{F}}$	30	0	30
	60	40	100

a) Wie groß ist der prozentuale Anteil der Personen, die Englisch und Französisch sprechen?

30 %

b) Wie groß ist der prozentuale Anteil der nur Englisch bzw. Französisch sprechenden Personen?

$40\,\% + 30\,\% = 70\,\%$;

1.41.3 Stochastik-Buch Seite 37, Aufgabe 5

1989 bezeichneten sich $28\,\%$ der Bundesbürger im Alter von 15 und mehr Jahren als Raucher. Der Männeranteil in der Bevölkerung war $47\,\%$, der Anteil der weiblichen Nichtraucher $42\,\%$. Diese Zahlen sind in folgender Vierfeldertafel enthalten. Setzen Sie die übrigen Werte in die Felder ein.

	M	$\overline{\text{M}}$	
R	$17\,\%$	$11\,\%$	$28\,\%$
$\overline{\text{R}}$	$30\,\%$	$42\,\%$	$72\,\%$
	$47\,\%$	$53\,\%$	$100\,\%$

18.01.2006

1.42 43. Hausaufgabe

1.42.1 Stochastik-Buch Seite 123, Aufgabe 10

Aus einem Kartenspiel mit 32 Karten, das vier Könige enthält, wird in n aufeinander folgenden Zügen ohne Zurücklegen zufällig je eine Karte gezogen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

1. „Beim ersten Zug wird ein König gezogen“

   $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, 32\}$; (Laplace)

   1,2,3,4 sind Könige.

   $P = P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{4\}) = \frac{4}{32} = 12{,}5\,\%$;

2. **a)** „In zwei aufeinander folgenden Zügen wird je ein König gezogen“

   $P = \frac{4}{32}\frac{3}{31} \approx 1{,}2\,\%$;

   b) „In zwei aufeinander folgenden Zügen wird beim zweiten Zug ein König gezogen“

   $P = \frac{28}{32}\frac{4}{31} + \frac{4}{32}\frac{3}{31} = 12{,}5\,\%$;

3. **a)** „In drei aufeinander folgenden Zügen wird je ein König gezogen“
   $P = \frac{4}{32}\frac{3}{31}\frac{2}{30} \approx 0{,}1\,\%$;

   b) „In drei aufeinander folgenden Zügen wird beim dritten Zug ein König gezogen“
   $$P = \underbrace{\frac{28}{32}\frac{27}{31}\frac{4}{30}}_{0,0,1} + \underbrace{\frac{28}{32}\frac{4}{31}\frac{3}{30}}_{0,1,1} + \underbrace{\frac{4}{32}\frac{28}{31}\frac{3}{30}}_{1,0,1} + \underbrace{\frac{4}{32}\frac{3}{31}\frac{2}{30}}_{1,1,1} = 12{,}5\,\%;$$

4. **a)** „In vier aufeinander folgenden Zügen wird je ein König gezogen“
   $P = \frac{4}{32}\frac{3}{31}\frac{2}{30}\frac{1}{29} \approx 2{,}7 \cdot 10^{-3}$;

   b) „In vier aufeinander folgenden Zügen wird beim vierten Zug ein König gezogen“
   $$\begin{aligned} P &= \underbrace{\frac{28}{32}\frac{27}{31}\frac{26}{30}\frac{4}{29}}_{0,0,0,1} + \underbrace{\frac{28}{32}\frac{27}{31}\frac{4}{30}\frac{3}{29}}_{0,0,1,1} + \underbrace{\frac{28}{32}\frac{4}{31}\frac{27}{30}\frac{3}{29}}_{0,1,0,1} + \underbrace{\frac{28}{32}\frac{4}{31}\frac{3}{30}\frac{2}{29}}_{0,1,1,1} + \\ &+ \underbrace{\frac{4}{32}\frac{28}{31}\frac{27}{30}\frac{3}{29}}_{1,0,0,1} + \underbrace{\frac{4}{32}\frac{28}{31}\frac{3}{30}\frac{2}{29}}_{1,0,1,1} + \underbrace{\frac{4}{32}\frac{3}{31}\frac{28}{30}\frac{2}{29}}_{1,1,0,1} + \underbrace{\frac{4}{32}\frac{3}{31}\frac{2}{30}\frac{1}{29}}_{1,1,1,1} = \\ &= 12{,}5\,\%; \end{aligned}$$

5. [„In fünf aufeinander folgenden Zügen wird beim fünften Zug ein König gezogen“

$$\begin{aligned}
P &= \underbrace{\frac{28}{32}\frac{27}{31}\frac{26}{30}\frac{25}{29}\frac{4}{28}}_{0,0,0,0,1} + \underbrace{\frac{28}{32}\frac{27}{31}\frac{26}{30}\frac{4}{29}\frac{3}{28}}_{0,0,0,1,1} + \underbrace{\frac{28}{32}\frac{27}{31}\frac{4}{30}\frac{26}{29}\frac{3}{28}}_{0,0,1,0,1} + \underbrace{\frac{28}{32}\frac{27}{31}\frac{4}{30}\frac{3}{29}\frac{2}{28}}_{0,0,1,1,1} + \\
&+ \underbrace{\frac{28}{32}\frac{4}{31}\frac{27}{30}\frac{26}{29}\frac{3}{28}}_{0,1,0,0,1} + \underbrace{\frac{28}{32}\frac{4}{31}\frac{27}{30}\frac{3}{29}\frac{2}{28}}_{0,1,0,1,1} + \underbrace{\frac{28}{32}\frac{4}{31}\frac{3}{30}\frac{27}{29}\frac{2}{28}}_{0,1,1,0,1} + \underbrace{\frac{28}{32}\frac{4}{31}\frac{3}{30}\frac{2}{29}\frac{1}{28}}_{0,1,1,1,1} + \\
&+ \underbrace{\frac{4}{32}\frac{28}{31}\frac{27}{30}\frac{26}{29}\frac{3}{28}}_{1,0,0,0,1} + \underbrace{\frac{4}{32}\frac{28}{31}\frac{27}{30}\frac{3}{29}\frac{2}{28}}_{1,0,0,1,1} + \underbrace{\frac{4}{32}\frac{28}{31}\frac{3}{30}\frac{27}{29}\frac{2}{28}}_{1,0,1,0,1} + \underbrace{\frac{4}{32}\frac{28}{31}\frac{3}{30}\frac{2}{29}\frac{1}{28}}_{1,0,1,1,1} + \\
&+ \underbrace{\frac{4}{32}\frac{3}{31}\frac{28}{30}\frac{27}{29}\frac{2}{28}}_{1,1,0,0,1} + \underbrace{\frac{4}{32}\frac{3}{31}\frac{28}{30}\frac{2}{29}\frac{1}{28}}_{1,1,0,1,1} + \underbrace{\frac{4}{32}\frac{3}{31}\frac{2}{30}\frac{28}{29}\frac{1}{28}}_{1,1,1,0,1} + \underbrace{\frac{4}{32}\frac{3}{31}\frac{2}{30}\frac{1}{29}\frac{0}{28}}_{1,1,1,1,\text{„1“}} = \\
&= 12{,}5\,\%;]
\end{aligned}$$

1.42.2 Stochastik-Buch Seite 123, Aufgabe 11

Werkstücke einer Produktion werden kontrolliert auf richtigen Durchmesser (A) und richtige Dicke (B). Von 1000 Werkstücken waren bei 10 sowohl Durchmesser als aus Dicke falsch, bei 970 war der Durchmesser richtig, bei 950 war die Dicke richtig.

a) Wie groß ist die Anzahl der Werkstücke mit richtigem Durchmesser und richtiger Dicke?

	A	$\overline{\textbf{A}}$	
B	930	20	950
$\overline{\textbf{B}}$	40	10	50
	970	30	1000

930

b) Ein Werkstück wird zufällig herausgegriffen. Berechnen Sie

- $P(A) = \frac{970}{1000} = 97\,\%$;
- $P(\overline{A} \cap B) = \frac{20}{1000} = 2\,\%$;
- $P_{\overline{B}}(A) = \frac{40}{50} = 80\,\%$;
- $P_{A\cup B}(A\cap B) = \frac{P((A\cup B)\cap(A\cap B))}{P(A\cup B)} = \frac{P(A\cap B)}{P(A)+P(B)-P(A\cap B)} = \frac{930}{970+950-930} = \frac{930}{1000-10} \approx 93{,}9\,\%$;

22.01.2006

1.43 44. Hausaufgabe

1.43.1 Stochastik-Buch Seite 121, Aufgabe 2

Eine pharmazeutische Firma möchte ein neues Schlafmittel auf den Markt bringen. Ein Testverfahren soll über die Zulassung entscheiden. Folgende Eigenschaften seien definiert:

- H_0: „Das Schlafmittel ruft keinerlei Schädigung bei Schwangerschaften hervor“
- H_1: „Das Schlafmittel schädigt bei Schwangerschaft“
- T_0: „Das Schlafmittel wird zugelassen“
- T_1: „Das Schlafmittel wird nicht zugelassen“

Bei der Entscheidung über die Zulassung können folgende Fehler auftreten:

- Fehler 1. Art: Das Schlafmittel wird nicht zugelassen, obwohl es harmlos ist.
- Fehler 2. Art: Das Schlafmittel ruft Schädigungen hervor, aufgrund des Testergebnisses nimmt man aber keine Schädigung an.

a) Drücken Sie die bedingten Wahrscheinlichkeiten für beide Fehlerarten symbolisch aus.

- $P(\text{Fehler 1. Art}) = P_{H_0}(T_1)$;
- $P(\text{Fehler 2. Art}) = P_{H_1}(T_0)$;

b) Denken Sie an die Contergan-Affäre. Welchen von beiden Fehlern wird man eher in Kauf nehmen?

Den Fehler 1. Art.

1.43.2 Stochastik-Buch Seite 121, Aufgabe 3

Eine politische Partei möchte unmittelbar vor der Wahl wissen, ob ihr Kandidat bereits mit einer absoluten Mehrheit rechnen kann oder ob noch eine Intensivierung des Wahlkampes erforderlich ist. Die Entscheidung soll durch eine repräsentative Umfrage unter den Stimmberechtigten entschieden werden. Es sei

- H_0: „Der Kandidat hat noch keine absolute Mehrheit"
- H_1: „Der Kandidat hat bereits die absolute Mehrheit"
- T_0: „Die Partei entscheidet sich aufgrund des Testergebnisses für H_0"
- T_1: „Die Partei entscheidet sich aufgrund des Testergebnisses für H_1"

Drücken Sie die folgenden bedingten Wahrscheinlichkeiten symbolisch aus:

a) Die Wahrscheinlichkeit, irrtümlich davon auszugehen, dass keine Intensivierung des Wahlkampfes mehr nötig ist.

$P_\mathrm{a} = P_{H_0}(T_1);$

b) Die Wahrscheinlichkeit, zu Recht davon auszugehen, dass keine Intensivierung des Wahlkampfes mehr nötig ist.

$P_\mathrm{b} = P_{H_1}(T_1);$

c) Die Wahrscheinlichkeit, dass noch keine absolute Mehrheit vorliegt, obwohl das Testergebnis dafür spricht.

$P_\mathrm{c} = P_{T_1}(H_0);$

d) Die Wahrscheinlichkeit, dass bereits eine absolute Mehrheit besteht, obwohl das Testergebnis dagegen spricht.

$P_\mathrm{d} = P_{T_0}(H_1);$

23.01.2006

1.44 45. Hausaufgabe

1.44.1 Stochastik-Buch Seite 122, Aufgabe 5

Bei einer Untersuchung seien folgende Ereignisse gegeben:

- D: „Patient ist an Diabetes erkrankt“
- M: „Patient ist männlich“, W: „Patient ist weiblich“

Benutzen Sie die folgende Tabelle, um die gesuchten Wahrscheinlichkeiten zu berechnen:

	M	W	
D	0,04	0,01	0,05
$\overline{\mathbf{D}}$	0,56	0,39	

a) Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Patient an Diabetes erkrankt ist.

$5\,\%$

b) Die Wahrscheinlichkeit für Diabetes unter männlichen Patienten.

$4\,\%$

c) Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Patient männlich ist, wenn Diabetes vorliegt.

$\frac{4\,\%}{5\,\%} = 80\,\%;$

d) Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Patient weiblich ist, wenn Diabetes vorliegt.

$\frac{1\,\%}{5\,\%} = 20\,\%;$

e) Wie erkannt man, dass in diesem Beispiel die Diabeteserkrankung vom Geschlecht des Patienten abhängig ist?

$P_D(M) \neq P_D(W);$

1.44.2 Stochastik-Buch Seite 122, Aufgabe 8

Eine Urne enthält 16 gleichartige Kugeln, von denen 6 schwarz und 10 weiß sind. Der Urne werden 3 Kugeln nacheinander entnommen, ohne sie zurückzulegen. Es gelte die Laplace-Annahme. Man berechne unter Verwendung eines Ereignisbaums die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

- A_1: „Alle drei Kugeln sind weiß"
  $P(A_1) = \frac{10}{16}\frac{9}{15}\frac{8}{14} \approx 21{,}4\,\%$;
- A_2: „Zwei Kugeln sind weiß, eine ist schwarz"
  $$P(A_2) = \underbrace{\frac{10}{16}\frac{9}{15}\frac{6}{14}}_{w,w,s} + \underbrace{\frac{10}{16}\frac{6}{15}\frac{9}{14}}_{w,s,w} + \underbrace{\frac{6}{16}\frac{10}{15}\frac{9}{14}}_{s,w,w} \approx 48{,}2\,\%;$$
- A_3: „Eine Kugel ist weiß, zwei Kugeln sind schwarz"
  $$P(A_3) = \underbrace{\frac{10}{16}\frac{6}{15}\frac{5}{14}}_{w,s,s} + \underbrace{\frac{6}{16}\frac{10}{15}\frac{5}{14}}_{s,w,s} + \underbrace{\frac{6}{16}\frac{5}{15}\frac{10}{14}}_{s,s,w} \approx 26{,}8\,\%;$$
- A_4: „Alle Kugeln sind schwarz"
  $P(A_4) = \frac{6}{16}\frac{5}{15}\frac{4}{14} \approx 3{,}6\,\%$;

24.01.2006

1.45 46. Hausaufgabe

1.45.1 Stochastik-Buch Seite 121, Aufgabe 4

Bei einer Röntgenreihenuntersuchung bedeute

- H_0: „Die untersuchte Person ist nicht an Tbc erkrankt"
- H_1: „Die untersuchte Person ist an Tbc erkrankt"
- T_0: „Das Röntgenbild ergibt keinen Tbc-Verdacht"
- T_1: „Das Röntgenbild ergibt einen Tbc-Verdacht"

Interpretieren Sie folgende Wahrscheinlichkeiten:

- $P_{H_1}(T_0)$: Kein Verdacht trotz Erkrankung
- $P_{H_0}(T_1)$: Verdacht trotz Gesundheit
- $P_{T_0}(H_1)$: Erkrankung trotz Fehlen eines Verdachts
- $P_{T_1}(H_0)$: Gesundheit trotz Verdacht

1.45.2 Stochastik-Buch Seite 122, Aufgabe 6

Folgende Ereignisse seien definiert:

- H: „Eine Person ist HIV-infiziert"
- $\overline{H}$: „Eine Person ist nicht HIV-infiziert"
- T: „Der HIV-Test liefert ein positives Ergebnis"
- $\overline{T}$: „Der HIV-Test liefert ein negatives Ergebnis"

Die Güte des HIV-Tests lässt sich mit den Wahrscheinlichkeiten in folgender Vierfeldertafel beschreiben:

	H	$\overline{\textbf{H}}$	
T	$0{,}999 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$	$5{,}999 \cdot 10^{-3}$
$\overline{\textbf{T}}$	$0{,}001 \cdot 10^{-3}$	$994 \cdot 10^{-3}$	$994{,}001 \cdot 10^{-3}$
	$1{,}000 \cdot 10^{-3}$	$999 \cdot 10^{-3}$	

Berechnen Sie daraus

a) die so genannte Sensitivität $P_H(T)$ und Spezifität $P_{\overline{H}}(\overline{T})$ des Tests.

$P_H(T) = \frac{P(H \cap T)}{P(H)} = \frac{0{,}999 \cdot 10^{-3}}{1{,}000 \cdot 10^{-3}} = 99{,}9\,\%$;

$P_{\overline{H}}(\overline{T}) = \frac{P(\overline{H} \cap \overline{T})}{P(\overline{H})} = \frac{994 \cdot 10^{-3}}{999 \cdot 10^{-3}} \approx 99{,}5\,\%$;

b) die so genannten Aussagewerte $P_T(H)$ und $P_{\overline{T}}(\overline{H})$ des Tests.

$P_T(H) = \frac{P(H \cap T)}{P(T)} = \frac{0{,}999 \cdot 10^{-3}}{5{,}999 \cdot 10^{-3}} \approx 16{,}7\,\%$;

$P_{\overline{T}}(\overline{H}) = \frac{P(\overline{H} \cap \overline{T})}{P(\overline{T})} = \frac{994 \cdot 10^{-3}}{994{,}001 \cdot 10^{-3}} \approx 100\,\%$;

1.45.3 Stochastik-Buch Seite 122, Aufgabe 7

a) Berechnen Sie bei einem normalen Würfel $P_A(B)$ für

α**)**

$A = \{4\}; \quad B = \{1\};$
$\Rightarrow P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 0;$

β**)**

$A = \{1, 5\}; \quad B = \{1, 2, 3, 4, 6\};$
$\Rightarrow P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{2} = 50\,\%;$

γ**)**

$A = \{2, 4, 5\}; \quad B = \{1, 2, 3, 4\};$
$\Rightarrow P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{2}{3} \approx 66{,}7\,\%;$

δ**)**

$A = \{2, 3, 4, 5\}; \quad B = \{2, 3, 4\};$
$\Rightarrow P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{3}{4} = 75\,\%;$

ε**)**

$A = \{1, 3, 6\}; \quad B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\};$
$\Rightarrow P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{3}{3} = 1;$

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem Wurf mit zwei Würfeln das Maximum der Augenzahlen gleich 5 ist unter der Bedingung, dass das Minimum der Augenzahlen höchstens 3 ist.

$A = \left\{(a, b) \;\middle|\; (a < b \wedge a \leq 3) \vee (b < a \wedge b \leq 3) \vee a = b = 3\right\};$
$\Rightarrow |A| = 27;$

$B = \left\{(a, b) \;\middle|\; (a > b \wedge a = 5) \vee (b > a \wedge b = 5) \vee a = b = 5\right\};$
$\Rightarrow |B| = 1 \cdot 4 + 4 \cdot 1 + 1 = 9;$

$\Rightarrow P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{6}{27} \approx 22{,}2\,\%;$

1.45.4 Stochastik-Buch Seite 122, Aufgabe 9

Aus einer Urne, die eine rote, fünf weiße und zwei schwarze Kugeln enthält, werden nacheinander drei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Es gelte die Laplace-Annahme. Man berechne unter Verwendung eines Ergebnisbaums die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

- A: „Die beim ersten Zug entnommene Kugel ist schwarz“
  $P(A) = \underbrace{\frac{2}{8}\frac{6}{7}\frac{5}{6}}_{1,0,0} + \underbrace{\frac{2}{8}\frac{6}{7}\frac{1}{6}}_{1,0,1} + \underbrace{\frac{2}{8}\frac{1}{7}\frac{6}{6}}_{1,1,0} = \frac{1}{8 \cdot 7 \cdot 6} \cdot (2 \cdot 6) \cdot (7) = 25\,\%;$
- B: „Die beim zweiten Zug entnommene Kugel ist schwarz“
  $P(B) = \underbrace{\frac{6}{8}\frac{2}{7}\frac{5}{6}}_{0,1,0} + \underbrace{\frac{6}{8}\frac{2}{7}\frac{1}{6}}_{0,1,1} + \underbrace{\frac{2}{8}\frac{1}{7}\frac{6}{6}}_{1,1,0} = \frac{1}{8 \cdot 7 \cdot 6} \cdot (2 \cdot 6) \cdot (7) = 25\,\%;$
- C: „Die beim dritten Zug entnommene Kugel ist schwarz“
  $P(C) = \underbrace{\frac{6}{8}\frac{5}{7}\frac{2}{6}}_{0,0,1} + \underbrace{\frac{6}{8}\frac{2}{7}\frac{1}{6}}_{0,1,1} + \underbrace{\frac{2}{8}\frac{6}{7}\frac{1}{6}}_{1,0,1} = \frac{1}{8 \cdot 7 \cdot 6} \cdot (2 \cdot 6) \cdot (7) = 25\,\%;$

26.01.2006

1.46 47. Hausaufgabe

1.46.1 Stochastik-Buch Seite 130, Aufgabe 16

Zur Früherkennung einer Stoffwechselkrankheit bei Säuglingen wird eine neue Untersuchungsmethode entwickelt. Mit ihr wird die Krankheit in $80\,\%$ der Fälle zuverlässig erkannt, während der Anteil der irrtümlich als krank eingestuften Säuglinge bei $2\,\%$ liegt. Durchschnittlich tritt die Krankheit bei $1{,}0 \cdot 10^5$ Geburten hundertmal auf.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein untersuchter Säugling tatsächlich erkrankt ist, obwohl die Untersuchung keinen zuverlässigen Hinweis darauf ergeben hat?

$P_{H_1}(T_1) = 80\,\%; \quad P_{H_0}(T_1) = 2\,\%;$

$P(H_1) = \frac{100}{1{,}0 \cdot 10^5};$

$P_{T_0}(H_1) = \frac{P(H_1) P_{H_1}(T_0)}{P(H_1) P_{H_1}(T_0) + P(H_0) P_{H_0}(T_0)} = \frac{P(H_1)\big(1 - P_{H_1}(T_1)\big)}{P(H_1)\big(1 - P_{H_1}(T_1)\big) + (1 - P(H_1))\big(1 - P_{H_0}(T_1)\big)} \approx 2{,}0 \cdot 10^{-4};$

1.46.2 Stochastik-Buch Seite 131, Aufgabe 20

Bei einer Übertragung der Zeichen „Punkt“ und „Strich“ in einem Fernmeldesystem werden durch Störungen im Mittel $5\,\%$ der gesendeten Punkte als Striche und $3\,\%$ der gesendeten Striche als Punkte empfangen. Das Verhältnis von gesendeten Punkten zu gesendeten Strichen ist $\frac{3}{5}$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das richtige Zeichen empfangen wurde, falls a) Punkt, b) Strich empfangen wurde?

$P_{H_\circ}(T_-) = 5\,\%;$

$P_{H_-}(T_\circ) = 3\,\%;$

$\frac{P(H_\circ)}{P(H_-)} = \frac{3}{5}; \Rightarrow P(H_\circ) = \frac{3}{8};$

a) $P_{T_\circ}(H_\circ) = \frac{P(H_\circ)P_{H_\circ}(T_\circ)}{P(H_\circ)P_{H_\circ}(T_\circ)+P(H_-)P_{H_-}(T_\circ)} = 95\,\%;$

b) $P_{T_-}(H_-) = \frac{P(H_-)P_{H_-}(T_-)}{P(H_-)P_{H_-}(T_-)+P(H_\circ)P_{H_\circ}(T_-)} = 97\,\%;$

28.01.2006

1.47 48. Hausaufgabe

1.47.1 Stochastik-Buch Seite 130, Aufgabe 15

a) Um die Güte eines Tests zur Untersuchung von Neurotikern zu prüfen, werden 100 Versuchspersonen, von denen 10 neurotisch sind, getestet. Von den gesunden Versuchspersonen erbrachte der Test bei $20\,\%$ den Hinweis auf Neurotizismus, von den Neurotikern bei $90\,\%$.

Zeigen Sie: Die Wahrscheinlichkeit beträgt $33{,}3\,\%$, dass eine Person tatsächlich neurotisch ist, wenn der Test auf die Krankheit hingewiesen hat.

$P(N) = 10\,\%;$

$P_N(T) = 90\,\%; \quad P_{\overline{N}}(T) = 20\,\%;$

$\Rightarrow P_T(N) = \frac{P(N)P_N(T)}{P(N)P_N(T)+P(\overline{N})P_{\overline{N}}(T)} \approx 33{,}3\,\%;$

b) Nach Überarbeitung des Tests wird unter den genannten Bedingungen (100 Versuchspersonen, 10 davon neurotisch) mit anderen Versuchspersonen ein neuer Versuch unternommen. Man erhält nun bei den Gesunden nur noch in $10\,\%$ und bei den Kranken in $95\,\%$ der Fälle Hinweis auf Neorotizismus.

Zeigen Sie: Die Wirksamkeit des verbesserten Tests ist gegenüber der ursprünglichen Fassung von $33{,}3\,\%$ auf $51{,}4\,\%$ gestiegen.

$P(N) = 10\,\%;$

$P_N(T) = 95\,\%; \quad P_{\overline{N}}(T) = 10\,\%;$

$\Rightarrow P_T(N) = \frac{P(N)P_N(T)}{P(N)P_N(T)+P(\overline{N})P_{\overline{N}}(T)} \approx 51{,}4\,\%;$

1.47.2 Stochastik-Buch Seite 131, Aufgabe 19

An einem Ort sei an einem Fünftel aller Tage schlechtes Wetter; an den übrigen Tagen sei es gut. Es habe sich herausgestellt, dass am Vorabend eines Tages mit gutem Wetter die Wettervorhersage mit $70\,\%$ Wahrscheinlichkeit gut, mit $20\,\%$ Wahrscheinlichkeit wechselhaft und im Übrigen schlecht lautet. Ein Schlechtwettertag sei mit $60\,\%$ zutreffend angekündigt, mit $30\,\%$ als wechselhaft und sonst als gut vorausgesagt.

a) Verwenden Sie für das Wetter die Bezeichnungen W_{g} und W_{s}, für die Vorhersage V_{g}, V_{s} und V_{w}.

$P(W_{\text{s}}) = 20\,\%; \quad P(W_{\text{g}}) = 80\,\%;$

$P_{W_{\text{g}}}(V_{\text{g}}) = 70\,\%; \quad P_{W_{\text{g}}}(V_{\text{w}}) = 20\,\%; \quad P_{W_{\text{g}}}(V_{\text{s}}) = 10\,\%;$

$P_{V_{\text{s}}}(W_{\text{g}}) = 60\,\%; \quad P_{V_{\text{w}}}(W_{\text{s}}) = 30\,\%; \quad P_{V_{\text{g}}}(W_{\text{s}}) = 10\,\%;$

b) Heute abend wird gutes (schlechtes) Wetter angesagt. Wie zuverlässig ist diese Vorhersage?

$P_{V_{\text{g}}}(W_{\text{g}}) = 1 - P_{V_{\text{g}}}(W_{\text{s}}) = 90\,\%;$

$P_{V_{\text{s}}}(W_{\text{s}}) = 60\,\%;$

(XXX TEILWEISE (?) FALSCH)

30.01.2006

1.48 49. Hausaufgabe

1.48.1 Beweis der Unabhängigkeit von A und $\overline{B}$ unter der Voraussetzung der Unabhängigkeit von A und B

Voraussetzung: $P(A \cap B) = P(A)P(B) = P(A)P_A(B); \Rightarrow P_A(B) = P(B);$

Vermutung: $P(A \cap \overline{B}) = P(A)P(\overline{B}) = P(A)\,(1 - P(B))\,;$

Beweis: $P(A \cap \overline{B}) = P(A)P_A(\overline{B}) = P(A)\,(1 - P_A(B)) = P(A)\,(1 - P(B))\,;$

1.48.2 Stochastik-Buch Seite 146, Aufgabe 6

A und B seien zwei unabhängige Ereignisse $P(A) = \frac{3}{4}$, $P(B) = \frac{2}{3}$. Man berechne die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse, die durch folgende Aussagen beschrieben werden:

a) „Keines der beiden Ereignisse tritt ein"
$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B}) = \frac{1}{12}$;

b) „Genau eines der beiden Ereignisse tritt ein"
$P\big[(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)\big] = P(A)P(\overline{B}) + P(\overline{A})P(B) = \frac{5}{12}$;

c) „Beide Ereignisse treten ein"
$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{2}$;

d) „Mindestens eines von beiden Ereignissen tritt ein"
$P\big[(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)\big] + P(A \cap B) - P(A \cap B) = \frac{5}{12}$; (XXX: $\frac{11}{12}$?)

e) „Höchstens eines von beiden Ereignissen tritt ein"
$P(\overline{A} \cap \overline{B}) + P\big[(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)\big] = P(\overline{A})P(\overline{B}) + \ldots = \frac{1}{2}$;

1.48.3 Stochastik-Buch Seite 147, Aufgabe 9

Sei $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ der Ergebnisraum des Laplace-Experiments „Werfen eines Würfels". Es sei

- A: „Augenzahl größer 4"
- B: „Augenzahl gerade"
- C: „Augenzahl kleinergleich 3"
- D: „Augenzahl größergleich 4"
- E: „Augenzahl kleinergleich 5"
- F: „Augenzahl kleinergleich 4"

Zeigen Sie:

a) A und B sind vereinbar und unabhängig.

$A = \{5, 6\}; \quad B = \{2, 4, 6\};$

$A \cap B = \{6\} \neq \varnothing;$

$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{2} = P(B);$

b) C und D sind unvereinbar und abhängig.

$C = \{1, 2, 3\}; \quad D = \{4, 5, 6\};$

$C \cap D = \varnothing;$

$P_C(D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = 0 \neq P(D);$

c) E und F sind vereinbar und abhängig.

$E = \{1, 2, 3, 4, 5\}; \quad F = \{1, 2, 3, 4\};$

$E \cap F = \{1, 2, 3, 4\} \neq \varnothing;$

$P_E(F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = 1 \neq P(F);$

31.01.2006

1.49 50. Hausaufgabe

1.49.1 Stochastik-Buch Seite 130, Aufgabe 12

Drei völlig gleichartige Kästchen A,B,C besitzen je zwei Schublädchen a und b. A enthält in jedem Laden eine Goldmünze, B in einem eine Goldmünze, im anderen eine Silbermünze und C in beiden eine Silbermünze.

Man wählt ein Kästchen zufällig aus, öffnet eines der beiden Lädchen und findet darin eine Goldmünze. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, im anderen Lädchen eine Silbermünze zu finden?

$G = \{A_a, A_b, B_a\}; \quad S = \{B_a\};$

$\Rightarrow P_G(S) = \frac{P(G \cap S)}{P(G)} = \frac{1}{3};$

1.49.2 Stochastik-Buch Seite 130, Aufgabe 13

Eine Urne A enthält neun Kugeln mit den Nummern 1 bis 9, eine Urne B enthält fünf Kugeln mit den Nummern 1 bis 5. Alle Kugeln seien sonst gleichartig. Eine Urne wird zufällig ausgewählt und eine Kugel blindlings daraus gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt die Kugel aus der Urne A, vorausgesetzt, die gezogene Nummer ist gerade?

$K_A = \{1_A, 2_A, 3_A, \ldots, 9_A\}; \quad G = \{2_A, 4_A, 6_A, 8_A, 2_B, 4_B\};$

$\Rightarrow P_G(K_A) = \frac{P(G \cap K_A)}{P(G)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$; (XXX: $53\,\%$?) 02.02.2006

1.50 51. Hausaufgabe

1.50.1 Stochastik-Buch Seite 146, Aufgabe 2

Es sei $0 < P(A) < 1$.

a) Begründen Sie anschaulich, warum A abhängig von sich selbst ist.

Ist A eingetreten, so wissen wir, dass A eingetreten ist; also ist $P_A(A) = 1$.

b) Weisen Sie dies mathematisch nach.

Beweis durch Widerspruch.

Annahmen:

- $0 < P(A) < 1$;
- $P(A \cap A) = P(A)P(A)$;

$P(A \cap A) = P(A) = P(A)P(A)$;

Division durch $P(A)$ mit $P(A) \neq 0$ bringt:

$1 = P(A)$;

Dieser Fall wurde von der Angabe ausgeschlossen. Also ist A abhängig von sich selbst.

1.50.2 Stochastik-Buch Seite 146, Aufgabe 3

Zeigen Sie rechnerisch:

a) Sei $A = \varnothing$ oder $A = \Omega$. Dann sind für alle $B \subseteq \Omega$ die Ereignisse A und B unabhängig. Suchen Sie eine anschauliche Begründung.

- $A = \varnothing$;
  $\forall B \subseteq \Omega \colon 0 = P(A) = P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0P(B) = 0$;
  A ist das unmögliche Ereignis. Die Frage nach der bedingten Wahrscheinlichkeit unter der Bedingung $\varnothing$ ist nicht sinnvoll, da die Bedingung niemals eintreten kann.
- $A = \Omega$;
  $\forall B \subseteq \Omega \colon P(B) = P(A \cap B) = P(A)P(B) = 1P(B) = P(B)$;
  A ist das sichere Ereignis. Sein Eintreten gibt keine Information über das Eintreten anderer Ereignisse, da es immer eintritt.

b) Sind die Ereignisse A und B unabhängig und gilt $A \subseteq B$, so folgt $P(A) = 0$ oder $P(B) = 1$.

$A \subseteq B; \Leftrightarrow A \cap B = A; \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) = P(A)P(B)$;

Damit als einzige Lösungen $P(A) = 0$ (dann $0 = 0$) oder $P(B) = 1$ (dann $P(A) = P(A)$). Andere Lösungen gibt es nicht, wie die durch $P(A)$ dividierte Gleichung zeigt:

$1 = P(B)$;

1.50.3 Stochastik-Buch Seite 146, Aufgabe 4

Beim Roulette sei A: „1. Dutzend" ($\{1, 2, 3, \ldots, 12\}$) und B: „1. Querreihe" ($\{1, 2, 3\}$).

a) Warum sind A und B notwendigerweise abhängig?

Weil das Eintreten von A Informationen über das Eintreten von B preisgibt ($B \subset A$).

b) Zeigen Sie die Abhängigkeit mit Hilfe der Definitionsgleichung.

$\frac{3}{|\Omega|} = P(A \cap B) \neq P(A)P(B) = \frac{12}{|\Omega|}\frac{3}{|\Omega|}$;

c) Zeigen Sie allgemein, dass gilt: $B \subset A; \Rightarrow A$ und B abhängig für $P(A) \neq 1$ und $P(B) \neq 0$.

$\forall P(A) \neq 1, P(B) \neq 0 \colon B \subset A; \Rightarrow P(B) \neq P(A \cap B) = P(A)P(B)$;

(Siehe Aufgabe 3.)

06.02.2006

1.51 52. Hausaufgabe

1.51.1 Stochastik-Buch Seite 147, Aufgabe 14

Man zeige: Schreibt man den Elementarereignissen aus $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ gleiche Wahrscheinlichkeiten zu, so sind die Ereignisse $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$, $C = \{1, 4\}$ nur paarweise unabhängig.

$\frac{1}{4} = P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{4}$;

$\frac{1}{4} = P(A \cap C) = P(A)P(C) = \frac{1}{4}$;

$\frac{1}{4} = P(B \cap C) = P(B)P(C) = \frac{1}{4}$;

$\frac{1}{4} = P(A \cap B \cap C) \neq P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{8}$;

1.51.2 Stochastik-Buch Seite 148, Aufgabe 18

Der Zusammenhang zwischen Geschlecht und Rotgrünblindheit sei durch folgende Vierfeldertafel mit Prozentwerten beschrieben. Es sei M: „männlich“, W: „weiblich“, R: „Rotgrünblindheit“, N: „normal“:

	M	**W**
R	1,87	0,21
N	49,57	48,39

Berechnen Sie $P_R(M)$, $P_R(W)$, $P_M(R)$, $P_M(N)$ und begründen Sie die Abhängigkeit.

- $P_R(M) = \frac{1{,}87}{1{,}87+0{,}21} \approx 89{,}9\,\%$;
- $P_R(W) = 1 - P_R(M) \approx 10{,}0\,\%$;
- $P_M(R) = \frac{1{,}87}{1{,}87+49{,}57} \approx 3{,}6\,\%$;
- $P_M(N) = 1 - P_M(R) \approx 96{,}3\,\%$;

1.51.3 Stochastik-Buch Seite 148, Aufgabe 19

A und B seien zwei Ereignisse mit $P(A) = 0{,}4$ und $P(B) = 0{,}5$.

a) Wie lautet die Vierfeldertafel bei Unabhängigkeit?

	A	$\overline{\textbf{A}}$	
B	0,2	0,3	0,5
$\overline{\textbf{B}}$	0,2	0,3	0,5
	0,4	0,6	1

b) Der Grad der Abhängigkeit sei gegeben durch $P_A(B) = 0{,}75$. Konstruieren Sie die Vierfeldertafel.

	A	$\overline{\textbf{A}}$	
B	0,3	0,2	0,5
$\overline{\textbf{B}}$	0,1	0,4	0,5
	0,4	0,6	1

Man kann diese Abhängigkeit im Urnenmodell dadurch realisieren, dass man eine Urne mit zwei Kugeln von vier verschiedenen Farben füllt, wobei eine Farbe das gleichzeitige Eintreten zweier Ereignisse der Vierfeldertafel bedeutet. Geben Sie den Urneninhalt mit möglichst kleiner Gesamtzahl von Kugeln an.

$\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$;

$A = \{1, 2, 3, 4\}$; $\quad B = \{1, 2, 3\} \cup \{5, 6\}$;

c) Beschreiben Sie die Vierfeldertafel, wenn A und B unvereinbar bzw. total vereinbar sind ($A \subseteq B$).

	A	$\overline{\textbf{A}}$	
B	0	0,5	0,5
$\overline{\textbf{B}}$	0,4	0,1	0,5
	0,4	0,6	1

	A	$\overline{\textbf{A}}$	
B	0,4	0,1	0,5
$\overline{\textbf{B}}$	0	0,5	0,5
	0,4	0,6	1

1.51.4 Stochastik-Buch Seite 148, Aufgabe 20

1989 bezeichneten sich 14,2 Millionen Bundesbürger im Alter von 15 und mehr Jahren als Raucher. Damit beträgt der entsprechende Anteil an der Bevölkerung ca. 28 %. Deutliche Abweichungen treten hinsichtlich des Geschlechts auf. So rauchten etwa 36 % aller

Männer, jedoch „nur“ $21\,\%$ aller Frauen (Ergebnis des Mikrozensus 1989). Der Anteil der Männer mit Mindestalter 15 Jahren ist nach statistischem Jahrbuch ca. $47\,\%$. Eine Person dieser Altersgruppe werde zufällig herausgegriffen. M bedeute „männlich“, W „weiblich“, R „jemand raucht“, N „jemand raucht nicht“.

a) Berechnen Sie mit diesen Angaben die Wahrscheinlichkeiten der vier Ereignispaare $(M \cap R)$, $(W \cap R)$, $(M \cap N)$, $(W \cap N)$ und tragen Sie diese Werte in eine Vierfeldertafel ein.

	M	**W**	
R	$17\,\%$	$11\,\%$	$28\,\%$
N	$30\,\%$	$42\,\%$	$72\,\%$
	$47\,\%$	$53\,\%$	$100\,\%$

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person, die raucht, männlichen bzw. weiblichen Geschlechts ist?

$P_R(M) \approx \frac{17\,\%}{28\,\%} \approx 60{,}7\,\%;$

$P_R(W) = 1 - P_R(M) \approx 39{,}3\,\%;$

c) Weisen Sie die Abhängigkeit zwischen Rauchverhalten und Geschlecht nach.

$17\,\% \approx P(M \cap R) \neq P(M)P(R) \approx 13\,\%;$

09.02.2006

1.52 53. Hausaufgabe

1.52.1 Stochastik-Buch Seite 149, Aufgabe 21

Wir betrachten das zweimalige Werfen eines fairen Würfels und die drei Ereignisse A_i für $i = 1, 2, 3$. A_1 bzw. A_2 sei das Ereignis, dass beim 1. bzw. 2. Wurf eine ungerade Augenzahl fällt; A_3 sei das Ereignis, dass die Summe der geworfenen Augenzahlen ungerade ist.

a) Zeigen Sie, dass je zwei dieser drei Ereignisse unabhängig sind.

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2;$

$A_1 = \{1, 3, 5\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}; \Rightarrow |A_1| = 3 \cdot 6 = 18;$

$A_2 = \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,3,5\}; \Rightarrow |A_2| = 6 \cdot 3 = 18;$

$A_3 = \{(a,b)|(a+b) \bmod 2 = 1\}; \Rightarrow |A_3| = 6 \cdot 3 = 18;$

$\frac{1}{4} = P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2) = \frac{1}{4};$

$\frac{1}{4} = P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3) = \frac{1}{4};$

$\frac{1}{4} = P(A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3) = \frac{1}{4};$

b) Zeigen Sie, dass die A_i abhängig sind.

$0 = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \neq P(A_1)P(A_2)P(A_3) = \frac{1}{8};$

1.52.2 Stochastik-Buch Seite 149, Aufgabe 22

Für drei Ereignisse A, B, C mit positiven Wahrscheinlichkeiten gelte

$P(A) = P_B(A) = P_C(A) = P_{B\cap C}(A);$

$P(B) = P_A(B) = P_C(B) = P_{A\cap C}(B);$

$P(C) = P_A(C) = P_B(C) = P_{A\cap B}(C);$

Zeigen Sie, dass diese drei Bedingungen mit den Multiplikationsregeln für drei unabhängige Ereignisse äquivalent sind.

$P(A) = P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}; \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B);$

$P(A) = P_C(A) = \frac{P(A\cap C)}{P(C)}; \Leftrightarrow P(A \cap C) = P(A)P(C);$

$P(B) = P_C(B) = \frac{P(B\cap C)}{P(C)}; \Leftrightarrow P(B \cap C) = P(B)P(C);$

$P(A) = P_{B\cap C}(A) = \frac{P(A\cap B\cap C)}{P(B\cap C)}; \Leftrightarrow$
$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B \cap C) = P(A)P(B)P(C);$ 11.02.2006

1.53 54. Hausaufgabe

1.53.1 Stochastik-Buch Seite 149, Aufgabe 27

In einer Massenproduktion werden Schrauben einer bestimmten Sorte hergestellt. Aus dem Sortiment wird eine Schraube zufällig herausgegriffen. Erfahrungsgemäß ist die Wahrscheinlichkeit für eine fehlerhafte Schraube $0{,}1$ und für eine fehlerhafte Schraubenmutter $0{,}05$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Schraubenkopf und Schraubenmutter zusammenpassen, wenn sie unabhängig hergestellt werden?

$(1-0{,}1)\,(1-0{,}05) = 85{,}6\,\%$;

1.53.2 Stochastik-Buch Seite 149, Aufgabe 28

Beim Zusammenbau eines Elektrogeräts werden fünf Widerstände und vier Kondensatoren verwendet. Die Ausschusswahrscheinlichkeit für die Widerstände sei $4\,\%$, für die Kondensatoren $5\,\%$. Man berechne bei geeigneten Unabhängigkeitsmaßnahmen die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A: „Mindestens ein Bauteil ist fehlerhaft".

$P(A) = 1 - (1-4\,\%)^5\,(1-5\,\%)^4 \approx 33{,}6\,\%$; (XXX nicht 100 % sicher)

1.53.3 Stochastik-Buch Seite 150, Aufgabe 29

Drei Glühlampen verschiedenen Fabrikats brennen erfahrungsgemäß mit den Wahrscheinlichkeiten $w_1 = \frac{3}{4}$ bzw. $w_2 = \frac{2}{3}$ bzw. $w_3 = \frac{1}{2}$ länger als 1000 Stunden. Man berechne die Wahrscheinlichkeit, dass

a) genau zwei,

b) mindestens zwei,

c) höchstens zwei,

d) keine

mehr als 1000 Stunden brennen.

Dabei sind geeignete Unabhängigkeitsannahmen zu machen.

Welchen Ergebnisraum wird man zugrunde legen?

a) $P(A_\text{a}) = P(1 \cap 2 \cap \overline{3}) + P(1 \cap \overline{2} \cap 3) + P(\overline{1} \cap 2 \cap 3) = w_1 w_2\,(1-w_3) + w_1\,(1-w_2)\,w_3 + (1-w_1)\,w_2 w_3 \approx 45{,}8\,\%$;

b) $P(A_\text{b}) = P(A_\text{a}) + P(1 \cap 2 \cap 3) = P(A_\text{a}) + w_1 w_2 w_3 \approx 70{,}8\,\%$;

c) $P(A_\mathrm{c}) = 1 - P(A_\mathrm{b}) + P(A_\mathrm{a}) = 75\,\%$;

d) $P(A_\mathrm{d}) = P(\overline{1} \cap \overline{2} \cap \overline{3}) = (1 - w_1)\,(1 - w_2)\,(1 - w_3) \approx 4{,}2\,\%$;

$\Omega = \{0, 1\}^3$; 20.02.2006

1.54 55. Hausaufgabe

1.54.1 Stochastik-Buch Seite 150, Aufgabe 30

Aus einer Sterbetafel kann man ausgehend von einer großen Anzahl $N(x)$ von x-jährigen Personen die Anzahl $N(y)$ der davon im Alter von y noch lebenden Personen entnehmen. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte x-jährige Person das Alter y erreicht, ist $N(y) : N(x)$.

Die folgende Tabelle zeigt einen Auszug aus einer Sterbetafel:

Alter	Überlebende
0	100 000
30	82 577
40	79 412
50	74 152

Unter geeigneten Annahmen über die Unabhängigkeit berechne man die Wahrscheinlichkeit, dass von zwei Personen mit 30 bzw. 40 Jahren nach 10 Jahren...

a) ...beide noch leben.

$\frac{N(40)}{N(30)} \cdot \frac{N(50)}{N(40)} = \frac{N(50)}{N(30)} \approx 89{,}8\,\%$;

b) ...mindestens eine noch lebt.

$1 - \left(1 - \frac{N(40)}{N(30)}\right)\left(1 - \frac{N(50)}{N(40)}\right) \approx 99{,}7\,\%$;

c) ...höchstens eine noch lebt.

$1 - \frac{N(40)}{N(30)} \cdot \frac{N(50)}{N(40)} \approx 10{,}2\,\%$;

d) ...keine mehr lebt.

$\left(1 - \frac{N(40)}{N(30)}\right)\left(1 - \frac{N(50)}{N(40)}\right) \approx 0{,}3\,\%$;

e) ...genau eine noch lebt.

$\frac{N(40)}{N(30)}\left(1 - \frac{N(50)}{N(40)}\right) + \left(1 - \frac{N(40)}{N(30)}\right)\frac{N(50)}{N(40)} \approx 9{,}9\,\%$;

1.54.2 Stochastik-Buch Seite 150, Aufgabe 31

Ein Gerät werde aus 35 Komponenten montiert. Sobald eine Komponente defekt ist, fällt das Gerät aus. Bei den Komponenten handelt es sich teils um Zulieferteile und teils um selbst hergestellte Zwischenprodukte. Die Zulieferteile haben erfahrungsgemäß einen Ausschussanteil von $1\,\%$ und die selbst hergestellten Teil von $0{,}1\,\%$. Das Gerät enthält zehn Zulieferteile. Die restlichen Komponenten werden selbst gefertigt.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, ein funktionsfähiges Gerät zu montieren?

$(1-1\,\%)^{10}\,(1-0{,}1\,\%)^{35-10} \approx 88{,}2\,\%;$

b) Wie groß ist der Anteil der Geräte, die aufgrund mindestens eines fehlerhaften Zulieferteils defekt sind?

$1-(1-1\,\%)^{10} \approx 9{,}6\,\%;$

c) Ist das Qualitätsziel „99 % fehlerfreie Geräte vor Endprüfung" zu erreichen, wenn das Qualitätsniveau der Zulieferteile auf das der selbst produzierten Teile erhöht wird?

$(1-0{,}1\,\%)^{35} \approx 96{,}6\,\% < 99\,\%;$

d) Mit welchem Ausschussanteil der Komponenten kann das Qualitätsziel erreicht werden? (Der Ausschussanteil der Zulieferteile und der selbst hergestellten Teile soll gleich groß sein.)

$(1-x)^{35} \geq 99\,\%; \Rightarrow x \geq 1-\sqrt[35]{99\,\%} \approx 0{,}029\,\%;$

1.54.3 Stochastik-Buch Seite 150, Aufgabe 32

Ein Gerät bestehe aus drei Bauteilen T_1, T_2, T_3. Es sei funktionstüchtig, wenn das Teil T_1 störungsfrei arbeitet oder die beiden Teile T_2 und T_3 zusammen.

a) Zeichnen Sie das Schaltbild.

Parallelschaltung, bestehend aus T_1 in einem Ast und einer Reihenschaltung aus T_2 und T_3 im anderen Ast.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit funktioniert das Gerät, wenn die Bauteile mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1 = 0{,}7$, $p_2 = p_3 = 0{,}8$ intakt sind?

$p_1 (1 - p_2)(1 - p_3) + p_1 (1 - p_2) p_3 + p_1 p_2 (1 - p_3) + (1 - p_1) p_2 p_3 + p_1 p_2 p_3 = p_1 + (1 - p_1) p_2 p_3 = 89{,}2\,\%;$

21.02.2006

1.55 56. Hausaufgabe

1.55.1 Angabe einer bestimmten Strecke

$A(5,3,4); \quad B(-10,-3,-8);$

$$
\begin{aligned}
[AB] &= \left\{ \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -10-5 \\ -3-3 \\ -8-4 \end{pmatrix} \text{ mit } k \in [0,1] \right\} = \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 5-(-10) \\ 3-(-3) \\ 4-(-8) \end{pmatrix} \text{ mit } k \in [0,1] \right\} = \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \vec{A} + k\overrightarrow{AB} \text{ mit } k \in [0,1] \right\} = \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \vec{B} + k\overrightarrow{BA} \text{ mit } k \in [0,1] \right\};
\end{aligned}
$$

25.02.2006

1.56 57. Hausaufgabe

1.56.1 Geometrie-Buch Seite 162, Aufgabe 1

Welche Lage hat $g\colon \vec{X} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) + \lambda \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ zu...

- $a\colon \vec{X} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -5 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) + \alpha \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right);$

  $\forall r \in \mathbb{R}\colon \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) \neq r \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right);$

  $\Rightarrow g$ und a sind nicht parallel.

Gleichsetzen bringt keinen Widerspruch $\Rightarrow$ g und a schneiden sich in einem Punkt.

- b: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$;

  $\forall r \in \mathbb{R}$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \neq r \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$;

  $\Rightarrow$ g und b sind nicht parallel.

  Gleichsetzen bringt Widerspruch $\Rightarrow$ g und b sind windschief.

- c: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$;

  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$;

  $\Rightarrow$ g und c sind parallel.

  $\forall r \in \mathbb{R}$: $\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} \neq r \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$;

  $\Rightarrow$ g und c sind echt parallel.

- d: $\vec{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$;

  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$;

  $\Rightarrow$ g und d sind parallel.

  $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$;

  $\Rightarrow$ g und d sind identisch.

07.03.2006

1.57 58. Hausaufgabe

1.57.1 Geometrie-Buch Seite 162, Aufgabe 3

$A(-5, 4, -2)$, $B(6, -3, 4)$, $C(10, -6, 18)$, $D(0, 0, 22)$. Zeige durch Berechnung des Diagonalschnittpunkts, dass $ABCD$ ein ebenes Viereck ist.

Annahme: Diagonalen sind AC und BD, nicht AB und CD!

$AC : \vec{X} = \vec{A} + k\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 15 \\ -10 \\ 20 \end{pmatrix}$;

$BD : \vec{X} = \vec{B} + k\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 18 \end{pmatrix}$;

$\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 15 \\ -10 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 18 \end{pmatrix};$

$\Leftrightarrow k \begin{pmatrix} 15 \\ -10 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 18 \end{pmatrix};$

$15k = 11 - 6l; \Leftrightarrow k = \frac{11-6l}{15};$

$-\frac{10}{15}(11 - 6l) = -7 + 3l; \Leftrightarrow l = \frac{1}{3};$

Die Lösungen für k und l erfüllen auch die dritte Gleichung.

1.57.2 Geometrie-Buch Seite 163, Aufgabe 5

Beschreibe die möglichen lagen der Geraden v und w im Raum, die bei bestimmter Blickrichtung so ausschauen:

a) echt parallel, windschief

b) echt parallel, identisch, schneiden sich in einem Punkt

c) schneiden sich in einem Punkt, windschief

d) windschief

e) echt parallel

f) identisch

1.57.3 Geometrie-Buch Seite 163, Aufgabe 6a

Die Ortsvektoren von $A(6, 0, 3)$, $B(6, 12, 0)$ und $C(-3, 0, 6)$ spannen ein Spat auf.

M ist Kantenmittelpunkt, S ist Mittelpunkt der Deckfläche.

Berechne den Schnittpunkt T von $[AM]$ und $[OS]$.

- $[AM]$: $\vec{X} = \vec{A} + k\overrightarrow{AM}; \quad k \in [0, 1];$
  - $\vec{M} = \frac{\vec{G}+\vec{C}}{2};$
    - $\vec{G} = \vec{C} + \vec{B};$

    $\Rightarrow \vec{M} = \frac{\vec{G}+\vec{C}}{2} = \vec{C} + \frac{1}{2}\vec{B};$
- $[0S]$: $\vec{X} = 0 + k\overrightarrow{0S}; \quad k \in [0, 1];$
  - $\vec{S} = \frac{\vec{C}+\vec{F}}{2};$

- $\vec{F} = \vec{G} + \vec{A} = \vec{C} + \vec{B} + \vec{A};$

$\Rightarrow \vec{S} = \vec{C} + \frac{\vec{A}+\vec{B}}{2};$

Nun sind die Streckengleichungen bekannt. Gleichsetzen bringt:

$\vec{A} + k_T \left(\vec{C} + \frac{1}{2}\vec{B} - \vec{A}\right) = 0 + l_T \left(\vec{C} + \frac{\vec{A}+\vec{B}}{2}\right);$

Nun erweitere ich unsere Kurzschreibweisendefinition: Wird k_T als Vektor verwendet, steht k_T für $\begin{pmatrix} k_T \\ k_T \\ k_T \end{pmatrix}$, wobei die Vektorkomponenten gleich dem originalen, skaleren k_T sind.

Idee: Expandiert man die Vektorgleichung zu einem Gleichungssystem mit drei Gleichungen (je eine für jede Komponente), kommt k_T, als reelle Zahl, in jeder der Teilgleichungen vor.

Laut unserer Kurzschreibweisenvereinbarung ist es damit zulässig, folgende Ersetzung durchzuführen:

Original:
$a = \ldots;$
$b = \ldots;$
$c = \ldots;$

Ersetzung: $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ldots \\ \ldots \\ \ldots \end{pmatrix};$

Diese Ersetzung führe ich nun auch durch – nur statt a, b und c steht jedesmal k_T.

Dies ermöglicht es mir, $\vec{A}$ von der linken auf die rechte Seite zu bringen, und – wichtiger – durch $\left(\vec{C} + \frac{1}{2}\vec{B} - \vec{A}\right)$ zu teilen!

$$k_T = \frac{l_T \left(\vec{C} + \frac{\vec{A}+\vec{B}}{2}\right) - \vec{A}}{\vec{C} + \frac{1}{2}\vec{B} - \vec{A}};$$

Die Komponenten dieses Ergebnisses müssen nun – sonst bricht unsere Kurzschreibweisenargumentation zusammen – alle den gleichen Wert aufweisen, damit wir ein skalares k_T erhalten.

Also setze ich an: 1. Komponente = 2. Komponente = 3. Komponente;

$$\frac{l_T \left(\vec{C}_1 + \frac{\vec{A}_1+\vec{B}_1}{2}\right) - \vec{A}_1}{\vec{C}_1 + \frac{1}{2}\vec{B}_1 - \vec{A}_1} = \frac{l_T \left(\vec{C}_2 + \frac{\vec{A}_2+\vec{B}_2}{2}\right) - \vec{A}_2}{\vec{C}_2 + \frac{1}{2}\vec{B}_2 - \vec{A}_2} = \frac{l_T \left(\vec{C}_3 + \frac{\vec{A}_3+\vec{B}_3}{2}\right) - \vec{A}_3}{\vec{C}_3 + \frac{1}{2}\vec{B}_3 - \vec{A}_3};$$

Überraschenderweise erhält man für l_T $\frac{2}{3}$ – aber ohne die Komponenten einsetzen zu müssen; l_T ist also unabhängig von $\vec{A}$, $\vec{B}$ und $\vec{C}$!

Mit $0 \leq l_T = \frac{2}{3} \leq 1$ kann auch k_T berechnet werden. Vektoriell ergibt sich für k_T $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, gemäß der obigen Definition ist es also zulässig von k_T nur als $\frac{2}{3}$ zu sprechen.

Mit bekanntem k_T und l_T ist es nun natürlich möglich, die Schnittspunktskoordinaten durch Einsetzen zu berechnen. Es ist nicht wichtig, in welche Gleichung man k_T bzw. l_T einsetzt – die Äquivalenz haben wir ja soeben bewiesen. Man erhält für T:

$T = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix};$

(Definition der hier benutzten Vektordivision: $\frac{\vec{a}}{\vec{b}} = \frac{a_1}{b_1}$, falls $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$;) 08.03.2006

1.58 59. Hausaufgabe

1.58.1 Geometrie-Buch Seite 163, Aufgabe 6b

Die Ortsvektoren von $A(6, 0, 3)$, $B(6, 12, 0)$ und $C(-3, 0, 6)$ spannen ein Spat auf.

M ist Kantenmittelpunkt, S ist Mittelpunkt der Deckfläche.

Berechne den Schnittpunkt U von $[CT]$ und $[0D]$.

[$T = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$;]

$\vec{D} = \vec{A} + \vec{B};$

$[CT]$: $\vec{X} = \vec{C} + k\overrightarrow{CT}; \quad k \in [0, 1]\,;$

$[0D]$: $\vec{X} = 0 + l\vec{D}; \quad l \in [0, 1]\,;$

Gleichsetzen bringt: $l = 1; \quad k = 3;$

Da dieser Wert für k nicht in der Definitionsmenge von k liegt, gibt es keinen Schnittpunkt. 09.03.2006

1.58.2 Geometrie-Buch Seite 164, Aufgabe 8

K und L sind Kantenmitten der vierseitigen Pyramide $ABCDE$.

a) Zeige, dass sich CK und DL schneiden, und berechne den Schnittpunkt S.

$A(6,-12,0)$, $B(6,0,0)$, $C(-3,0,0)$, $D(-3,-12,0)$, $E(0,0,6)$

$\vec{K} = \frac{\vec{A}+\vec{E}}{2} = \begin{pmatrix}3\\-6\\3\end{pmatrix}$; $\quad \vec{L} = \frac{\vec{B}+\vec{E}}{2} = \begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix}$;

Gleichsetzen und Auflösen bringt $k = v = \frac{2}{3}$;

Einsetzen bringt $S = \begin{pmatrix}1\\-4\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$;

b) Untersuche die Lage von AC und ES. Schnittpunkt T?

Gleichsetzen bringt Widerspruch; es gibt kein Schnittpunkt.

[XXX Falsch: $S(\frac{3}{2},-6,0)$;]

c) Untersuche die Lage von DK und CL. Schnittpunkt U?

Gleichsetzen und Auflösen bringt $k = v = 2$;

Einsetzen bringt $U = \begin{pmatrix}9\\0\\6\end{pmatrix}$;

08.03.2006

1.58.3 Geometrie-Buch Seite 167, Aufgabe 20

$A(1,2,2)$, $B(2,-1,1)$, g_k: $\vec{X} = \begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}2k\\-9\\-3\end{pmatrix}$;

a) Beschreibe die Schar g_k.

Die Schar besteht aus unendlich vielen zueinander nicht parallelen geraden, die sich alle im Aufpunkt schneiden.

b) Bestimme k so, dass g_k parallel zu AB ist.

$\begin{pmatrix}2k\\-9\\-3\end{pmatrix} = k\overrightarrow{AB} = \mu \begin{pmatrix}1\\-3\\-1\end{pmatrix}$;

$\Rightarrow \mu = 3$;

$\Rightarrow 2k = \mu \cdot 1 = 3; \Rightarrow k = \frac{3}{2}$;

c) Für welche Werte von k sind AB und g_k windschief?

windschief $\Leftrightarrow$ nicht parallel und nicht scheidend 09.03.2006

Gleichsetzen bringt Widerspruch $\Leftrightarrow$ schneiden sich niemals in einem Punkt

Also: $k \neq \frac{3}{2}$;

13.03.2006

1.59 60. Hausaufgabe

1.59.1 Geometrie-Buch Seite 167, Aufgabe 19

$g\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix};$

$h_a\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2a \\ -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu a \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix};$

a) Beschreibe die Schar h_a.

Geradenbüschel durch $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. (Ebene, in der eine Gerade fehlt.)

b) Für welche Werte von a sind g und h_a parallel (identisch)?

$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 \\ 2a \\ -a \end{pmatrix};$

$\Rightarrow r = 2;$

$\Rightarrow a = \frac{1}{2};$

c) Für welche Werte von a schneiden sich g und h_a?

Gleichsetzen bringt Widerspruch $\Leftrightarrow$ g und h_a schneiden sich niemals in einem Punkt.

d) Für welche Werte von a sind g und h_a windschief?

Für $a \neq \frac{1}{2}$.

14.03.2006

1.59.2 Geometrie-Buch Seite 168, Aufgabe 23

j_a: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5-5a \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1-a \\ a-1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

a) Welche Schargerade geht durch $P(-45, 0, 5)$?

Gleichsetzen von $\vec{P}$ mit $\vec{X}$ bringt $\mu = 5$ und $a = 10$.

b) Welche Schargeraden sind parallel zu $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$?

$a = 2$ und XXX

c) Gestimme den geometrischen Ort der Punkte, die zum Parameterwert $\mu = 2$ gehören.

g: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5-5a \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1-a \\ a-1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$;

d) Bestimme den geometrischen Ort der Spurpunkte in der x_1-x_3-Ebene.

$\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5-5a \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1-a \\ a-1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

Auflösen bringt für μ: $\mu = \frac{5a-5}{a-1} = 5$ für $a \neq 1$;

Mit $x_3 = \mu$ und $x_1 = x_3 - ax_3$ ergibt sich für den geometrischen Ort der Spurpunkte:

h: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 5-5a \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\quad a \in \mathbb{R} \cup \{1\}$;

Zusätzlich ergibt sich für $a = 1$ noch: $\vec{X} = \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; Auf dieser Geraden liegen auch noch Spurpunkte.

e) Zeige, dass je zwei Schargeraden windschief sind.

$a_1 \neq a_2$;

Ausschlus der Parallelität: $\begin{pmatrix} 1-a_1 \\ a_1-1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq r \begin{pmatrix} 1-a_2 \\ a_2-1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\rightarrow$ Widerspruch ($a_1 = a_2$)

Ausschlus eines gemeinsamen Schnittpunkts: Gleichsetzen bringt $\mu_1 = \mu_2$ und damit $a_1 = a_2$; Widerspruch.

14.03.2006

1.60 61. Hausaufgabe

1.60.1 Geometrie-Buch Seite 175, Aufgabe 5

Gib eine Parametergleichung der Ebene an, die festgelegt ist durch

a) $U(1,0,-1)$, $V(0,0,0)$, $W(-2,-4,1)$.

$E\colon \vec{X} = \vec{U} + \alpha\overrightarrow{UV} + \beta\overrightarrow{UW};$

b) $P(1,2,-1)$, $g\colon \vec{X} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$.

$E\colon \vec{X} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} + \beta\left[\vec{P} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right];$

c) $g\colon \vec{X} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$, $h\colon \vec{X} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$.

$E\colon \vec{X} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix};$

d) $g\colon \vec{X} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$, $h\colon \vec{X} = \begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-2\\2\\-1\end{pmatrix}$. ($g$ echt parallel zu h.)

$E\colon \vec{X} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} + \beta\left[\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right];$

15.03.2006

1.61 62. Hausaufgabe

1.61.1 Geometrie-Buch Seite 176, Aufgabe 11

Führe die Parametergleichungen über in Koordinatengleichungen:

a) $\vec{X} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}0\\6\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix};$

Auflösen bringt: $\frac{3}{2}x_1 + x_2 - 6x_3 - 1 = 0;$

b) $\vec{X} = \begin{pmatrix}-1\\4\\2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix};$

Auflösen bringt: $\frac{6}{5}x_1 - \frac{9}{5}x_2 - x_3 + \frac{52}{5} = 0;$

18.03.2006

1.62 63. Hausaufgabe

1.62.1 Geometrie-Buch Seite 22, Aufgabe 1a

Löse das Gleichungssystem:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 10x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 2; \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 3; \\ 4x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & = & 5; \end{array}\right\} \Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3) = (1, -2, 3);$$

1.62.2 Geometrie-Buch Seite 176, Aufgabe 13

Bestimme den Parameter so, dass $P(1, 2, -5)$ in der Ebene liegt.

a) $E\colon x_1 - 2x_2 + x_3 - a = 0;$

$\Leftrightarrow a = P_1 - 2P_2 + P_3 = 1 - 4 - 5 = -8;$

b) $F\colon ax_1 + x_2 = 0;$

$\Leftrightarrow a = -\frac{P_2}{P_1} = -2;$

c) $G\colon 2x_1 - 3x_2 + ax_3 = 2a;$

$\Leftrightarrow a = \frac{-2P_1+3P_2}{P_3-2} = -\frac{4}{7};$

1.62.3 Geometrie-Buch Seite 176, Aufgabe 14

Gib Koordinatengleichungen der Koordinatenebenen an.

$x_1 = 0$; (x_2-x_3-Ebene)

$x_2 = 0$; (x_1-x_3-Ebene)

$x_3 = 0$; (x_1-x_2-Ebene)

1.62.4 Geometrie-Buch Seite 178, Aufgabe 24

$g_a\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} a-1 \\ 2a+2 \\ -a \end{pmatrix}; \quad \mu, a \in \mathbb{R};$

a) Zeige, dass alle Geraden der Schar in einer Ebene F liegen.

b) Gib eine Parameter- und Koordinatengleichung dieser Ebene F an.

c) Welche Ebenenpunkte kommen in der Geradenschar nicht vor?

$g_a\colon \vec{X} = \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}a-1\\2a+2\\-a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix} + \mu a \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix};\quad \mu, a \in \mathbb{R};$

μ und a können beliebig aus $\mathbb{R}$ gewählt werden; ist allerdings μ 0, so ist μa auch 0. Es ist also nicht möglich, den ersten Richtungsvektoren zu streichen und zugleich den zweiten zu behalten.

In einer Ebene darf aber keine Gerade fehlen; daher ersetzen wir μa mit ν, wobei ν, wenn a 0 ist, nicht auch notwendigerweise 0 sein muss.
$F\colon \vec{X} = \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix};\quad \mu, \nu \in \mathbb{R};$

Auflösen nach μ und ν und Einsetzen bringt als Koordinatengleichung:

$F\colon x_1 + \frac{1}{2}x_2 - 2 = 0;\quad x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R};$

Die fehlenden Punkte sind die Ebenenpunkte, für die μ zwar 0 ist, ν jedoch nicht, mit Ausnahme des Aufpunkts.

$h\colon \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix};\quad \nu \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$ 20.03.2006

1.63 64. Hausaufgabe

1.63.1 Geometrie-Buch Seite 22, Aufgabe 1e

Löse das Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrr|l} 2 & -3 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & -8 & -5 & 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|l} 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & -8 & -5 & 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|l} 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{7}{2} & -1 \\ 3 & -8 & -5 & 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|l} 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{7}{2} & -1 \\ 0 & -\frac{7}{2} & -\frac{7}{2} & -\frac{7}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|l} 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{7}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{7}{2} \end{array}$$

Widerspruch; also keine Lösungen

1.63.2 Geometrie-Buch Seite 33, Aufgabe 1

Löse die Gleichungssysteme mit dem Gauß-Verfahren:

$$\begin{array}{rrr|l} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \\ -1 & -1 & 4 & 9 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rrr|l} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 11 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|l} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & -\frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array}$$

$x_3 = 3;$

$x_2 = -\frac{11}{2} + \frac{5}{2}x_3 = 2;$

$x_1 = x_3 - x_2 = 1;$

$$\begin{array}{rrr|l} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \end{array}$$

d)

$$\begin{array}{rrr|l} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 7 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|l} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{3} & 0 \end{array}$$

$x_3 = x_2 = x_1 = 0;$

e)

$$\begin{array}{rrr|l} 2 & -3 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & -8 & -5 & 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|l} 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 7 & 7 & 0 \\ 0 & -\frac{7}{2} & -\frac{7}{2} & -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|l} 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{7}{2} & -\frac{7}{2} & -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|l} 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{2}{7} \end{array}$$

Widerspruch; also keine Lösungen

f)

$$\begin{array}{rrr|l} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 4 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|l} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|l} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}$$

$x_2 = 3x_3;$

$x_1 = 2x_3 + x_2 = 2x_3 + 3x_3 = 5x_3;$ 21.03.2006

$L = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 = 5k \wedge x_2 = 3k \wedge x_3 = k; k \in \mathbb{R}\};$

$\vec{X} = k \left(\begin{smallmatrix}5\\3\\1\end{smallmatrix}\right); \quad k \in \mathbb{R};$

22.03.2006

1.64 65. Hausaufgabe

1.64.1 Geometrie-Buch Seite 40, Aufgabe 7

Berechne und vereinfache.

a) $\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 1+a & 0\\1 & 1 & 1+b\end{vmatrix} = (1+b)\begin{vmatrix}1 & 1\\1 & 1+a\end{vmatrix} = (1+b)(1+a-1) = a+ab;$

b) $\begin{vmatrix}1 & a & -b\\-a & 1 & c\\b & -c & 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & c\\-c & 1\end{vmatrix} + a\begin{vmatrix}a & -b\\-c & 1\end{vmatrix} + b\begin{vmatrix}a & -b\\1 & c\end{vmatrix} =$
$1 + c^2 + a^2 - abc + abc + b^2 = 1 + a^2 + b^2 + c^2;$

c) $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\a & b & c\\a^2 & b^2 & c^2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}b & c\\b^2 & c^2\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}a & c\\a^2 & c^2\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}a & b\\a^2 & b^2\end{vmatrix} =$
$bc^2 - b^2c - ac^2 + a^2c + ab^2 - a^2b = a^2(c-b) + b^2(a-c) + c^2(b-a);$

d) $\begin{vmatrix}a & b & a+b\\b & a+b & a\\a+b & a & b\end{vmatrix} = a\begin{vmatrix}a+b & a\\a & b\end{vmatrix} - b\begin{vmatrix}b & a+b\\a & b\end{vmatrix} + (a+b)\begin{vmatrix}b & a+b\\a+b & a\end{vmatrix} =$
$a(ab + b^2 - a^2) - b(b^2 - a^2 - ab) + (a+b)(ab - a^2 - 2ab - b^2) = -2a^3 - 2b^3;$

e) $\begin{vmatrix}\sin\alpha & \cos\alpha\tan\beta & \cos\alpha\\-\cos\alpha & \sin\alpha\tan\beta & \sin\alpha\\0 & -1 & \tan\beta\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\sin\alpha & \cos\alpha\\-\cos\alpha & \sin\alpha\end{vmatrix} + \tan\beta\begin{vmatrix}\sin\alpha & \cos\alpha\tan\beta\\-\cos\alpha & \sin\alpha\tan\beta\end{vmatrix} =$
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \tan^2\beta\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right) = 1 + \tan^2\beta;$

1.64.2 Geometrie-Buch Seite 40, Aufgabe 9

Löse die Gleichungssysteme mit der Cramer-Regel.

a)
$$\begin{array}{ccccccc} 2x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & = & 1; \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & = & 1; \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 1; \end{array}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -19 + 8 + 12 = 1 \neq 0;$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{D} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 7 + 3 - 19 = -9;$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{D} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 - 1 + 8 = 4;$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{D} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2 - 1 + 6 = 3;$$

$(x_1, x_2, x_3) = (-9, 4, 3);$

b)
$$\begin{array}{ccccccc} 3x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & = & 1; \\ 2x_1 & + & -x_2 & + & -x_3 & = & -2; \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & -1; \end{array}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -2 - 3 + 4 = -1 \neq 0;$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{D} = -\left(2\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}\right) =$$
$$-(2 - 5 + 8) = -5;$$

$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{D} = -\left(\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}\right) = -\left(5 - 9 - 16\right) = 20;$

$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{D} = -\left(\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\right) = -\left(7 + 8 + 13\right) = -28;$

$(x_1, x_2, x_3) = (-5, 20, -28);$

24.03.2006

1.65 66. Hausaufgabe

1.65.1 Geometrie-Buch Seite 190, Aufgabe 2

Gegeben sind die Ebenen und Geraden:

$E\colon x_1 - 2x_2 + x_3 - 1 = 0;\quad F\colon 2x_1 - x_2 - x_3 - 8 = 0;$

Bestimme von jeder Gerade ihre Lage zu E und F.

Berechne gegebenenfalls den Schnittpunkt.

Umrechnung der Koordinatengleichungen von E und F in Parametergleichungen:

$E\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};\quad F\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix};$

a) $a\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix};$

- $D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 3;$

  $D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -3;$

  $\alpha = \frac{D_3}{D} = -1; \Leftrightarrow a \cap E = \{S\}$ mit $\vec{S} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix};$

- $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 9;$

  $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 12 \\ 0 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -18;$

  $\alpha = \frac{D_3}{D} = -2; \Leftrightarrow a \cap F = \{S\}$ mit $\vec{S} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix};$

b) $b\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix};$

- $D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3;$

  $D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3;$

  $\beta = \frac{D_3}{D} = 1; \Leftrightarrow b \cap E = \{S\}$ mit $\vec{S} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$

- $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0;$

  Verbindungsvektor der Aufpunkte: $\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix};$

  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0; \Leftrightarrow b \cap F = \varnothing;$

c) $c\colon \vec{X} = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$

- $D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0;$

  Verbindungsvektor der Aufpunkte: $\vec{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$

  $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0; \Leftrightarrow c \cap E = \varnothing;$

- $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0;$

  Verbindungsvektor der Aufpunkte: $\vec{d} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{smallmatrix}\right);$

  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & 8 \end{vmatrix} = -16 \neq 0; \Leftrightarrow c \cap F = \varnothing;$

d) $d\colon \vec{X} = \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + \delta \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right);$

- $D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0;$

  Verbindungsvektor der Aufpunkte: $\vec{d} = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right);$

  $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0; \Leftrightarrow d \cap E = d;$

- $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0;$

  Verbindungsvektor der Aufpunkte: $\vec{d} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 10 \\ 1 \end{smallmatrix}\right);$

  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 10 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -9 \neq 0; \Leftrightarrow d \cap F = \varnothing;$

e) $e\colon \vec{X} = \left(\begin{smallmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + \varepsilon \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right);$

- $D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0;$

  Verbindungsvektor der Aufpunkte: $\vec{d} = \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right);$

  $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0; \Leftrightarrow e \cap E = e;$

- $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0;$

  Verbindungsvektor der Aufpunkte: $\vec{d} = \left(\begin{smallmatrix} 5 \\ 10 \\ 0 \end{smallmatrix}\right);$

  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 10 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0; \Leftrightarrow e \cap F = e = E \cap F;$

f) $f\colon \vec{X} = \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + \varphi \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right);$

- $D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -3;$

  $D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3;$

  $\varphi = \frac{D_3}{D} - 1; \Leftrightarrow f \cap E = \{S\}$ mit $\vec{S} = \left(\begin{smallmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right);$

- $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0;$

  Verbindungsvektor der Aufpunkte: $\vec{d} = \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 8 \\ 0 \end{smallmatrix}\right);$

  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0; \Leftrightarrow f \cap F = f;$

28.03.2006

1.65.2 Geometrie-Buch Seite 190, Aufgabe 5

Die Würfelecken A, C, F und H sind die Ecken eines regelmäßigen Tetraeders. (Siehe Aufgabe 17 auf Seite 177.)

a) In welchem Punkt schneidet die Raumdiagonale HB die Ebene ACF?

$A(-4,-4,0)$; $B(0,-4,0)$; $C(0,0,0)$; $F(0,-4,4)$; $E(-4,-4,4)$; $H(-4,0,4)$; $G($

$HB\colon \vec{X} = \vec{H} + \alpha\overrightarrow{HB};$

$ACF\colon \vec{X} = \vec{C} + \lambda\overrightarrow{CA} + \mu\overrightarrow{CF};$

$\lambda\overrightarrow{CA} + \mu\overrightarrow{CF} - \alpha\overrightarrow{HB} = \vec{H} - \vec{C};$

$D = \begin{vmatrix} -4 & 0 & -4 \\ -4 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 192 \neq 0;$

$D_3 = \begin{vmatrix} -4 & 0 & -4 \\ -4 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 128; \Leftrightarrow \alpha = \frac{D_3}{D} = \frac{2}{3};$

$\Leftrightarrow HB \cap ACF = \{S\}$ mit $\vec{S} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ -\frac{8}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix};$

b) In welchen Punkten schneidet die Gerade durch die Kantenmitten von $[GC]$ und $[AE]$ das Tetraeder?

[XXX]

28.03.2006

1.66 67. Hausaufgabe

1.66.1 Geometrie-Buch Seite 191, Aufgabe 6

$A(2,-1,0);\quad g\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix};\quad h\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix};$

Stelle eine Gleichung der Gerade k auf, die durch A geht und g und h schneidet. Berechne die Schnittpunkte.

$k\colon \vec{X} = \vec{A} + \beta\vec{w};$

- Gleichsetzen von $\vec{X}_k$ mit $\vec{X}_g$ und $\vec{X}_h$ bringt:

$$\begin{array}{lrcl} \text{I.} & A_1 + \beta_g w_1 & = & G_1 + \lambda g_1; \\ \text{II.} & A_2 + \beta_g w_2 & = & G_2 + \lambda g_2; \\ \text{III.} & A_3 + \beta_g w_3 & = & G_3 + \lambda g_3; \\ \text{IV.} & A_1 + \beta_h w_1 & = & H_1 + \mu h_1; \\ \text{V.} & A_2 + \beta_h w_2 & = & H_2 + \mu h_2; \\ \text{VI.} & A_3 + \beta_h w_3 & = & H_3 + \mu h_3; \end{array}$$

- Elimination von λ (I.):

$$\lambda = \frac{A_1 - G_1 + \beta_g w_1}{g_1};$$

- Elimination von β_g (II.):

$A_2 + \beta_g w_2 = G_2 + \lambda g_2 = G_2 + \frac{g_2}{g_1}\left(A_1 - G_1 + \beta_g w_1\right);$

$$\Leftrightarrow \beta_g = \frac{\overbrace{G_2 - A_2 + \dfrac{g_2}{g_1}A_1 - \dfrac{g_2}{g_1}G_1}^{o}}{w_2 - \frac{g_2}{g_1}w_1};$$

- Elimination von w_3 (III.):

$$w_3 = \frac{\left(w_2 - \frac{g_2}{g_1}w_1\right)\left(G_3 - A_3 + \lambda g_3\right)}{\underbrace{G_2 - A_2 + \dfrac{g_2}{g_1}A_1 - \dfrac{g_2}{g_1}G_1}_{k}};$$

- Elimination von μ (IV.):

$$\mu = \frac{A_1 - H_1 + \beta_h w_1}{h_1};$$

- Elimination von w_2 (V.):

$$w_2 = \frac{H_2 - A_2 + \mu h_2}{\beta_h} = \frac{\overbrace{H_2 - A_2 + \dfrac{h_2}{h_1}A_1 - \dfrac{h_2}{h_1}H1}^{l} + \frac{h_2}{h_1}\beta_h w_1}{\beta_h};$$

- Elimination von β_h (VI.):

$$A_3 + \beta_h w_3 = \underbrace{H_3 + \frac{h_3}{h_1}A_1 - \frac{h_3}{h_1}H_1}_{m} + \tfrac{h_3}{h_1}\beta_h w_1;$$

$$A_3 + \frac{\beta_h\left(w_2 - \frac{g_2}{g_1}w_1\right)\left(\overbrace{G_3 + \dfrac{g_3}{g_1}A_1 - \dfrac{g_3}{g_1}G_1 - A_3}^{n} + \frac{g_3}{g_1}\beta_g w_1\right)}{k} = m + \tfrac{h_3}{h_1}\beta_h w_1;$$

[. . .]

$p := \frac{h_2}{h_1} - \frac{g_2}{g_1};$

$A_3 l + A_3\beta_h p + \frac{l^2}{k}n + \frac{l}{k}n\beta_h p + \frac{g_2}{g_1}\frac{l}{k}w_1 o + \beta_h\frac{w_1}{k}pn + \beta_h\frac{w_1}{k}p\frac{g_2}{g_1}w_1 o = lm + \beta_h pm + \frac{h_3}{h_1}\beta_h + w_1 l + \frac{h_3}{h_1}\beta_h^2 w_1 p;$

- Auflösen nach β_h:

$$\beta_h = \frac{5w_1^2 + 36w_1 - 57 \pm \sqrt{25w_1^4 + 360w_1^3 - 274w_1^2 + 7296w_1 + 3249}}{50w_1};$$

- Speziell für $w_1 = 0$:
  $(\beta_g, \beta_h, \lambda, \mu, w_1, w_2, w_3) = \left(\frac{10}{3}, 2, 2, \frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2}, \frac{21}{10}\right);$
  $k \cap g = \left\{\begin{pmatrix}2\\4\\7\end{pmatrix}\right\}; \quad k \cap h = \left\{\begin{pmatrix}2\\2\\-\frac{3}{2}\end{pmatrix}\right\};$

1.66.2 Geometrie-Buch Seite 191, Aufgabe 7

$E\colon \vec{X} = \begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}; \quad g_a\colon \vec{X} = \sigma\begin{pmatrix}1+a\\1-a\\1\end{pmatrix};$

Welche Schargerade ist parallel zu E? Ist sie echt parallel?

$\begin{vmatrix}1 & 1 & -1-a\\1 & -1 & -1+a\\0 & 3 & -1\end{vmatrix} = 2 - 6a = 0; \Leftrightarrow a = \frac{1}{3};$

Verbindungsvektor der Aufpunkte: $\vec{d} = \begin{pmatrix}-3\\-2\\1\end{pmatrix};$

$\begin{vmatrix}1 & 1 & -3\\1 & -1 & -2\\0 & 3 & 1\end{vmatrix} = -5; \Leftrightarrow g_{\frac{1}{3}} \cap E = \emptyset;$ 29.03.2006

1.67 68. Hausaufgabe

1.67.1 Geometrie-Buch Seite 197, Aufgabe 6

Beschreibe die Lage von E und F und stelle gegebenenfalls eine Gleichung der Schnittgerade s auf.

a) $E\colon \vec{X} = \begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-2\\3\\3\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}4\\4\\-1\end{pmatrix}; \quad F\colon \vec{X} = \begin{pmatrix}0\\3\\7\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix}6\\1\\-4\end{pmatrix};$

Überprüfung der Komplanarität der vier Richtungsvektoren:

- $\begin{vmatrix}-2 & 4 & 2\\3 & 4 & 1\\3 & -1 & -1\end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix}4 & 2\\4 & 1\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}-2 & 2\\3 & 1\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}-2 & 4\\3 & 4\end{vmatrix} = -12 - 8 + 20 = 0;$
- $\begin{vmatrix}-2 & 4 & 6\\3 & 4 & 1\\3 & -1 & -4\end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix}4 & 6\\4 & 1\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}-2 & 6\\3 & 1\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}-2 & 4\\3 & 4\end{vmatrix} = -60 - 20 + 80 = 0;$

Verbindungsvektor der Aufpunkte: $\vec{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$;

Überprüfung der Komplanarität des Verbindungsvektors mit den Richtungsvektoren:

$\begin{vmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 3 & 4 & 6 \\ 3 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 28 - 9 - 100 = -25$; $\Leftrightarrow E \cap F = \varnothing$;

b) $E\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\quad F\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$;

Überprüfung der Komplanarität der vier Richtungsvektoren:

- $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 0$;
- $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$;

Verbindungsvektor der Aufpunkte: $\vec{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$;

Überprüfung der Komplanarität des Verbindungsvektors mit den Richtungsvektoren:

$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$; $\Leftrightarrow E \cap F = E = F$;

31.03.2006

1.68 69. Hausaufgabe

1.68.1 Geometrie-Buch Seite 196, Aufgabe 4

Beschreibe die Lage von E und F und stelle gegebenenfalls eine Gleichung der Schnittgerade s auf.

a) $E\colon 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 4 = 0$; $\quad F\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

Einsetzen von x_1, x_2, x_3 aus der Gleichung von F in E bringt:

$2 + 2\lambda + 4\lambda - 2 - \mu + 4 + 2\lambda - 4 = 4\lambda + 3\mu = 0$; $\Leftrightarrow \lambda = -\frac{3}{4}\mu$;

$E \cap F = s$ mit $s\colon \vec{X} = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} - \frac{3}{4}\mu \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}\frac{5}{4}\\1\\-\frac{3}{4}\end{pmatrix};$

b) $E\colon x_1 + x_2 + 3x_3 - 6 = 0; \quad F\colon \vec{X} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix};$

Einsetzen von x_1, x_2, x_3 aus der Gleichung von F in E bringt:

$1 + 3\lambda + \mu + 1 - 3\mu - 3\lambda + 3\mu - 6 = -4 + \mu = 0; \Leftrightarrow \mu = 4;$

$E \cap F = s$ mit $s\colon \vec{X} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-11\\4\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix};$

1.68.2 Geometrie-Buch Seite 197, Aufgabe 6c

Beschreibe die Lage von E und F und stelle gegebenenfalls eine Gleichung der Schnittgerade s auf.

$E\colon \vec{X} = \begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}; \quad F\colon \vec{X} = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix};$

$\lambda \begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix};$

$$D = \begin{vmatrix}-3 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix} = 0 - 2 - 2 = -4;$$

$$D_1 = \begin{vmatrix}-2\tau & 1 & 1\\ \tau - 1 & -1 & -1\\ 3\tau & 1 & -1\end{vmatrix} = -2\tau - 2; \Leftrightarrow \lambda = \frac{D_1}{D} = \frac{\tau}{2} + \frac{1}{2};$$

$$D_2 = \begin{vmatrix}-3 & -2\tau & 1\\ 1 & \tau - 1 & -1\\ 1 & 3\tau & -1\end{vmatrix} = -4\tau - 2; \Leftrightarrow \mu = \frac{D_2}{D} = \tau + \frac{1}{2};$$

$E \cap F = s$ mit $s\colon \vec{X} = \begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\tau \begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\\frac{3}{2}\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix} + \tau' \begin{pmatrix}-1\\-1\\3\end{pmatrix};$ 03.04.2006

1.69 70. Hausaufgabe

1.69.1 Geometrie-Buch Seite 196, Aufgabe 2

Bestimme eine Gleichung der Schnittgerade von E und F:

a) $E\colon x_1+x_2=0=x_1-x_3; \quad F\colon x_2+x_3=0; \Leftrightarrow x_2=-x_3;$

$\vec{X}=\left(\begin{smallmatrix}k\\-k\\k\end{smallmatrix}\right);$

b) $E\colon x_1=0; \quad F\colon 2x_2+x_3=1; \Leftrightarrow x_3=1-2x_2;$

$\vec{X}=\left(\begin{smallmatrix}0\\k\\1-2k\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right)+k\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\-2\end{smallmatrix}\right);$

c) $E\colon x_1+x_2+x_3=1=1-x_2+x_2+x_3=1+x_3; \quad F\colon x_1+x_2=1; \Leftrightarrow x_1=1-x_2;$

$\vec{X}=\left(\begin{smallmatrix}1-k\\k\\0\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)+k\left(\begin{smallmatrix}-1\\1\\0\end{smallmatrix}\right);$

d) $E\colon x_1=x_2; \quad F\colon x_2=x_3;$

$\vec{X}=k\vec{1};$

e) $E\colon x_1=x_2; \quad F\colon x_1=x_3;$

$\vec{X}=k\vec{1};$

f) $E\colon x_1=1; \quad F\colon x_2=2;$

$\vec{X}=\left(\begin{smallmatrix}1\\2\\0\end{smallmatrix}\right)+k\left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right);$

1.69.2 Geometrie-Buch Seite 196, Aufgabe 3

$E\colon x_1+x_2+x_3=0; \quad F\colon 2x_1+x_2+x_3+4=0;$

Wähle der Reihe nach x_1, x_2 und x_3 als Parameter und versuche, jeweils eine Gleichung der Schnittgerade zu bestimmen.

x_1 als Parameter ist nicht möglich, da x_1 konstant -4 ist.

$\vec{X}_{x_2}=\left(\begin{smallmatrix}-4\\k\\4-k\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}-4\\0\\4\end{smallmatrix}\right)+k\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\-1\end{smallmatrix}\right);$

$\vec{X}_{x_3}=\left(\begin{smallmatrix}-4\\4-k\\k\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}-4\\4\\0\end{smallmatrix}\right)+k\left(\begin{smallmatrix}0\\-1\\1\end{smallmatrix}\right);$ 25.04.2006

1.70 71. Hausaufgabe

1.70.1 Geometrie-Buch Seite 93, Aufgabe 1

$A(2,0,-1)$, $B(8,-3,11)$. S und T teilen $[AB]$ in drei gleiche Teile. Berechne S und T.

$\vec{S} = \vec{A} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix};$

$\vec{T} = \vec{A} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix};$

(Def.: $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} ka \\ kb \\ kc \end{pmatrix} := \frac{1}{k};$)

S teilt $[AB]$ im Verhältnis $\lambda_1 = \frac{\overrightarrow{AS}}{\overrightarrow{SB}} = \frac{1}{2};$

T teilt $[AB]$ im Verhältnis $\lambda_2 = \frac{\overrightarrow{AT}}{\overrightarrow{TB}} = 2;$

1.70.2 Geometrie-Buch Seite 94, Aufgabe 9

$P(0, \frac{3}{2}, 4); \quad Q(3, 0, 4);$

Berechne die Punkte S und T, die $[PQ]$ harmonisch im Verhältnis $|\sigma| = 2$ teilen.

$\vec{S} - \vec{P} = \overrightarrow{PS} = 2\overrightarrow{SQ} = 2\vec{Q} - 2\vec{S}; \Leftrightarrow 3\vec{S} = 2\vec{Q} + \vec{P}; \Leftrightarrow \vec{S} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \\ 4 \end{pmatrix};$

$\vec{T} - \vec{P} = \overrightarrow{PT} = -2\overrightarrow{TQ} = -2\vec{Q} + 2\vec{T}; \Leftrightarrow -\vec{T} = -2\vec{Q} + \vec{P}; \Leftrightarrow \vec{T} = 2\vec{Q} - \vec{P} = \begin{pmatrix} 6 \\ -\frac{3}{2} \\ 4 \end{pmatrix};$

1.70.3 Geometrie-Buch Seite 94, Aufgabe 10

$A(2, 10, 5)$, $B(23, -4, 33)$, $S(11, 4, 17)$

a) S und T teilen $[AB]$ harmonisch. Berechne T.

$\overrightarrow{AS} = \sigma\overrightarrow{SB}; \Leftrightarrow \sigma = \frac{\overrightarrow{AS}}{\overrightarrow{SB}};$

$\overrightarrow{AT} = -\sigma\overrightarrow{TB} = -\frac{\overrightarrow{AS}}{\overrightarrow{SB}}\overrightarrow{TB};$

$\vec{T}\left(1 - \frac{\overrightarrow{AS}}{\overrightarrow{SB}}\overrightarrow{TB}\right) = \vec{A} - \vec{B}\frac{\overrightarrow{AS}}{\overrightarrow{SB}}\overrightarrow{TB}; \Leftrightarrow \vec{T} = \begin{pmatrix} -61 \\ 52 \\ -79 \end{pmatrix};$

b) A und B teilen $[ST]$ im Verhältnis α und β. Berechne α und β.

$\alpha = \frac{\overrightarrow{SA}}{\overrightarrow{AT}} = \frac{1}{7};$

$\beta = \frac{\overrightarrow{SB}}{\overrightarrow{BS}} = -\frac{1}{7};$

26.04.2006

1.71 72. Hausaufgabe

1.71.1 Geometrie-Buch Seite 94, Aufgabe 11

$A(-4, 12, -9)$, $B(14, 3, 6)$. $C(c_1, 6, c_3)$ liegt auf der Gerade AB.

Bestimmte das Teilverhältnis γ, in dem C die Strecke $[AB]$ teilt.

Berechne den vierten harmonischen Punkt D von A, B und C.

$\overrightarrow{AC} = \gamma\overrightarrow{CB}; \Leftrightarrow \gamma = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = 2;$

$\vec{D} - \vec{A} = \overrightarrow{AD} = -2\overrightarrow{DB} = -2\vec{B} + 2\vec{D}; \Leftrightarrow \vec{D} = 2\vec{B} - \vec{A} = \left(\begin{smallmatrix} 32 \\ -6 \\ 21 \end{smallmatrix}\right);$

1.71.2 Geometrie-Buch Seite 94, Aufgabe 12

Zeige: $A(1, 2, 1)$, $B(6, 2, -4)$, $C(4, 2, -2)$ und $D(16, 2, -14)$ sind harmonische Punkte.

$\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}; \Leftrightarrow \lambda = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = \frac{3}{2};$

$\vec{D} - \vec{A} = \overrightarrow{AD} = -\lambda\overrightarrow{DB} = -\lambda\vec{B} + \lambda\vec{D}; \Leftrightarrow \vec{D} = \frac{-\lambda\vec{B}+\vec{A}}{1-\lambda} = \left(\begin{smallmatrix} 16 \\ 2 \\ -14 \end{smallmatrix}\right);$ $\rightarrow$ stimmt 01.05.2006

1.72 73. Hausaufgabe

1.72.1 Geometrie-Buch Seite 98, Aufgabe 2

a) Ein Kreis um $(-2, 5)$ geht durch $A(-5, 2)$.

Berechne den Endpunkt E des Kreisdurchmessers $[AE]$.

$\vec{M} = \frac{\vec{A}+\vec{E}}{2}; \Leftrightarrow \vec{E} = 2\vec{M} - \vec{A} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 8 \end{smallmatrix}\right);$

b) Eine Kugel um $(1, 2, 3)$ geht durch den Ursprung.

Berechne den Endpunkt E des Kugeldurchmessers $[0E]$.

$\vec{M} = \frac{\vec{A}+\vec{E}}{2}; \Leftrightarrow \vec{E} = 2\vec{M} - \vec{A} = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{smallmatrix}\right);$

1.72.2 Geometrie-Buch Seite 98, Aufgabe 3

Berechne den Schwerpunkt des Dreiecks

a) $A(2,1,3)$, $B(3,5,0)$, $C(4,-4,9)$.

$$\vec{S} = \frac{1}{3}\left(\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}\right) = \begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\ \frac{3}{4}\end{pmatrix};$$

b) $R(2,1)$, $S(3,-2)$, $T(-2,4)$.

$$\vec{P} = \frac{1}{3}\left(\vec{R}+\vec{S}+\vec{T}\right) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix};$$

1.72.3 Geometrie-Buch Seite 98, Aufgabe 5

a) Im Dreieck ABC mit Schwerpunkt S ist $A(1,1,2)$, $B(3,2,4)$ und $S(0,1,3)$. Berechne C.

$$\vec{S} = \frac{1}{3}\left(\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}\right); \Leftrightarrow \vec{C} = 3\vec{S}-\vec{A}-\vec{B} = \begin{pmatrix}-4\\0\\3\end{pmatrix};$$

b) Im Tetraeder $ABCD$ mit Schwerpunkt S ist $A(2,1,1)$, $B(3,0,1)$, $C(2,-1,0)$ und $S(2,2,1)$. Berechne D.

$$\vec{S} = \frac{1}{4}\left(\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}+\vec{D}\right); \Leftrightarrow \vec{D} = 4\vec{S}-\vec{A}-\vec{B}-\vec{C} = \begin{pmatrix}1\\8\\2\end{pmatrix};$$

02.05.2006

1.73 74. Hausaufgabe

1.73.1 Geometrie-Buch Seite 129, Aufgabe 3

Warum ist die Menge aller Polynome von genau zweitem Grad (Koeffizient $a_2 \neq 0$) kein Vektorraum mit den Verknüpfungen vom [Vektorraum aller Polynome dritten Grades]?

Weil es keinen Nullvektor gibt ($0x^2 + 0x + 0$ wegen der Bedingung $a_2 \neq 0$ ausgeschlossen).

1.73.2 Geometrie-Buch Seite 129, Aufgabe 6

Sind folgende Mengen von Tripeln Vektorräume mit den Verknüpfungen vom [dreidimensionalen arithmetischen Vektorraum]?

a) $M = \{(a,b,c) | a = 2b \wedge a,b,c \in \mathbb{R}\};$

Ja.

b) $M = \{(a,b,c) | a \leq b \leq c \wedge a,b,c \in \mathbb{R}\}$;

Nein: $(1,2,3)$ hat kein Inverses ($(-1,-2,-3) \notin M$).

c) $M = \{(a,b,c) | ab = 0 \wedge a,b,c \in \mathbb{R}\}$;

Nein: $(a,0,c) + (0,\beta,\gamma) = (a,\beta,c+\gamma) \notin M$; ($a\beta$ nicht allgemein 0)

d) $M = \{(a,b,c) | a = b = c \wedge a,b,c \in \mathbb{R}\}$;

Ja, M ist isomorph zu $\mathbb{R}^1$.

e) $M = \{(a,b,c) | a = b^2 \wedge a,b,c \in \mathbb{R}\}$;

Nein.

$-(b^2,b,c) = (-b^2,-b,-c) \notin M$; ($(-b)^2 = b^2 \neq -b^2$)

f) $M = \{(a,b,c) | k_1 a + k_2 b + k_3 c = 0 \wedge a,b,c \in \mathbb{R}\}$; k_i seien feste reelle Zahlen.

Ja, da $k_i = 0$ möglich, ist $M = \mathbb{R}^3$ und bildet damit mit den üblichen Verknüpfungen einen Vektorraum.

1.73.3 Geometrie-Buch Seite 130, Aufgabe 7

M sei die Menge alle Paare reeller Zahlen.

Zeige: M ist kein Vektorraum über $\mathbb{R}$, wenn die Verknüpfungen $(+)$ und $(\cdot)$ so definiert werden:

a) $(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$; $\quad \mu \cdot (a,b) = (\mu a, b)$;

Nein: $(0,0) = 0 \cdot (a,b) \neq (-1+1) \cdot (a,b) = (-1) \cdot (a,b) + (a,b) = (-a,b) + (a,b) = (0,2b)$; (Verletzung des Distributivgesetzes für Skalare)

b) $(a,b) + (c,d) = (a,b)$; $\quad \mu \cdot (a,b) = (\mu a, \mu b)$;

Nein: $a + b = a \neq b = b + a$ (Verletzung des Kommutativgesetzes)

c) $(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$; $\quad \mu \cdot (a,b) = (\mu^2 a, \mu^2 b)$;

Nein: $(-1) \cdot (a,b) = (a,b) = 1 \cdot (a,b)$; (Mehrere neutrale Elemente)

03.05.2006

1.74 75. Hausaufgabe

1.74.1 Geometrie-Buch Seite 113, Aufgabe 13a

$\vec{a}$ und $\vec{b}$ seien linear unabhängig.

Untersuche $\vec{u}$ und $\vec{v}$ auf lineare Abhängigkeit:

$\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}; \quad \vec{v} = \vec{a} - \vec{b};$

$\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b} + \mu\vec{a} - \mu\vec{b} = \vec{a}\,(\lambda + \mu) + \vec{b}\,(\lambda - \mu) = 0;$

$\lambda + \mu = \lambda - \mu = 0; \Leftrightarrow (\lambda, \mu) = (0, 0);$

Also: $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind linear unabhängig.

1.74.2 Geometrie-Buch Seite 113, Aufgabe 14

$\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ seien linear unabhängig.

Untersuche $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ auf linear Abhängigkeit:

a) $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}; \quad \vec{v} = \vec{b} + \vec{c}; \quad \vec{w} = \vec{a} + \vec{c};$

$\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} + \nu\vec{w} = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b} + \mu\vec{b} + \mu\vec{c} + \nu\vec{a} + \nu\vec{c} = \vec{a}\,(\lambda + \nu) + \vec{b}\,(\lambda + \mu) + \vec{c}\,(\mu + \nu) = 0;$

$\lambda + \nu = \lambda + \mu = \mu + \nu = 0; \Leftrightarrow (\lambda, \mu, \nu) = (0, 0, 0);$

Also: $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind linear unabhängig.

b) $\vec{u} = \vec{c} - \vec{a}; \quad \vec{v} = \vec{b} - \vec{c}; \quad \vec{w} = \vec{b} - \vec{a};$

$\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} + \nu\vec{w} = \lambda\vec{c} - \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} - \mu\vec{c} + \nu\vec{b} - \nu\vec{a} = \vec{a}\,(-\lambda - \nu) + \vec{b}\,(\mu + \nu) + \vec{c}\,(\lambda - \mu) = 0;$

$-\lambda - \nu = \mu + \nu = \lambda - \mu = 0; \Leftrightarrow (\lambda, \mu, \nu) = (-k, -k, k);$

Also: $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind linear abhängig (es gibt nicht nur die triviale Nullsumme).

c) $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}; \quad \vec{v} = \vec{a} + \vec{b}; \quad \vec{w} = \vec{a} - \vec{c};$

$L\vec{u} + \mu\vec{v} + \nu\vec{w} = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b} + \lambda\vec{c} + \mu\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{a} - \nu\vec{c} = \vec{a}\,(\lambda + \mu + \nu) + \vec{b}\,(\lambda + \mu) + \vec{c}\,(\lambda - \nu) = 0;$

$\lambda + \mu + \nu = \lambda + \mu = \lambda - \nu; \Leftrightarrow (\lambda, \mu, \nu) = (0, 0, 0);$

Also: $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind linear unabhängig.

05.05.2006

1.75 76. Hausaufgabe

1.75.1 Geometrie-Buch Seite 117, Aufgabe 1

Im Dreieck ABC ist $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{BE} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$.
In welchen Verhältnissen teilen sich $[AE]$ und $[BD]$?
$\overrightarrow{AS} = \alpha\overrightarrow{SE}$; $\quad \overrightarrow{BS} = \beta\overrightarrow{SD}$;
$\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{BA} = \underbrace{\lambda\overrightarrow{AE}}_{\overrightarrow{AS}}+\underbrace{\mu\overrightarrow{DB}}_{\overrightarrow{SB}}+\underbrace{\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}}_{\overrightarrow{BA}} = \underbrace{\lambda\left(\overrightarrow{AC}+\frac{2}{5}\overrightarrow{CB}\right)}_{\overrightarrow{AS}}+\underbrace{\mu\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right)}_{\overrightarrow{SB}}+\overrightarrow{BC}+$
$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC}\left(\lambda+\frac{1}{3}\mu-1\right)+\overrightarrow{BC}\left(-\frac{2}{5}-\mu+1\right) = \vec{0}$;
$\lambda+\frac{1}{3}\mu-1 = -\frac{2}{5}-\mu+1 = 0; \Leftrightarrow (\lambda,\mu) = (\frac{4}{5},\frac{3}{5})$;
$\overrightarrow{AS} = \alpha\overrightarrow{SE} = \lambda\overrightarrow{AE} = \lambda\left(\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{SE}\right); \Leftrightarrow \alpha = \lambda\frac{\overrightarrow{AS}}{\overrightarrow{SE}}+\lambda = \lambda\alpha+\lambda; \Leftrightarrow$
$\alpha = \frac{\lambda}{1-\lambda} = 4$;
$\overrightarrow{BS} = \beta\overrightarrow{SD} = -\mu\overrightarrow{DB} = -\mu\left(\overrightarrow{DS}+\overrightarrow{SB}\right) = \mu\overrightarrow{SD}+\mu\overrightarrow{BS}; \Leftrightarrow \beta = \mu\frac{\overrightarrow{SD}}{\overrightarrow{SD}}+$
$\mu\frac{\overrightarrow{BS}}{\overrightarrow{SD}} = \mu+\mu\beta; \Leftrightarrow \beta = \frac{\mu}{1-\mu} = \frac{3}{2}$;
[XXX falsch.] 09.05.2006

1.76 77. Hausaufgabe

1.76.1 Geometrie-Buch Seite 117, Aufgabe 2

Im Dreieck ABC ist $\overrightarrow{BD} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BD}$ und $\overrightarrow{AS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$. BS schneidet AC in T.
In welchem Verhältnis teilt T die Strecke $\overrightarrow{AC}$ beziehungsweise S die Strecke $\overrightarrow{BT}$?
$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ linear unabhängig.
$\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{ST}+\overrightarrow{TA} =$
$= \underbrace{\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}\right)}_{\overrightarrow{AD}}+\underbrace{\lambda\overrightarrow{BT}}_{\overrightarrow{ST}}+\underbrace{\mu\overrightarrow{CA}}_{\overrightarrow{TA}} =$
$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{8}\underbrace{\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)}_{\overrightarrow{BC}}+\lambda\underbrace{\left(\overrightarrow{BA}-\mu\overrightarrow{CA}\right)}_{\overrightarrow{BT}}+\mu\overrightarrow{CA} =$

$= \overrightarrow{AB}\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{8} - \lambda\right) + \overrightarrow{AC}\left(\frac{3}{8} + \lambda\mu - \mu\right) =$
$= \vec{0};$

$\lambda = \frac{1}{2} - \frac{3}{8} = \frac{1}{8};$

$\mu = \frac{\frac{3}{8}}{1-\lambda} = \frac{3}{7};$

$\overrightarrow{BS} = \beta\overrightarrow{ST}; \Leftrightarrow \beta = \frac{\overrightarrow{BS}}{\overrightarrow{ST}} = \frac{\overrightarrow{BT}+\overrightarrow{TS}}{\lambda\overrightarrow{BT}} = \frac{\overrightarrow{BT}-\lambda\overrightarrow{BT}}{\lambda\overrightarrow{BT}} = \frac{1-\lambda}{\lambda} = 7;$

$\overrightarrow{AT} = \alpha\overrightarrow{TC}; \Leftrightarrow \alpha = \frac{\overrightarrow{AT}}{\overrightarrow{TC}} = \frac{\overrightarrow{AT}}{\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{AC}} = \frac{\mu\overrightarrow{AC}}{-\mu\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}} = \frac{\mu}{1-\mu} = \frac{3}{4};$ 12.05.2006

1.77 78. Hausaufgabe

1.77.1 Analysis-Buch Seite 111, Aufgabe 3

Vereinfache:

a) $\left(16^{\frac{3}{4}}\right)^{-2} = \frac{1}{16^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{4 \cdot 16} = \frac{1}{64};$

b) $\left(3^{-\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{3}{8}} = 3^{\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{3}{8}\right)} = \sqrt[4]{3};$

c) $(2^8 \cdot 3^{-6})^{\frac{1}{4}} = 2^2 \cdot 3^{-\frac{3}{2}} = \frac{4}{3\sqrt{3}};$

d) $\left[\left(7^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{3}{4}}\right]^{-\frac{4}{5}} = 7^{\frac{3}{10}};$

1.77.2 Analysis-Buch Seite 111, Aufgabe 4

Es gelte $0 < u < v$; welche Ungleichung besteht dann zwischen folgenden Potenzen:

a) $u^2 < v^2;$

b) $u^{-2} > v^{-2};$

c) $u^{0,1} < v^{0,1};$

d) $u^0 = v^0 = 1;$

1.77.3 Analysis-Buch Seite 111, Aufgabe 6

Löse nach x auf:

a) $x^2 = 256 = 16^2; \Leftrightarrow (x_1, x_2) = (16, -16);$

b) $2^x = 256 = 2^8; \Leftrightarrow x = 8;$

c) $2^x = 255 = 2^8 - 1; \Leftrightarrow x = \mathrm{ld}(2^8 - 1)\,;$

d) $256 = \mathrm{ld}\, x; \Leftrightarrow x = 2^{256};$

e) $\log_x 256 = 2; \Leftrightarrow x^2 = 256 = 16^2$ mit $x > 0; \Leftrightarrow x = 16;$

f) $3^{3^x} = 27 = 3^{3^1}; \Leftrightarrow x = 1;$

21.05.2006

1.78 80. Hausaufgabe

1.78.1 Analysis-Buch Seite 113, Aufgabe 38

$\mathrm{f}_t(x) = (e^x - t)^2\,; \quad D_{\mathrm{f}_t} = \mathbb{R}; \quad t > 0;$

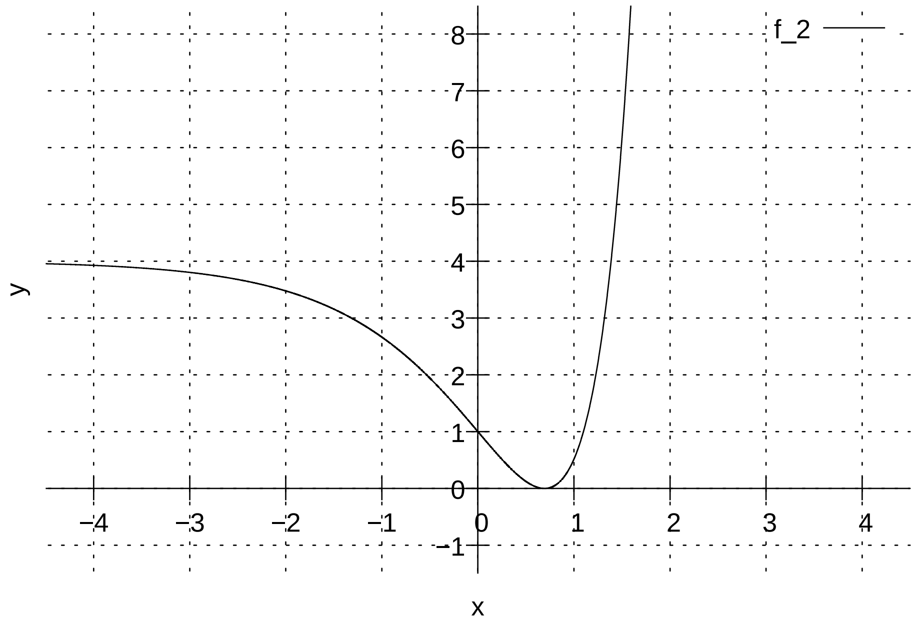
a) Berechne abhängig von t: Schnittpunkte des Graphen und der Koordinatenachsen, Asymptoten, Tief- und Wendepunkte.

- $\mathrm{f}_t(0) = (1-t)^2\,; \quad S_y(0, (1-t)^2);$
  $\mathrm{f}_t(x) = (e^x - t)^2 = 0; \Rightarrow e^x = t; \Rightarrow x = \ln t; \quad S_x(\ln t, 0);$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{f}_t(x) = \infty;$
  $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{f}_t(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} - 2e^x t + t^2 = 0 - 0 + t^2 = t^2;$
  Asymptotengleichung: $y = t^2;$
- $\mathrm{f}_t'(x) = 2\,(e^x - t) \cdot e^x;$

```
          ln t
          |
----------+----------->
---------------------> e^x
- - - - - *----------> e^x - t
     -    0    +
```

$P_{\text{TIP}}(\ln t, 0)$;
$\mathrm{f}_t''(x) = 2e^x\left(e^x - t\right) + 2e^x e^x = 2e^x\left(e^x - t + e^x\right) = 0; \Leftrightarrow$
$e^x - t + e^x = 2e^x - t = 0; \Leftrightarrow x = \ln\frac{t}{2};$
$P_{\text{WEP}}\left(\ln\frac{t}{2}, \frac{t^2}{4}\right);$

b) Zeichne G_{f_2} im Bereich $\left[-4, \frac{3}{2}\right]$.



c) Berechne die Koordinaten des Schnittpunkts S von G_{f_t} und der zugehörigen Asymptote.

Auf welcher Kurve liegen diese Schnittpunkte?

$t^2 = \mathrm{f}_t(x) = \left(e^x - t\right)^2;$

$\pm t = e^x - t;$

$\pm t + t = e^x;$

Zwei Fälle:

- $0 = e^x; \rightarrow$ keine Lösung
- $2t = e^x; \Leftrightarrow x = \ln 2t; \quad S(\ln 2t, t^2);$

$\lambda := \ln 2t; \Leftrightarrow e^\lambda = 2t; \Leftrightarrow \frac{1}{4}e^{2\lambda} = t^2;$

Kurve der Schnittpunkte: $\mathrm{k}(\lambda) = \frac{1}{4}e^{2\lambda};$

1.78.2 Analysis-Buch Seite 114, Aufgabe 54

Harte β-Strahlen werden zu $80\,\%$ in einer $1\,\mathrm{mm}$ dicken Aluminiumschicht absorbiert.

a) Bei welcher Schichtdicke werden $50\,\%$ absorbiert?

$N(d) = N_0 \cdot (20\,\%)^{d/1\,\mathrm{mm}};$

$N(d_{50\,\%}) = N_0 \cdot (20\,\%)^{d_{50\,\%}/1\,\mathrm{mm}} = 50\,\% \cdot N_0; \Leftrightarrow$

$d_{50\,\%}/1\,\mathrm{mm} = \log_{20\,\%} 50\,\%; \Leftrightarrow d_{50\,\%} = 1\,\mathrm{mm} \cdot \log_{20\,\%} 50\,\% \approx 0{,}4\,\mathrm{mm};$

b) Bei welcher Schichtdicke dringt noch $1\,\%$ hindurch?

$N(d_{1\,\%}) = N_0 \cdot (20\,\%)^{d_{1\,\%}/1\,\mathrm{mm}} = 1\,\% \cdot N_0; \Leftrightarrow$

$d_{1\,\%}/1\,\mathrm{mm} = \log_{20\,\%} 1\,\%; \Leftrightarrow d_{1\,\%} = 1\,\mathrm{mm} \cdot \log_{20\,\%} 1\,\% \approx 1{,}4\,\mathrm{mm};$

c) Welcher Anteil der Strahlung wird von einer $0{,}5\,\mathrm{mm}$ starken Alufolie verschluckt?

$1 - N(0{,}5\,\mathrm{mm})/N_0 = 1 - (20\,\%)^{0{,}5\,\mathrm{mm}/1\,\mathrm{mm}} \approx 55\,\%;$

23.05.2006

1.79 81. Hausaufgabe

1.79.1 Analysis-Buch Seite 113, Aufgabe 38

$\mathrm{f}_t(x) = (e^x - t)^2; \quad D_{\mathrm{f}_t} = \mathbb{R}; \quad t > 0;$

$\mathrm{f}_t'(x) = 2\,(e^x - t) \cdot e^x;$

d) G_{f_t}, die zugehörige Asymptote und die Gerade $x = -u$ $(u > 0)$ umschließen ein Flächenstück.

Berechne dessen Inhalt. Was ergibt sich für $u \to +\infty$?

$A_t(u) = \int\limits_{-u}^{\ln 2t} (t^2 - \mathrm{f}_t(x))\,\mathrm{d}x = \left[t^2 x - \frac{1}{2}e^{2x} + 2e^x t - t^2 x\right]_{-u}^{\ln 2t} = t^2 \cdot \ln 2t - \frac{1}{2}(2t)^2 + 2 \cdot 2t \cdot t - t^2 \cdot \ln 2t + t^2 u + \frac{1}{2}e^{-2u} + 2e^{-u}t + t^2 u;$

$\lim\limits_{u\to\infty} A_t(u) = \infty;$

e) Zeige, dass sich je zwei Graphen der Schar in genau einem Punkt P schneiden. Wann liegt P auf der y-Achse?

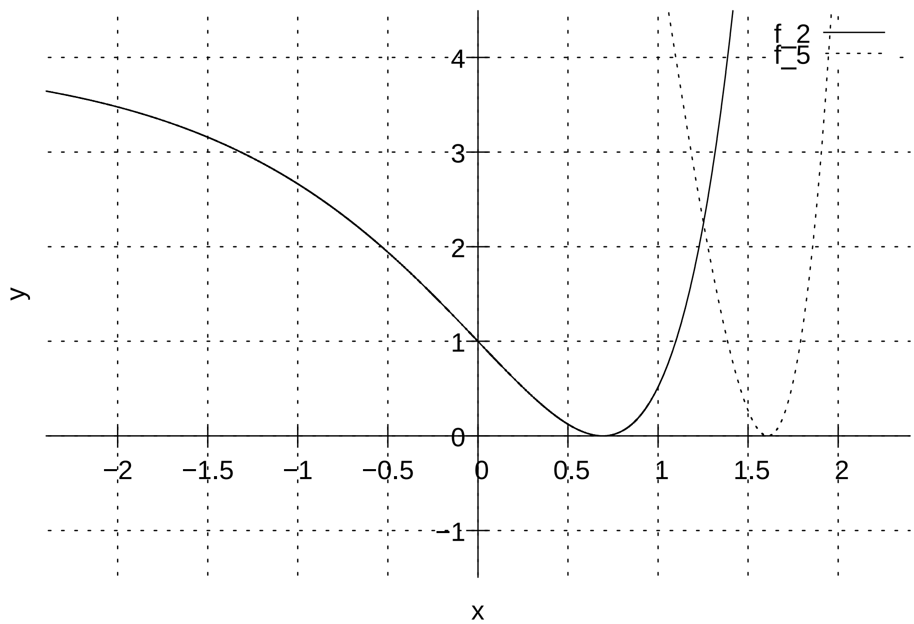
$\mathrm{f}_{t_1}(x) = \mathrm{f}_{t_2}(x);$

$e^x - t_1 = \pm\left(e^x - t_2\right) = \pm e^x \mp t_2;$

$e^x\left(1 \mp 1\right) = t_1 \mp t_2;$

$x = \ln\frac{t_1+t_2}{2};$ (definiert für alle t_1, t_2) $\rightarrow P\left(\ln\frac{t_1+t_2}{2}, \left(\frac{t_1+t_2}{2} - t_1\right)^2\right);$

$x = \ln\frac{t_1+t_2}{2} = 0; \Leftrightarrow \frac{t_1+t_2}{2} = 1; \Leftrightarrow t_1 + t_2 = 2;$



29.05.2006

1.80 82. Hausaufgabe

1.80.1 Analysis-Buch Seite 115, Aufgabe 62

Berechne:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{x} = \infty;$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{e^x}}{x} = \infty;$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{e^x}}{x} = 0;$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0;$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{e^x-1190}}{e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{-\frac{1}{2}x} = 0;$

f) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x\left(1+e^{-2x}\right)}{e^x(1-e^{-2x})} = 1;$

g) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^{-x}\left(e^{2x}+1\right)}{e^{-x}(e^{2x}-1)} = -1;$

h) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{(e^x-1)(e^{x-2}-1)} = \frac{1}{(-1)(-1)} = 1;$

29.05.2006

1.81 83. Hausaufgabe

1.81.1 Analysis-Buch Seite 115, Aufgabe 61

Berechne:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{2x} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{2x-1+1+1}{2x-1}\right)^{2x} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{2}{2x-1}\right)^{2x} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{2}{2x-1}\right)^{2x-1+1} =$
$\lim\limits_{u\to\infty} \left(1+\frac{2}{u}\right)^{u+1} = \lim\limits_{u\to\infty} \left(1+\frac{2}{u}\right)^{u} \cdot \left(1+\frac{2}{u}\right) = e^2 \cdot 1 = e^2;$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{2x+1}{3x-1}\right)^{2x} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = 0;$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{3x+1}{2x-1}\right)^{2x} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} = \infty;$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{3x+1}{3x-1}\right)^{2x} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{3x-1+1+1}{3x-1}\right)^{2x} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{2}{3x-1}\right)^{2x} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{2}{3x-1}\right)^{2x+x-x-1+1} =$
$\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{2}{3x-1}\right)^{(3x-1)\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{3}} = (e^2)^{\frac{2}{3}} = e^{\frac{4}{3}};$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{2x+2}{2x-1}\right)^{2x} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{2x-1+1+2}{2x-1}\right)^{2x} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{3}{2x-1}\right)^{2x} = \lim\limits_{x\to\infty} \left[\left(1+\frac{3/2}{x}\right)^{x}\right]^2 =$
$\left(e^{\frac{3}{2}}\right)^2 = e^3;$

f) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{2x+2}{2x-2}\right)^{2x} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{2x-2+2+2}{2x-2}\right)^{2x} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{4}{2x-1}\right)^{2x} = \lim\limits_{x\to\infty} \left[\left(1+\frac{4/2}{x}\right)^{x}\right]^2 =$
$\left(e^{\frac{4}{2}}\right)^2 = e^4;$

XXX „Plusminus 1 wird bei Unendlich schon nichts ausmachen“ nicht sehr elegant (Aufgaben e) und f))

31.05.2006

1.82 84. Hausaufgabe

1.82.1 Analysis-Buch Seite 149, Aufgabe 5

Leite ab:

a) $\mathrm{f}(x) = x + \ln x; \quad \mathrm{f}'(x) = 1 + \frac{1}{x};$

b) $\mathrm{f}(x) = x \ln x; \quad \mathrm{f}'(x) = x\frac{1}{x} + \ln x = 1 + \ln x;$

c) $\mathrm{f}(x) = \ln -x; \quad \mathrm{f}'(x) = \frac{1}{x};$

d) $\mathrm{f}(x) = -\ln 2x; \quad \mathrm{f}'(x) = -\frac{2}{2x} = -\frac{1}{x} = (-\ln x)'\,;$

e) $\mathrm{f}(x) = \ln x^2 = 2\ln x; \quad \mathrm{f}'(x) = \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2}{x};$

f) $\mathrm{f}(x) = (\ln x)^2\,; \quad \mathrm{f}'(x) = 2\ln x \cdot \frac{1}{x};$

g) $\mathrm{f}(x) = \ln\sqrt{x}; \quad \mathrm{f}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2x};$

h) $\mathrm{f}(x) = \sqrt{\ln x}; \quad \mathrm{f}'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}}\frac{1}{x};$

i) $\mathrm{f}(x) = \ln\sin x; \quad \mathrm{f}'(x) = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x;$

j) $\mathrm{f}(x) = \sin\ln x; \quad \mathrm{f}'(x) = \cos\ln x \cdot \frac{1}{x};$

k) $\mathrm{f}(x) = \ln x^e; \quad \mathrm{f}'(x) = \frac{1}{x^e} \cdot ex^{e-1};$

l) $\mathrm{f}(x) = \ln e^x = x; \quad \mathrm{f}'(x) = \frac{1}{e^x} \cdot e^x = 1;$

03.07.2006

1.83 85. Hausaufgabe

1.83.1 Stochastik-Buch Seite 153, Aufgabe 1

Eine Münze mit den Merkmalen Zahl und Wappen wird zweimal geworfen. X kennzeichne, wie oft Zahl fällt. Stellen Sie die Funktion auf dem üblichen Ergebnisraum mathematisch dar.

$\Omega = \{0,1\}^2\,;$

$X\colon (0,0) \mapsto 0, \quad (0,1),(1,0) \mapsto 1, \quad (1,1) \mapsto 2;$

1.83.2 Stochastik-Buch Seite 153, Aufgabe 4

Eine echte Münze mit den Merkmalen Z und W wird dreimal geworfen. X sei die Funktion, die jedem Ergebnis die Anzahl der erhaltenen W zuordnet. Bestimmen Sie das zu jeder Gleichung $X(\omega) = x$ gehörige Ereignis und zeigen Sie, dass die „oder"-Verknüpfung aller so entstehenden Ereignisse den Ergebnisraum Ω erzeugt.

$\Omega = \{Z, W\}^3 = \{0, 1\}^3$;

```
omega x
  000 0
  001 1
  010 1
  100 1
  110 2
  101 2
  011 2
  111 3
```

1.83.3 Stochastik-Buch Seite 154, Aufgabe 7

Bei dem Gesellschaftsspiel „chuck a luck" zahlt man einen bestimmten Geldbetrag a ein, wählt eine der sechs Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 aus und würfelt dann mit drei Würfeln.

Zeigen alle drei Würfel die gewählte Zahl, so erhält man das Vierfache seines Einsatzes, zeigen zwei Würfel die gewählte Zahl, so erhält man das Dreifache seines Einsatzes, zeigt nur ein Würfel die gewählte Zahl, so erhält man das Doppelte seines Einsatzes. In allen anderen Fällen erhält man nichts.

X sei der Reingewinn eines Mitspielers bei einem Spiel.

Stellen Sie X als Funktion dar, wenn man die Sechs wählt.

$X_6(6, 6, 6) = 4a - a = 3a$;

$X_6(6, 6, \alpha) = X_6(6, \alpha, 6) = X_6(\alpha, 6, 6) = 3a - a = 2a$ für alle $\alpha \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$;

$X_6(6, \alpha, \beta) = X_6(\alpha, 6, \beta) = X_6(\alpha, \beta, 6) = 2a - a = a$ für alle $\alpha, \beta \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$;

$X_6(\alpha, \beta, \gamma) = 0a - a = -a$ für alle $\alpha, \beta, \gamma \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$; 10.07.2006

„Der [der Lehrer] hat jetzt nicht weitergewusst, insofern fragt er uns“

„daher bin ich [Bayer] niemals vorbereitet“

„die Stunde klappt am besten, wenn keine Schüler da sind“ 10.07.2006

1.84 86. Hausaufgabe

1.84.1 Stochastik-Buch Seite 158, Aufgabe 8

Fällt beim Werfen eines echten Würfels eine Sechs, nehme die Zufallsgröße X den Wert 1, sonst 0 an.

Wie lautet die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X?

$$P_X\colon x \mapsto P_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{für } x = 1; \\ \frac{5}{6} & \text{für } x \neq 1; \end{cases}$$ 11.07.2006

1.85 87. Hausaufgabe

1.85.1 Stochastik-Buch Seite 158, Aufgabe 9

Jemand setzt beim Roulette auf zwei Querreihen von sechs Zahlen, beispielsweise auf $\{1, 2, 3, 10, 11, 12\}$, und erhält, wenn das Ereignis eintritt, den fünffachen Einsatz als Reingewinn. Sonst geht der Einsatz verloren. X kennzeichne den Reingewinn.

a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X beim Einsatz einer Geldeinheit an.

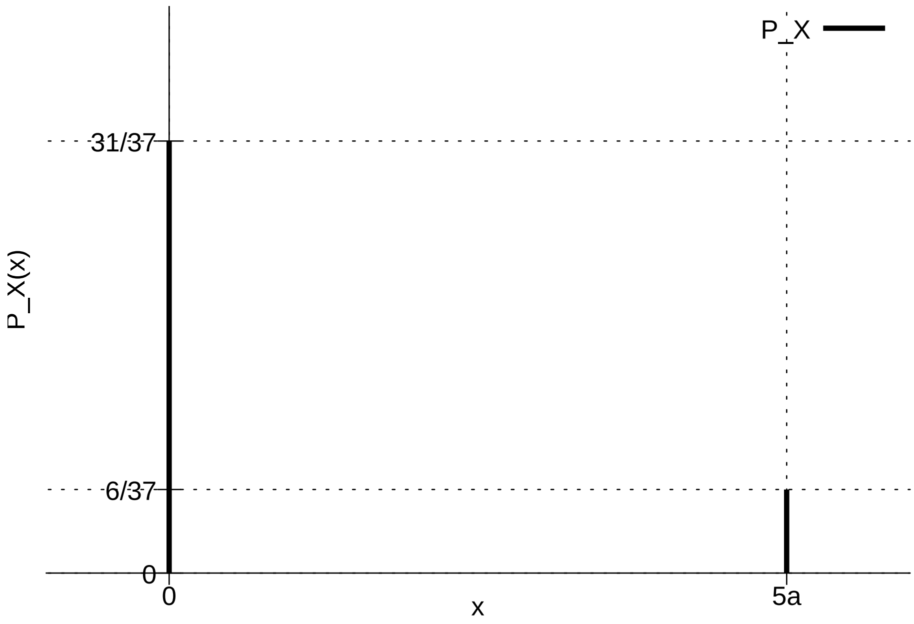
$$P_X\colon x \mapsto P_X(x) = \begin{cases} \frac{6}{37} & \text{für } x = 5a; \\ \frac{31}{37} & \text{für } x = 0; \end{cases}$$

b) Zeichnen Sie ein Histogramm.

c) Kennzeichnen Sie die Dichtefunktion und tragen Sie die Dichtekurve in das Histogramm ein.

$$d(x) = \begin{cases} \frac{31}{37} & \text{für } x < 5a - \Delta x; \\ \frac{31}{37} & \text{für } x > 5a + \Delta x; \\ \frac{6}{37} & \text{sonst}; \end{cases}$$

[XXX falsch, Division durch Δx oder so fehlt.]



23.07.2006

1.86 89. Hausaufgabe

1.86.1 Stochastik-Buch Seite 171, Aufgabe 37

Eine echte Münze wird viermal geworfen. X sei die Anzahl der Merkmale W, die bei den ersten beiden Würfen erscheinen, Y die Anzahl der Merkmale Z bei den zwei letzten Würfen.

a) Zu konstruieren sind der Ergebnisraum und die gemeinsame Wahrscheinlichkeitstabelle für X und Y.

$\Omega = \{W, Z\}^2$;

```
\x||   |   |   ||
y\|| 0 | 1 | 2 ||
--++---+---+---++---
--++---+---+---++---
 0|| 1 | 2 | 1 ||  4
--++---+---+---++---
 1|| 2 | 4 | 2 ||  8
--++---+---+---++---
 2|| 1 | 2 | 1 ||  4
--++---+---+---++---
  || 4 | 8 | 4 || 16
```

b) Überprüfen Sie X und Y auf Unabhängigkeit.

X und Y sind stochastisch unabhängig.

25.07.2006

1.87 90. Hausaufgabe

1.87.1 Stochastik-Buch Seite 171, Aufgabe 34

Drei nicht unterscheidbare Gegenstände werden zufällig auf drei Kästen verteilt. X sei die Anzahl der leeren Kästen, Y die Anzahl der Gegenstände im ersten Kasten.

Man stelle die gemeinsame Wahrscheinoichkeitstabelle auf. Sind X und Y unabhängig?

$\Omega = \{1, 2, 3\}^3$;

\x y\	0	1	2	
0	0	6	2	8
1	6	6	0	12
2	0	6	0	6
3	0	0	1	1
	6	18	3	27

Nein, X und Y sind nicht unabhängig, da bspw. $\frac{0}{27} \neq \frac{6}{27}\frac{8}{27}$. 15.09.2006

1.88 91. Hausaufgabe

1.88.1 Stochastik-Buch Seite 184, Aufgabe 1

X kennzeichne die Anzahl der Merkmale „Zahl" beim Werfen einer fairen Münze. Berechnen Sie $E(X)$.

$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$;

1.88.2 Stochastik-Buch Seite 184, Aufgabe 2

X kennzeichne die jeweils geworfene doppelte Augenzahl beim Werfen eines echten Würfels. Berechnen Sie $E(X)$.

$\tilde{X}(\omega) = X(\omega) : 2;\quad E(\tilde{X}) = 3{,}5;$

$E(X) = 2\,P_X(2) + 4\,P_X(4) + \cdots + 12\,P_X(12) = 2\,E(\tilde{X}) = 7;$

1.88.3 Stochastik-Buch Seite 185, Aufgabe 4

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße X sei symmetrisch zu $x = c$, d.h. $P(X = c + x) = P(X = c - x)$. Zeigen Sie, dass $E(X) = c$ gilt.

$E(X) = cP(X = c) + \sum\limits_{\Delta>0} \left[(c + \Delta) P(X = c + \Delta) + (c - \Delta) P(X = c + \Delta)\right] = cP(X = c) + \sum\limits_{\Delta>0} P(X = c + \Delta) \cdot 2c = c\left[P(X = c) + 2 \sum\limits_{\Delta>0} P(X = c + \Delta)\right] = c\left[P(X = c) + \sum\limits_{\Delta>0} P(X = c + \Delta) + \sum\limits_{\Delta>0} P(X = c - \Delta)\right] = c \sum\limits_{\Delta\in\mathbb{R}} P(X = c + \Delta) = c \cdot 1 = c$;

1.88.4 Stochastik-Buch Seite 185, Aufgabe 5

a) Eine Urne enthält zehn gleichartige Kugeln, welche die Nummern 1 bis 10 tragen. Eine Kugel wird zufällig ausgewählt. X_{10} sei die darauf verzeichnete Zahl. Berechnen Sie $E(X_{10})$.

$E(X_{10}) = \frac{11}{2}$;

b) Aufgabe a) soll von 10 auf die natürliche Zahl n verallgemeinert werden.

$E(X_n) = \frac{n+1}{2}$;

c) Es werden aus der Urne mit zehn Kugeln zwei Kugeln zufällig mit Zurücklegen gezogen. Y sei das Maximum der Zahlen. Berechnen Sie $E(Y)$.

$E(Y) = \sum\limits_{\omega\in\Omega} X(\omega)P(\{\omega\}) = \frac{1}{100}\left[10 \cdot (1 \cdot 10 + 10 \cdot 1 - 1) + 9 \cdot (1 \cdot 9 + 9 \cdot 1 - 1) + \cdots + 1 \cdot (1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 - 1)\right] = 7{,}15$;

18.09.2006

1.89 92. Hausaufgabe

1.89.1 Stochastik-Buch Seite 185, Aufgabe 6

X sei die Azzahl der K beim viermaligen unabhänigen Werfen einer Laplace-Münze.

a) Berechnen Sie $E(X)$.

$$E(X)=\sum_{n=0}^{4} n\cdot\frac{\binom{4}{n}}{16}=2=4E(X_i)=4\cdot\left(0\cdot\tfrac{1}{2}+1\cdot\tfrac{1}{2}\right);$$

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von $Y=X-E(X)$ und berechnen Sie $E(Y)$.

x	0	1	2	3	4
y	-2	-1	0	1	2
16 P(Y = y)	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$

$E(Y)=E(X-E(X))=E(X)-E(E(X))=E(X)-E(X)=0;$

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von $Z=(X-E(X))^2$ und berechnen Sie $E(Z)$.

$E(Z)=\frac{1}{16}\left[4\cdot 2\cdot\binom{4}{0}+1\cdot 2\cdot\binom{4}{1}+0\cdot\binom{4}{2}\right]=1;$

1.89.2 Stochastik-Buch Seite 185, Aufgabe 7

Ein amerikanisches Roulette-Rad hat 38 Felder, von denen 18 rot, 18 schwarz und 2 grün sind. Jemand setzt einen Euro auf Rot. Er kann dabei einen Euro gewinnen oder verlieren. Zeigen Sie, dass der zu erwartende Verlust pro Spiel rund 5,3 ¢ beträgt.

$E(V)=-1\,€\cdot\frac{18}{38}+1\,€\cdot\frac{18+2}{38}\approx 5{,}3\,¢.$

1.89.3 Stochastik-Buch Seite 185, Aufgabe 9

Beim Würfelspiel „Zwei zu Eins“ (Aufgabe 25 in 9) ist die Gewinnwahrscheinlichkeit $\frac{11}{27}$. Wie groß müsste die Gewinnauszahlung beim Einsatz eines Euro sein bei einem fairen Spiel?

$E(X)=\frac{11}{27}\cdot A+\frac{16}{27}\cdot -1\,€=0\,€;$

$A=\frac{16}{27}\cdot\frac{27}{11}\cdot 1\,€=\frac{16}{11}\,€;$

Ausschüttung $=1\,€+A$; (faires Spiel $\Leftrightarrow$ E(Ausschüttung = Einsatz))

1.89.4 Stochastik-Buch Seite 185, Aufgabe 11

Eine Lotterie verkauft 10000 Lose zu je 2 €. Drei Lose gewinnen je 2000 €, fünf Lose je 1000 € und 10 Lose je 500 €. Wie groß ist der erwartete Verlust des Lotteriespielers?

$E(X) = \frac{1}{10000} [3 \cdot (-1998\,€) + 5 \cdot (-998\,€) + 10 \cdot (-498\,€) + (10000 - 3 - 5 - 10) \cdot 2\,€] = \frac{10000 \cdot 2\,€ - 3 \cdot 2000\,€ - 5 \cdot 1000\,€ - 10 \cdot 500\,€}{10000} = 40\,¢$; 19.09.2006

„wie tief geht die eigene Schizophrenie?“ 19.09.2006

1.90 93. Hausaufgabe

1.90.1 Stochastik-Buch Seite 186, Aufgabe 14

Bei eine, Gesellschaftsspiel zahlt man einen bestimmten Geldbetrag a ein, wählt ein der sechs Zahlen 1, 2, $\ldots$, 6 aus und würfelt dann mit drei Würfeln.

Zeigen alle drei Würfel die gewählte Zahl, so erhält man das Vierfache seines Einsatzes. Zeigen zwei Würfel die gewählte Zahl, so erhält man das Dreifache seines Einsatzes. Zeigt nur ein Würfel die gewählte Zahl, so erhält man das Doppelte seines Einsatzes. In allen anderen Fällen erhält man nichts.

X sei der Reingewinn eines Mitspielers bei einem Spiel. Unter der Annahme, dass die benützten Würfel Laplace-Würfel sind, bestimme man

a) die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X

b) den Erwartungswert von X

wenn man die Sechs auswählt.

$E(X) = 3a \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 + 2a \cdot \binom{3}{1} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \frac{5}{6} + a \cdot \binom{3}{1} \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^2 + (-a) \left(\frac{5}{6}\right)^3 = -\frac{17}{216} a$;

1.90.2 Stochastik-Buch Seite 190, Aufgabe 30

Berechnen Sie den Erwartungswert des Produkts der Augenzahlen, die mit drei Würfeln fallen können.

$E(X) = 3{,}5^3$; 20.09.2006

1.91 94. Hausaufgabe

21.09.2006

1.91.1 Stochastik-Buch Seite 190, Aufgabe 29

Beim unabhängigen Werfen zweier unterscheidbarer Laplace-Würfel sei X die kleinste, Y die größte der Augenzahlen.

a) Stellen Sie die gemeinsame Wahrscheinlichkeitstafel auf und leiten Sie daraus die beiden Randverteilungen ab.

```
y\x |  1  2  3  4  5  6 |
----+-------------------+---
  1 |  1  0  0  0  0  0 |  1
  2 |  2  1  0  0  0  0 |  3
  3 |  2  2  1  0  0  0 |  5
  4 |  2  2  2  1  0  0 |  7
  5 |  2  2  2  2  1  0 |  9
  6 |  2  2  2  2  2  1 | 11
----+-------------------+---
    | 11  9  7  5  3  1 | 36
```

b) Begründen Sie anschaulich, warum X und Y nicht unabhängig sind und bestätigen Sie dies auch durch Rechnung.

$P(X = 2 \cap Y = 1) = 0 \neq \frac{9}{36}\frac{1}{36} = P(X = 2)P(Y = 1);$

c) Berechnen Sie $E(X)$, $E(Y)$ und $E(X + Y)$.

$E(X) = \frac{1}{36}\left[1 \cdot 11 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 5 + 6 \cdot 1\right] = \frac{91}{36};$

$E(Y) = \frac{1}{36}\left[1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 + 5 \cdot 9 + 6 \cdot 11\right] = \frac{161}{36};$

$E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 7;$

d) Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Augensumme Z und der Summe aus X und Y?

$E(Z) = \frac{1}{36}\left[2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + \cdots + 10 \cdot 3 + 11 \cdot 2 + 12 \cdot 1\right] = 7 = E(X+Y);$

e) Bestimmen Sie $P(X \leq 3 \cap Y \leq 4)$.

$P(X \leq 3 \cap Y \leq 4) = \frac{1}{36}\left[(1 + 0 + 0) + (2 + 1 + 0) + (2 + 2 + 1) + (2 + 2 + 2)\right] = \frac{5}{12};$

20.09.2006

1.91.2 Stochastik-Buch Seite 190, Aufgabe 31

X sei eine Zufallsgröße mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung

x	-2	0	2
$P(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Ferner sei $Y = X^2$.

Zeigen Sie, dass $E(XY) = E(X)E(Y)$ ist, obwohl X und Y abhängig sind.

$P(X=2)P(Y=4) = \frac{1}{3}\frac{2}{3} = \frac{2}{9} \neq \frac{1}{3} = P(X = 2 \cap Y = 4)$;

$E(X)E(Y) = \frac{1}{3}\left[(-2)+0+2\right]\cdot\frac{1}{3}\left[4+0+4\right] = 0 = \frac{1}{3}\left[(-2)\cdot 4 + 0\cdot 0 + 2\cdot 4\right] = E(XY)$;

1.91.3 Stochastik-Buch Seite 190, Aufgabe 32

Die Seiten zweier Laplace-Würfel sind mit den Zahlen -3, -2, -1, 1, 2, 3 bezeichnet. Die mit den Würfeln unabhängig geworfenen Augenzahlen seien mit X bzw. Y bezeichnet.

a) Berechnen Sie $E(X)$ und $E(Y)$.

$E(X) = E(Y) = \frac{1}{6}\left[3+2+1-1-2-3\right] = 0$;

b) Berechnen Sie $E(X^2)$ und $E(Y^2)$.

$E(X^2) = E(Y^2) = \frac{1}{6}\left[9+4+1+1+4+9\right] = \frac{14}{3}$;

c) Berechnen Sie $E(XY)$.

$E(XY) = E(X)E(Y) = 0$;

d) Berechnen Sie $E((X+Y)^2)$ zunächst im direkten Ansatz über die Aufstellung der möglichen Summen und dann nach der Summenregel.

$E((X+Y)^2) = E(X^2 + 2XY + Y^2) = \frac{14}{3} + 2\cdot 0\cdot 0 + \frac{14}{3} = \frac{28}{3}$;

25.09.2006

1.92 95. Hausaufgabe

1.92.1 Stochastik-Buch Seite 199, Aufgabe 35

X sei eine Zufallsgröße mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung

```
x |   -1 |    0 |     1 |    2
--+------+------+-------+-----
P | 8/27 | 1/27 | 10/27 | 8/27
```

Berechnen Sie $\mathrm{Var}(X)$ mit der Verschiebungsformel.

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= E(X^2) - E^2(X) = \\ &= \left[1 \cdot \tfrac{8}{27} + 0 \cdot \tfrac{1}{27} + 1 \cdot \tfrac{10}{27} + 4 \cdot \tfrac{8}{27}\right] - \\ &- \left[(-1) \cdot \tfrac{8}{27} + 0 \cdot \tfrac{1}{27} + 1 \cdot \tfrac{10}{27} + 2 \cdot \tfrac{8}{27}\right]^2 = \\ &= \tfrac{38}{27};\end{aligned}$$

1.92.2 Stochastik-Buch Seite 201, Aufgabe 50

Sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ mit $P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{3}$ für $i = 1, 2, 3$.
Ferner seien drei Zufallsgrößen X, Y, Z auf (Ω, P) definiert durch

$X(\{\omega_1\}) = 1;\quad X(\{\omega_2\}) = 2;\quad X(\{\omega_3\}) = 3;$

$Y(\{\omega_1\}) = 2;\quad Y(\{\omega_2\}) = 3;\quad Y(\{\omega_3\}) = 1;$

$Z(\{\omega_1\}) = 3;\quad Z(\{\omega_2\}) = 1;\quad Z(\{\omega_3\}) = 2;$

a) Konstruieren Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilungen von $X+Y$, $Y+Z$, $Z+X$.

```
w   | w1 | w2 | w3
----+----+----+---
x   |  1 |  2 |  3
y   |  2 |  3 |  1
z   |  3 |  1 |  2
----+----+----+---
x+y |  3 |  5 |  4
y+z |  5 |  4 |  3
z+x |  4 |  3 |  5
----+----+----+---
P   |     1/3
```

b) Begründen Sie die Abhängigkeit von X, Y, Z.

Mit Kenntnis des Werts, den eine Zufallsgröße annimmt, ist ein Elementarereignis eindeutig identifiziert. Damit kennt man auch die Werte der anderen Zufallsgrößen.

c) Berechnen Sie die Erwartungswerte und Varianzen von X, Y, Z.

$E(X) = E(Y) = E(Z) = 2;$

$\operatorname{Var}(X) = \operatorname{Var}(Y) = \operatorname{Var}(Z) = \frac{1}{3}\left[(1-2)^2 + (2-2)^2 + (3-2)^2\right] = \frac{2}{3};$

d) Berechnen Sie die Erwartungswerte und Varianzen der Summen in a).

$E(X+Y) = E(Y+Z) = E(Z+X) = E(X) + E(Y) = 4;$

$\operatorname{Var}(X+Y) = \operatorname{Var}(Y+Z) = \operatorname{Var}(Z+X) = \frac{1}{3}\left[(3-4)^2 + (5-4)^2 + (4-4)^2\right] = \frac{2}{3};$

e) Berechnen Sie den Erwartungswert von $X \cdot Y$.

$E(XY) = \frac{1}{3}[2+6+3] = \frac{11}{3};$

f) Was lässt sich über die Verteilung von $X+Y+Z$ aussagen?

$W_{X+Y+Z} = \{6\};$

$P(X+Y+Z=6) = 1;$

g) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von $X+Y-Z$ und $\frac{Z}{|X-Y|}$.

```
x+y-z | 0 | 2 | 4
------+---+---+--
P     |    1/3

z/|x-y| |   1 |   3
--------+-----+----
P       | 2/3 | 1/3
```

26.09.2006

1.93 96. Hausaufgabe

1.93.1 Stochastik-Buch Seite 186, Aufgabe 13

Ein Spielautomat mit zwei Scheiben, deren zehn kongruente Kreisausschnitte mit dem Nummern 0 bis 9 nach dem Drehen zufällig stehen bleiben, schüttet folgende Gewinne aus:

5 €, wenn zweimal die 0 im Fenster steht, 2 € wenn irgendein anderes Paar gleicher Zahlen auftritt, 0,50 €, wenn genau eine 0 auftritt.

In allen anderen Fällen geht der Einsatz verloren.

a) Berechnen Sie den Erwartungswert der Ausschüttung.

$E(X) = \frac{1}{10^2}\left[5\,€ \cdot 1 + 2\,€ \cdot 9 + 0{,}50\,€ \cdot (1 \cdot 9 + 9 \cdot 1)\right] = 32\,¢;$

b) Ist der Einsatz von 0,50 € für den Automatenbesitzer rentabel?

Ja, weil $50\,¢ > 32\,¢$.

1.93.2 Stochastik-Buch Seite 188, Aufgabe 20

Ein Gerät bestehe aus drei komplizierten Systemen, die unabhängig voneinander ausfallen können. Die auf die Wartungszeit bezogene Ausfallswahrscheinlichkeits für jedes der Systeme sei 1 %. Die Zufallsgröße X kennzeichne die Anzahl der ausfallenden Systeme.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X.

$P(X = 0) = (1 - 1\,\%)^3\,;$

$P(X = 1) = 3 \cdot 1\,\% \cdot (1 - 1\,\%)^2\,;$

$P(X = 2) = 3 \cdot (1\,\%)^2 \cdot (1 - 1\,\%)\,;$

$P(X = 3) = (1\,\%)^3\,;$

b) Berechnen Sie die erwartete Anzahl von ausfallenden Systemen.

$E(X) = \cdots = 0{,}03 = 3\,\% = E(A_1) + E(A_2) + E(A_3);$

1.93.3 Stochastik-Buch Seite 189, Aufgabe 24

Welche Augensumme kann man beim zehnmaligen unabhängigen Werfen eines Laplace-Würfels erwarten?

$E(X_1 + X_2 + \cdots + X_{10}) = 10E(X) = 35;$

1.93.4 Stochastik-Buch Seite 202, Aufgabe 56

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein gerade 60-jähriger Mann im Laufe des folgenden Jahres stirt, ist ungefähr $0{,}02$. Der entsprechende Wert für eine 60-jährige Frau ist ungefähr $0{,}01$.

a) Ein 60-jähriger Mann schließt eine Risikoversicherung für ein Jahr ab über eine Summe von 10000 €. Die Versicherungsprämie sei 300 €. X kennzeichne den Reingewinn oder den Verlust, den die Versicherung an einem solchen Vertrag erzielt. Die Anzahl der unter gleichen Bedingungen Versicherten sei sehr groß. Konstruieren Sie die Wahrscheinlichkeitstabelle und berechnen Sie $E(X)$.

$E(X) = 300\,€ \cdot (1 - 2\,\%) + (300\,€ - 10000\,€) \cdot 2\,\% = 100\,€;$

b) Eine 60-jährige Frau schließt einen ebensolchen Vertrag über 10000 € ab. Y sei der Reingewinn bzw. Verlust der Versicherung. Wie hoch muss die Versicherung die Jahresprämie festsetzen, wenn $E(X) = E(Y)$ sein soll?

$E(Y) = p \cdot (1 - 1\,\%) + (p - 10000\,€) \cdot 1\,\% = E(X);$

$\Leftrightarrow p = \frac{E(X) + 10000\,€ \cdot 1\,\%}{1 - 1\,\% + 1\,\%} = E(X) + 100\,€ = 200\,€;$

c) Konstruieren sie die gemeinsame Wahrscheinlichkeitstabelle für X und Y unter der Voraussetzung, dass es sich um zwei unabhängige Personen handelt, und leiten Sie daraus die Wahrscheinlichkeitsverteilung für $X + Y$ ab.

```
y\x      | 300 €    -9700 € |
---------+------------------+------
  200 €  |  97 %       2 %  |  99 %
-9800 €  |   1 %       0 %  |   1 %
---------+------------------+------
         |  98 %       2 %  | 100 %
```

```
x+y | -19500 € | -9500 € | 500 €
----+----------+---------+------
P   |      0 % |     3 % |  97 %
```

d) Berechnen Sie $E(X + Y)$ mithilfe der Wahrscheinlichkeitsverteilung und dann nach der Summenregel.

$E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 200\,€;$

27.09.2006

1.94 97. Hausaufgabe

1.94.1 Stochastik-Buch Seite 202, Aufgabe 53

Bei einem Fabrikationsprozess zweier Werkstücke seien für jedes Werkstück die Abweichungen $-0{,}2$, $-0{,}1$, $0{,}0$, $0{,}1$, $0{,}2$ vom Sollwert μ_1 bzw. μ_2 gleich möglich. X_1 bzw. X_2 kennzeichne die jeweilige Abweichung. X_1 und X_2 seien unabhängig.

a) Berechnen Sie für die Summe $\mu_1 + \mu_2$ die sämtlichen möglichen Abweichungen und Wahrscheinlichkeiten.

b) Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von $X_1 + X_2$ grafisch dar.

$P(X_1 + X_2 = -0{,}4) = 1\left(\frac{1}{5}\right)^2;$
$P(X_1 + X_2 = -0{,}3) = 2\left(\frac{1}{5}\right)^2;$
$P(X_1 + X_2 = -0{,}2) = 3\left(\frac{1}{5}\right)^2;$
$P(X_1 + X_2 = -0{,}1) = 4\left(\frac{1}{5}\right)^2;$
$P(X_1 + X_2 = 0{,}0) = 5\left(\frac{1}{5}\right)^2;$
$P(X_1 + X_2 = 0{,}1) = 4\left(\frac{1}{5}\right)^2;$
$P(X_1 + X_2 = 0{,}2) = 3\left(\frac{1}{5}\right)^2;$
$P(X_1 + X_2 = 0{,}3) = 2\left(\frac{1}{5}\right)^2;$
$P(X_1 + X_2 = 0{,}4) = 1\left(\frac{1}{5}\right)^2;$

c) Welche Abweichung vom Sollwert $\mu_1 + \mu_2$ hat die größte Wahrscheinlichkeit?

Die Abweichung $\Delta = 0 / |\Delta| = 0{,}1$ hat die größte Wahrscheinlichkeit.

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Abweichung vom Sollwert im Intervall $-0{,}1 \leq X_1 + X_2 \leq 0{,}1$ gelegen ist?

$P(-0{,}1 \leq X_1 + X_2 \leq 0{,}1) = 13\left(\frac{1}{5}\right)^2;$

e) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie dem Betrag nach größer sind?

$P(|X_1 + X_2| > 0{,}1) = 1 - 13\left(\frac{1}{5}\right)^2;$

f) Berechnen Sie $E(X_1)$ und $E(X_2)$.

$E(X_1) = E(X_2) = 0;$

g) Berechnen Sie $\mathrm{Var}(X_1)$ und $\mathrm{Var}(X_2)$.

$\mathrm{Var}(X_1) = \mathrm{Var}(X_2) = 0{,}02;$

h) Berechnen Sie $\mathrm{Var}(X_1 + X_2)$ mithilfe der Wahrscheinlichkeitsverteilung b) und zeigen Sie die Gültigkeit der Varianzregel.

$\mathrm{Var}(X_1 + X_2) = \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2) = 0{,}04;$

1.94.2 Kann man direkt an den Komponenten zweier Vektoren erkennen, ob die Vektoren zueinander senkrecht stehen?

$\binom{a}{b} \perp k \binom{-b}{a}$;

$$\begin{array}{rcl|l}
\alpha & = & -kb & \cdot a \\
\beta & = & ka & \cdot b \\
\hline
a\alpha & = & -kab & \cdot (-1) \\
b\beta & = & kab & \\
\hline
b\beta & = & -a\alpha & +a\alpha \\
\hline
a\alpha + b\beta & = & 0 &
\end{array}$$

02.10.2006

```
         ^
         |
    +    |
    |\   |   +
    | \  |  /|
    |  \ | / |
<-----+----->
         |
         v
```

[Vektordreiecke (gebildet durch x-Achse, Vektor als Hypothenuse und entsprechend parallel verschobene y-Achse) sind zueinander ähnlich.] 02.10.2006

1.95 98. Hausaufgabe

1.95.1 Geometrie-Buch 208, Aufgabe 1

Berechne die Beträge von

a) $\left|\begin{pmatrix}3\\4\\12\end{pmatrix}\right| = \sqrt{3^2+4^2+12^2} = 13;$

b) $\left|\begin{pmatrix}4\\-12\\-3\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}3\\4\\12\end{pmatrix}\right| = 13;$

c) $\left|\begin{pmatrix}12\\-15\\16\end{pmatrix}\right| = \sqrt{12^2+15^2+16^2} = 25;$

1.95.2 Geometrie-Buch 208, Aufgabe 3

Berechne die Einheitsvektoren in Richtung

d) $\dfrac{\begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix}\right|} = \dfrac{\begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix};$

e) $\dfrac{\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}\right|} = \dfrac{\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}}{\sqrt{3}} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix};$

f) $\dfrac{\begin{pmatrix}8\\-1\\4\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}8\\-1\\4\end{pmatrix}\right|} = \dfrac{\begin{pmatrix}8\\-1\\4\end{pmatrix}}{9} = \begin{pmatrix}\frac{8}{9}\\-\frac{1}{9}\\\frac{4}{9}\end{pmatrix};$

g) $\dfrac{13\begin{pmatrix}8\\-1\\4\end{pmatrix}}{\left|13\begin{pmatrix}8\\-1\\4\end{pmatrix}\right|} = \dfrac{\begin{pmatrix}8\\-1\\4\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}8\\-1\\4\end{pmatrix}\right|} = \begin{pmatrix}\frac{8}{9}\\-\frac{1}{9}\\\frac{4}{9}\end{pmatrix};$

h) $\dfrac{\begin{pmatrix}1\\1\\2{,}3\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\2{,}3\end{pmatrix}\right|} = \dfrac{\begin{pmatrix}1\\1\\2{,}3\end{pmatrix}}{2{,}7} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2{,}7}\\\frac{1}{2{,}7}\\\frac{2{,}3}{2{,}7}\end{pmatrix};$

i) $\dfrac{\begin{pmatrix}-1\\-1\\\frac{1}{12}\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}-\\-1\\\frac{1}{12}\end{pmatrix}\right|} = \dfrac{\begin{pmatrix}-1\\-1\\\frac{1}{12}\end{pmatrix}}{\frac{17}{12}} = \begin{pmatrix}-\frac{12}{17}\\-\frac{12}{17}\\\frac{1}{17}\end{pmatrix};$

j) $\dfrac{9\begin{pmatrix}\frac{7}{5}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{5}\end{pmatrix}}{\left|9\begin{pmatrix}\frac{7}{5}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{5}\end{pmatrix}\right|} = \dfrac{\begin{pmatrix}\frac{7}{5}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{5}\end{pmatrix}}{\frac{3}{2}} = \begin{pmatrix}\frac{14}{15}\\\frac{1}{3}\\\frac{2}{15}\end{pmatrix};$

k) $\dfrac{\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\-1\\\frac{7}{4}\end{pmatrix}}{\left|\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\-1\\\frac{7}{4}\end{pmatrix}\right|} = \dfrac{\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\-1\\\frac{7}{4}\end{pmatrix}}{\frac{9}{4}} = \begin{pmatrix}-\frac{4}{9}\\-\frac{4}{9}\\\frac{7}{9}\end{pmatrix};$

l) $\dfrac{\begin{pmatrix}-3a\\2{,}4a\\3{,}2a\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}-3a\\2{,}4a\\3{,}2a\end{pmatrix}\right|} = \dfrac{\begin{pmatrix}-3a\\2{,}4a\\3{,}2a\end{pmatrix}}{5\,|a|} = \pm\begin{pmatrix}-\frac{3}{5}\\\frac{2{,}4}{5}\\\frac{3{,}2}{5}\end{pmatrix};$

1.95.3 Geometrie-Buch 208, Aufgabe 4

Berechne a.

a) $\left|\begin{pmatrix}3a\\-6a\\2a\end{pmatrix}\right| = \sqrt{9a^2+36a^2+4a^2} = 7\,|a| \overset{!}{=} 14;$

$\Leftrightarrow |a| = 2;$

b) $\left|\begin{pmatrix} a \\ 2a \\ a-1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{a^2 + 4a^2 + a^2 - 2a + 1} = \sqrt{6a^2 - 2a + 1} \stackrel{!}{=} 7;$

$\Leftrightarrow a_1 = -\frac{8}{3}; \quad a_2 = 3;$

„z.B. [will länger ausholen]. . . ah ne; die, die in Physik sind, wissen´s eh, und die, die´s nicht sind, wissen´s halt nicht. . . “ 05.10.2006

1.96 99. Hausaufgabe

1.96.1 Stochastik-Buch Seite 208, Aufgabe 66

1. Ein Gerätehersteller führt vor jeder größeren Lieferung folgenden Text durch: Es werden nacheinander Geräte „mit Zurücklegen“ geprüft, bis das zweite einwandfreie bzw. das zweite mangelhafte Gerät aufgetreten ist. Im ersten Fall wird die Lieferung freigegeben, im zweiten Fall zurückbehalten.

   a) Geben Sie einen geeigneten Ergebnisraum Ω an.

   $\Omega = \{11, 101, 100, 00, 010, 011\};$

   b) Schreiben Sie das Ereignis L: „es wird geliefert“ als Teilmenge von Ω. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P_p(L)$ in Abhängigkeit vom Anteil p mangelhafter Geräte in der Lieferung.

   $L = \{11, 101, 011\} \subset \Omega;$

   $P_p(L) = (1-p)^2 + (1-p)^2 p + p\,(1-p)^2 = 2p^3 - 3p^2 + 1 = (2p+1)\,(1-p)^2\,;$

   c) Weisen Sie mit Methoden der Differentialrechnung nach, dass $P_p(L)$ mit wachsendem p monoton abnimmt.

   $\frac{\mathrm{d}P_p(L)}{\mathrm{d}p} = 6p^2 - 6p < 0$ für $p \in \,]0, 1[\,;$

   d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit höchstens, dass Lieferungen mit einem Anteil $p \geq 0{,}2$ von mangelhaften Geräten bei diesem Testverfahren freigegeben werden?

   $P_{\geq 0{,}2}(L) \leq 2 \cdot (0{,}2)^3 - 3 \cdot (0{,}2)^2 + 1 = 90\,\%;$

   e) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird die Sendung zurückbehalten, wenn $p = 0{,}1$ gilt?

   $1 - P_{0{,}1}(L) \approx 1 - 97\,\% = 3\,\%;$

2. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der nach dem in Teilaufgabe 1 beschriebenen Verfahren zu prüfenden Geräte an.

   a) Bestätigen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung
   $P(X=2)=1-2p+2p^2; \quad P(X=3)=2p\,(1-p)\,;$
   $P(X=2)=(1-p)^2+p^2=2p^2-2p+1;$
   $P(X=3)=(1-p)^2\,p+(1-p)\,p^2+p^2\,(1-p)+p\,(1-p)^2=2p-2p^2=2p\,(1-p)\,;$

   b) Zeigen Sie, dass die Verteilung aus Teilaufgabe 2a den Forderungen von Kolmogorow: „nichtnegativ“ und „normiert“ genügt.
   $p\in[0,1]\,;$
   $P(X=2)+P(X=3)=(2p^2-2p+1)+(2p-2p^2)=1;$
   $P(X=3)=2p\,(1-p)\geq 0$, sofern p wie implizit in der Angabe bestimmt $\in[0,1]\,;$
   $P(X=2)=2p^2-2p+1=(1-p)^2+p^2\geq 0$, da eine Summe von Quadraten im Reellen immer ≥ 0;

   c) Weisen Sie nach: $E_p(X)=2\,(1+p-p^2)\,;$
   $E_p(X)=2\cdot P(X=2)+3\cdot P(X=3)=-2p^2+2p+2;$

   d) Für welchen Wert von p müssen im Durchschnitt die meisten Geräte geprüft werden? Wie viele sind dies?
   $\frac{\mathrm{d}E_p(X)}{\mathrm{d}p}=-4p+2\overset{!}{=}0;$
   $\Leftrightarrow p=\frac{1}{2};$
   $E_{\frac{1}{2}}(X)=-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\left(\frac{1}{2}\right)+2=2{,}5;$

(Aus Abiturprüfung 1984.)

1.96.2 Geometrie-Buch Seite 208, Aufgabe 6

Berechne den Umfang des Dreiecks ABC:

b) $A(1,-6,-6); \quad B(2,2,-2); \quad C(0,-2,2);$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|+\left|\overrightarrow{BC}\right|+\left|\overrightarrow{CA}\right|=9+6+9=24;$$

c) $A(9,9,0)$; $B(-6,3,9)$; $C(0,-6,-6)$; Umkreisradius?

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|\overrightarrow{BC}\right| + \left|\overrightarrow{CA}\right| \approx 55{,}5;$$

$$\frac{\left|\overrightarrow{AB}\right|}{2\sin\arccos\frac{\vec{A}\vec{B}}{\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|}} = r;$$

$$r = \sqrt{114};$$

06.10.2006

1.97 100. Hausaufgabe

1.97.1 Geometrie-Buch Seite 216, Aufgabe 11

Berechne den Winkel zwischen

a) einer Raumdiagonale und einer Kante eines Würfels.

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix};$$

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\frac{\vec{E}\vec{K}}{\left|\vec{E}\right|\left|\vec{K}\right|} = \frac{a^2}{\sqrt{3a^2}\sqrt{a^2}} = \frac{a^2}{\sqrt{3}a^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \cos\varphi;$$

$$\varphi \approx 54{,}7°;$$

b) zwei Raumdiagonalen eines Würfels,

$$\vec{E}_1 = \begin{pmatrix} a \\ -a \\ a \end{pmatrix};$$

$$\vec{E}_2 = \begin{pmatrix} -a \\ -a \\ a \end{pmatrix};$$

$$\frac{\vec{E}_1\vec{E}_2}{\left|\vec{E}_1\right|\left|\vec{E}_2\right|} = \frac{3a^2}{\sqrt{3a^2}\sqrt{3a^2}} = 1 = \cos\varphi;$$

$$\Leftrightarrow \varphi = 0°;$$

Falsch! Richtig: $\varphi \approx 71°$;

1.97.2 Geometrie-Buch Seite 216, Aufgabe 13

$g\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix};$

$h\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ -\sqrt{3} \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix};$

Berechne den Winkel zwischen g und h.

$$\left| \frac{\vec{g}\vec{h}}{|\vec{g}| \left|\vec{h}\right|} \right| = \left| \frac{6+8}{\sqrt{9+16}\sqrt{4+4+1}} \right| = \left| \frac{14}{5 \cdot 3} \right| = \left| \tfrac{14}{15} \right| = \cos\varphi;$$

$\varphi \approx 21°;$

1.97.3 Geometrie-Buch Seite 217, Aufgabe 17

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix};$

a) Bestimme $\vec{a}_b$, die Projektion von $\vec{b}$ in Richtung $\vec{a}$.

$\cos\varphi = \frac{5-1-1}{\sqrt{25+1+1}\sqrt{1+1+1}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3};$

$\vec{a}_b = \left|\vec{b}\right| \cos\varphi \cdot \vec{a}^0 = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\vec{a}}{\sqrt{27}} = \frac{1}{3}\frac{1}{3}\vec{a} = \frac{1}{9}\vec{a};$

b) Bestimme $\vec{b}_a$, die Projektion von $\vec{a}$ in Richtung $\vec{b}$.

$\vec{b}_a = |\vec{a}| \cos\varphi \cdot \vec{b}^0 = \sqrt{27} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\vec{b}}{\sqrt{3}} = \vec{b};$

c) Welche Besonderheit haben $\vec{a}$ und $\vec{b}$, wenn gilt $\vec{b}_a = \vec{b}$?

$\vec{b}_a \stackrel{!}{=} b;$ (Formel von d)) bringt:

$\vec{a}\vec{b} \stackrel{!}{=} \vec{b}\vec{b};$

```
      ^
     /.
  b/  .
   /  .
  /   .
------>
    a
```

d) Zeige allgemein: $\vec{a}_b = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|a|^2} \cdot \vec{a};$

$\vec{a}_b = \left|\vec{b}\right| \cos\varphi \cdot \vec{a}^0 = \left|\vec{b}\right| \cdot \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|} \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a};$

09.10.2006

„Theologie ist der Versuch, Axiome auf einem Gebiet aufzustellen, auf dem es keine Axiome gibt bzw. auf dem Axiome nicht sinnvoll sind“

„Das Schöne an der Mathematik ist, dass sie mit der Realität nichts zu tun hat.“ 09.10.2006

1.98 101. Hausaufgabe

1.98.1 Geometrie-Buch Seite 208, Aufgabe 8

Zeige, dass die Punkte auf einer Kugel um $M(-20, -20, -4)$ liegen, und berechne den Kugelradius r.

$A(12, -12, -3)$; $\left|\overrightarrow{MA}\right| = 33$;

$B(12, -13, 0)$; $\left|\overrightarrow{MB}\right| = 33$;

$C(8, -3, 0)$; $\left|\overrightarrow{MC}\right| = 33$;

$D(8, -4, 3)$; $\left|\overrightarrow{MD}\right| = 33$;

$E(5, 0, 4)$; $\left|\overrightarrow{ME}\right| = 33$;

$F(0, 0, 13)$; $\left|\overrightarrow{MF}\right| = 33$;

1.98.2 Geometrie-Buch Seite 209, Aufgabe 10b

Durch $A(4, -5, 3)$ und $B(6, -3, 2)$ geht die Grade g.

Bestimme die Punkte auf g, die von B die Entfernung 9 haben.

$g\colon \vec{X} = \vec{B} + \mu\overrightarrow{BA}$;

$\left|\overrightarrow{BX}\right| = |\mu| \left|\overrightarrow{BA}\right| = 3\,|\mu| = 9$;

$\Leftrightarrow |\mu| = 3$;

$\vec{X}(3) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -9 \\ 5 \end{smallmatrix}\right)$; $\quad \vec{X}(-3) = \left(\begin{smallmatrix} 12 \\ 3 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$; 10.10.2006

1.99 102. Hausaufgabe

1.99.1 Geometrie-Buch Seite 215, Aufgabe 3c

Zeige, dass die Ortsvektoren $\vec{A}$, $\vec{B}$ und $\vec{C}$ einen Würfel aufspannen.

$\vec{A} = \left(\begin{smallmatrix} a \\ a+1 \\ a(a+1) \end{smallmatrix}\right); \quad \vec{B} = \left(\begin{smallmatrix} a+1 \\ -a(a+1) \\ a \end{smallmatrix}\right); \quad \vec{C} = \left(\begin{smallmatrix} a(a+1); \\ a \\ -a-1 \end{smallmatrix}\right);$

$\left|\vec{A}\right| = \left|\vec{B}\right| = \left|\vec{C}\right| = \sqrt{a^2 + (a^2 + 2a + 1) + (a^3 + 2a^2 + a)} = \sqrt{a^3 + 4a^2 + 3a + 1};$

$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{C} = \vec{C} \cdot \vec{A} = a\,(a+1) - (a+1)^2\,a + a^2\,(a+1) = a^2 + a - a^3 - 2a^2 - a + a^3 + a^2 = 0;$

1.99.2 Geometrie-Buch Seite 215, Aufgabe 4b

Für welche Werte von u ist $\vec{a} \perp \vec{b}$, $\vec{a} \perp \vec{b}$, $\vec{b} \perp \vec{c}$?

$\vec{a} = \left(\begin{smallmatrix} u+1 \\ 2-u \\ -1 \end{smallmatrix}\right); \quad \vec{b} = \left(\begin{smallmatrix} u \\ u+2 \\ u+4 \end{smallmatrix}\right); \quad \vec{c} = \left(\begin{smallmatrix} 2-3u \\ u \\ 2+2u \end{smallmatrix}\right);$

$\vec{a}\vec{b} = u^2 + u - (u^2 - 4) - u - 4 = 0;$

$\vec{b}\vec{c} = 2u - 3u^2 + u^2 + 2u + 2u + 2u^2 + 8 + 8u = 14u + 8 = 0; \Leftrightarrow u = -\frac{4}{7};$

$\vec{a}\vec{c} = 2u - 3u^2 + 2 - 3u + 2u - u^2 - 2 - 2u = -u - 4u^2 = 0; \Leftrightarrow u_1 = 0; \quad u_2 = -\frac{1}{4};$

1.99.3 Geometrie-Buch Seite 216, Aufgabe 10b

Berechne die Winkel des Dreiecks ABC.

$A(1,-6,-6); \quad B(2,2,-2); \quad C(0,-2,2);$

$\frac{\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AB}|} = \frac{-1+32+32}{\sqrt{1^2+4^2+8^2}\sqrt{1^2+8^2+4^2}} = \frac{63}{81} = \frac{7}{9} = \cos\alpha;$

$-\frac{\overrightarrow{BC}\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{AB}|} = -\frac{-2-32}{\sqrt{(-2)^2+(-4)^2+0^2}\sqrt{1^2+8^2+4^2}} = \frac{34}{9\sqrt{20}} = \cos\beta;$

$\frac{\overrightarrow{AC}\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{BC}|} = \frac{2-16}{\sqrt{1^2+4^2+8^2}\sqrt{(-2)^2+(-4)^2+0^2}} = \frac{-14}{9\sqrt{20}} = \cos\gamma;$

1.99.4 Geometrie-Buch Seite 217, Aufgabe 16a

$g\colon \vec{X} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + \lambda \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right); \quad h\colon \vec{X} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + \mu \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -5 \\ 10 \end{smallmatrix}\right);$

Berechne den Schittwinkel von g und h.

$$\left|\frac{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-5\\10\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right|\left|\begin{pmatrix}1\\-5\\10\end{pmatrix}\right|}\right| = \left|\frac{1-10+30}{\sqrt{14}\sqrt{126}}\right| = \cos\varphi;$$

12.10.2006

1.100 103. Hausaufgabe

1.100.1 Geometrie-Buch Seite 231, Aufgabe 15a

Untersuche, ob g und h windschief sind, berechne gegebenenfalls den Abstand $d(g,h)$ und die Endpunkte der gemeinsamen Lotstrecke.

$g\colon \vec{X} = \begin{pmatrix}-4\\1\\7\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}-3\\-1\\4\end{pmatrix}; \quad h\colon \vec{X} = \begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}4\\3\\-2\end{pmatrix};$

$\vec{g}$ und $\vec{h}$ sind nicht kollinear.

Gleichsetzen von $\vec{X}_g$ und $\vec{X}_h$ bringt:

$$\begin{array}{rcrcr} -3\lambda & - & 4\mu & = & 8; \\ -\lambda & - & 3\mu & = & 0; \\ 4\lambda & + & 2\mu & = & -7; \end{array}$$

Auflösen bringt Widerspruch für μ ($\frac{7}{10} \neq \frac{8}{5}$), also sind g und h windschief.

$\overrightarrow{X_g X_h} \cdot \vec{g} = -3\,(8 + 4\mu + 3\lambda) - (3\mu + \lambda) + 4\,(-7 - 2\mu - 4\lambda) = -52 - 23\mu - 26\lambda \stackrel{!}{=} 0;$

$\overrightarrow{X_g X_h} \cdot \vec{h} = 4\,(8 + 4\mu + 3\lambda) + 3\,(3\mu + \lambda) - 2\,(-7 - 2\mu - 4\lambda) = 46 + 29\mu + 23\lambda \stackrel{!}{=} 0;$

Auflösen bringt für λ: $\lambda = \frac{-46-29\mu}{23}$;

Einsetzen in die erste Gleichung bringt: $(\mu, \lambda) = (0, -2)$;

$\vec{X}_g(-2) = \begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}; \quad \vec{X}_h(0) = \begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix};$

$\left|\overrightarrow{X_g(-2)X_h(0)}\right| = 3;$

1.100.2 Geometrie-Buch Seite 223, Aufgabe 16

$g\colon \vec{X} = \lambda \begin{pmatrix}6\\-10\\3\end{pmatrix}; \quad h\colon \vec{X} = \begin{pmatrix}-1\\16\\7\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}-8\\10\\1\end{pmatrix};$

g ist die Achse eines Zylinders Z mit Radius 11.

Berechne die Schnittpunkte von Z und h.

Idee: Beschreibung eines jeden Raumpunkts durch ein Koordinatensystem, das von g und zwei anderen Geraden aufgespannt wird.

- **Berechnung eines auf $\tilde{g}$ senkrecht stehenden Vektors.**

  $\vec{g}\vec{a} = 6a_1 - 10a_2 + 3a_3 \overset{!}{=} 0;$

  Eine Gleichung, drei Unbekannte → zwei Freiheitsgrade

  Wahl von a_1 zu 1. Dann Auflösen nach a_2:

  $a_2 = \frac{3a_3+6}{10};$

  Wahl von a_3 zu 1. Dann ist $\vec{a}$:

  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{9}{10} \\ 1 \end{pmatrix};$

  Um Brüche zu vermeiden, „erweitern“ wir $\vec{a}$:

  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix};$

- **Berechnung eines zweiten Vektors, der auf $\tilde{g}$ senkrecht steht und nicht zu $\tilde{a}$ kollinear ist.**

  Wahl von b_3 zu 2. Dann ist $\vec{b}$ (erweitert):

  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix};$

- **Aufstellung der Gleichung für die zu $\tilde{g}$ senkrechten Flächen mit Aufpunkt $\tilde{X}_g$.**

  $\Lambda\colon \vec{X} = \vec{X}_g + \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \lambda \begin{pmatrix} -6 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix};$

- **Zusätzliche Bedingungen, damit Λ zu einem Zylinder eingeschränkt wird.**

  $\left|\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}\right| = 11;$

  $(10\alpha + 5\beta)^2 + (9\alpha + 6\beta)^2 + (10\alpha + 10\beta)^2 = 281\alpha^2 + 161\beta^2 + 408\alpha\beta = 121;$

- **Zusammenfassung der Gleichungen.**

  $$\begin{array}{rcrcrcrcr} 6\lambda & + & 10\alpha & + & 5\beta & + & 8\mu & = & -1; \\ -10\lambda & + & 9\alpha & + & 6\beta & - & 10\mu & = & 16; \\ 3\lambda & + & 10\alpha & + & 10\beta & - & \mu & = & 7; \end{array}$$

  Sowie:

  $281\alpha^2 + 161\beta^2 + 408\alpha\beta = 121;$

- **Auflösen.**

λ	μ	α	β	Schnittpunkt
0	-1	$\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$(7, 6, 6)$
1	-2	$\frac{8}{5}$	$-\frac{7}{5}$	$(15, -4, 5)$

15.10.2006

Alternativ, viel einfacher:

$\overrightarrow{QP} \cdot \vec{g} = 0$; $\overrightarrow{QP}^2 = 121$; mit $\vec{Q} = \vec{X}_h$ und $\vec{P} = \vec{X}_g$;

„[augenscheinlich] wisst ihr schon, dass es gefährlich sein kann, wenn man ins Gravitationszentrum fliegt. . . “ 14.10.2006

1.101 104. Hausaufgabe

1.101.1 Geometrie-Buch Seite 232, Aufgabe 17

$g\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 17 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$; $h\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \\ 16 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$;

a) Die Kugel hat ihren Mittelpunkt auf h und berührt g.

Bestimme ihren Mittelpunkt M und Radius r in Abhängigkeit von μ.

Für welchen Wert von μ ist der Radius minimal?

$M \in h$; $X_K \in g$; $\left|\overrightarrow{X_K M}\right| = r$; $\overrightarrow{X_K M} \cdot \vec{g} = 0$;

Auflösen gibt für λ: $\lambda = \frac{5}{9}\mu - \frac{1}{3}$;

$\vec{X}_K = \vec{X}_g(\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{5}{9}\mu - \frac{1}{3} \\ \frac{40}{9}\mu + \frac{43}{3} \\ \frac{20}{9}\mu + \frac{11}{3} \end{pmatrix}$;

$r = \overrightarrow{X_K M} = \sqrt{16\mu^2 + 96\mu + 225}$;

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\overrightarrow{X_K M}^2 = 32\mu + 96 \stackrel{!}{=} 0; \Leftrightarrow \mu = -3$;

b) Bestimme Mittelpunkt M und Radius r der kleinsten Kugel, deren Mittelpunkt auf h liegt und die g als Tangente hat.

$\mu = -3$;

$\vec{X}_K = \vec{X}_g(\lambda) = \vec{X}_g\left(\frac{5}{9}(-3) - \frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$;

$\vec{M} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$;

$r = \sqrt{16\,(-3)^2 + 96\,(-3) + 255} = 9$;

c) Bestimme Mittelpunkt und Radius der kleinsten Kugel, die h und g als Tangenten hat.

Ansatz: $\overrightarrow{QP} \cdot \vec{g} = \overrightarrow{QP} \cdot \vec{h} = 0$; (Bei der kleinsten Kugel sind $\overrightarrow{MQ}$ und $\overrightarrow{MP}$ (anti-)parallel.)

$r = 4{,}5; \quad \vec{M} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -1 \\ 1{,}5 \end{smallmatrix}\right);$

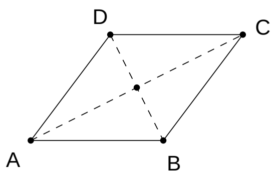
16.10.2006

1.102 105. Hausaufgabe

1.102.1 Geometrie-Buch Seite 235, Aufgabe 1

Beweise folgenden Satz mit dem Skalarprodukt:

In jeder Raute stehen die Diagonalen aufeinander senkrecht.



$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} &= \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}\right) = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)\left(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}\right) = \\
&= -\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}\right) = -\left(\overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{BC}^2\right) = \\
&= -\left(\left|\overrightarrow{AB}\right| - \left|\overrightarrow{BC}\right|\right) = 0;
\end{aligned}$$

1.102.2 Geometrie-Buch Seite 235, Aufgabe 4

Beweise folgenden Satz mit dem Skalarprodukt:

Satz über die Höhen im Dreieck:

Die drei Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.

Voraussetzung: $\overrightarrow{CS}\overrightarrow{AB} = 0; \quad \overrightarrow{AS}\overrightarrow{BC} = 0;$

Behauptung: $\overrightarrow{BS}\overrightarrow{AC} = 0;$

Begründung der Behauptung: Wenn $\overrightarrow{BS}$ auf $\overrightarrow{AC}$ tatsächlich senkrecht steht, dann ist BS die Höhe des Dreiecks auf B. Das kann aber nur dann der Fall sein, wenn die Höhe auch tatsächlich durch S geht.

17.10.2006

1.103 106. Hausaufgabe

1.103.1 Geometrie-Buch Seite 230, Aufgabe 7

Gib die Gleichung einer Ursprungsgeraden u an, die $g\colon \vec{X} = \left(\begin{smallmatrix}3\\5\\1\end{smallmatrix}\right) + \mu \left(\begin{smallmatrix}2\\1\\3\end{smallmatrix}\right)$ senkrecht schneidet.

$$\left|\vec{X}\right|^2 = (3+2\mu)^2 + (5+\mu)^2 + (1+3\mu)^2 = 35 + 28\mu + 14\mu^2;$$

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} \left|\vec{X}\right|^2 = 28\mu + 28 \stackrel{!}{=} 0; \Leftrightarrow \mu = -1;$$

$$u\colon \vec{X} = \lambda \vec{X}_g(-1) = \lambda \left(\begin{smallmatrix}1\\4\\-2\end{smallmatrix}\right);$$

1.103.2 Geometrie-Buch Seite 230, Aufgabe 8

$$g\colon \vec{X} = \left(\begin{smallmatrix}3\\1\\1\end{smallmatrix}\right) + \mu \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\2\end{smallmatrix}\right); \quad P(1,-1,1);$$

a) Berechne den Fußpunkt F des Lots von g durch P.

$$\left|\overrightarrow{PX}\right|^2 = \left|\left(\begin{smallmatrix}2\\2\\0\end{smallmatrix}\right) + \mu \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\2\end{smallmatrix}\right)\right|^2 = 8 + 4\mu + 5\mu^2;$$

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} \left|\overrightarrow{PX}\right|^2 = 4 + 10\mu \stackrel{!}{=} 0; \Leftrightarrow \mu = -\tfrac{2}{5};$$

$$\vec{F} = \vec{X}_g\left(-\tfrac{2}{5}\right) = \begin{pmatrix}3\\3/5\\1/5\end{pmatrix};$$

b) Gib eine Gleichung der Normalen n von g durch P an.

$$n\colon \vec{X} = \vec{F} + \lambda \overrightarrow{FP} = \begin{pmatrix}3\\3/5\\1/5\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}-2\\-8/5\\4/5\end{pmatrix};$$

c) Berechne den Abstand von P und g.

$$\left|\overrightarrow{PF}\right| = \left|\overrightarrow{PX\left(\tfrac{2}{5}\right)}\right| = \sqrt{8 + 4\left(-\tfrac{2}{5}\right) + 5\left(-\tfrac{2}{5}\right)^2} = \tfrac{6}{\sqrt{5}};$$

d) P' und P sind symmetrisch bezüglich g. Berechne P'.

$$\vec{P'} = \vec{X}_n(-1) = \begin{pmatrix}5\\11/5\\-3/5\end{pmatrix};$$

1.103.3 Geometrie-Buch Seite 230, Aufgabe 10

$g\colon \vec{X} = \mu \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$; $h\colon \vec{X} = \left(\begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix}\right) + \lambda \left(\begin{smallmatrix}5\\5\\-1\end{smallmatrix}\right)$; $P(1,2,3)$;

a) g an P gespiegelt ergibt g'. Gib eine Gleichung von g' an.

$$g'\colon \vec{X} = \vec{X}_g + 2\overrightarrow{X_gP} = \left(\begin{smallmatrix}2\\4\\6\end{smallmatrix}\right) + \mu \left(\begin{smallmatrix}-1\\-1\\-1\end{smallmatrix}\right);$$

b) P an g gespiegelt ergibt P'. Berechne P'.

$$\left|\overrightarrow{PX_g}\right|^2 = 3\mu^2 - 12\mu + 14;$$

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\left|\overrightarrow{PX_g}\right|^2 = 6\mu - 12 \stackrel{!}{=} 0; \Leftrightarrow \mu = 2;$$

$$\vec{P}' = \vec{P} + 2\overrightarrow{PX_g(2)} = \left(\begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix}\right);$$

c) h an g gespiegelt ergibt g'. Gib eine Gleichung von h' an.

$$h'\colon \vec{X} = \left(\begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix}\right) + \sigma \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\7\end{smallmatrix}\right);$$

Möglicher Ansatz: Zwei beliebige feste Punkte spiegeln und dann eine Gerade durch die Bildpunkte legen. P hat man schon in Aufgabe b) an g gespiegelt, also müsste man nur noch einen zweiten Punkt spiegeln.

„so lange gelacht und doch ist es Realität. . . “

„der Mensch hat doch drei Hände“ 19.10.2006

1.104 107. Hausaufgabe

1.104.1 Geometrie-Buch Seite 230, Aufgabe 12

$A(29,-5,-4)$; $B(-3,-27,12)$; $M(16,11,-8)$; $P(4,8,19)$; $Q(1,-19,31)$;

g ist die Gerade durch A und B.

a) Bestimme den Punkt N auf g, der P am nächsten liegt.

$$g\colon \vec{X} = \vec{A} + \lambda\overrightarrow{AB};$$

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left|\overrightarrow{PN}\right|^2 = \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left|\overrightarrow{PX(\lambda)}\right|^2 = \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left|\left(\begin{smallmatrix}25\\-13\\-23\end{smallmatrix}\right) + \lambda\left(\begin{smallmatrix}-32\\-22\\16\end{smallmatrix}\right)\right|^2 =$$

$$= \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left[1764\lambda^2 - 1764\lambda + 1323\right] = 3528\lambda - 1764 \stackrel{!}{=} 0;$$

$\Leftrightarrow \lambda(N) = \frac{1}{2};$

$\Leftrightarrow \vec{N} = \vec{X}_g\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 13 \\ -16 \\ 4 \end{pmatrix};$

b) g ist Tangente einer Kugel um M.

Berechne den Berührpunkt T und den Kugelradius r_b.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left|\overrightarrow{MT}\right|^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left|\overrightarrow{MX(\lambda)}\right|^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left|\begin{pmatrix} 13 \\ -16 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} -32 \\ -22 \\ 16 \end{pmatrix}\right|^2 =$$
$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left[1764\lambda^2 + 441\right] = 3528\lambda \stackrel{!}{=} 0;$$

$\Leftrightarrow \lambda(T) = 0; \quad \vec{T} = \vec{A}$

$\Leftrightarrow r_b = \sqrt{441} = 21;$

c) Berechne Radius r_c und Mittelpunkt M_c der kleinsten aller Kugeln, die durch M gehen und deren Mittelpunkte auf g liegen.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left|\overrightarrow{MM_c}\right|^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left|\overrightarrow{MX(\lambda)}\right|^2 = 3528\lambda \stackrel{!}{=} 0;$$

$\Leftrightarrow \lambda(M_c) = 0; \quad \vec{M}_c = \vec{A};$

$\Leftrightarrow r_c = 21;$

d) Berechne Radius r_d und Mittelpunkt M_d der kleinsten aller Kugeln, die durch M gehen und g berühren. Berechne den Berührpunkt T.

Siehe a).

e) Berechne Radius r_e und Mittelpunkt M_e der kleinsten aller Kugeln, die durch Q gehen und g als Zentrale haben.

Berechne die Schnittpunkte von g und dieser Kugel; was für ein Dreieck bilden der Ursprung und die Schnittpunkte?

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left|\overrightarrow{QM_e}\right|^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left|\overrightarrow{QX(\lambda)}\right|^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left|\begin{pmatrix} 28 \\ 14 \\ -35 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} -32 \\ -22 \\ 16 \end{pmatrix}\right|^2 =$$
$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left[1764\lambda^2 - 3528\lambda + 2205\right] = 3528\lambda - 3528 \stackrel{!}{=} 0;$$

$\Leftrightarrow \lambda = 1; \quad \vec{M}_e = \vec{X}(1) = \begin{pmatrix} -3 \\ -27 \\ 12 \end{pmatrix};$

$\Leftrightarrow r_e = \sqrt{1674 - 3528 + 2205} = \sqrt{441} = 21;$

$g'\colon \vec{X} = \vec{A} + \lambda\overrightarrow{AB}^0;$

Schnittpunkte von g mit dem Kreis ergeben sich durch $\vec{X}_{g'}(\pm r_e)$ zu $S_1 = (-19, -38, 20)$ und $S_2 = (13, -16, 4)$.

Das Dreieck gebildet durch Ursprung und den zwei Schnittpunkten ist rechtwinklig: $\left|\overrightarrow{0S_1}\right|^2 - \left|\overrightarrow{0S_2}\right|^2 = 2205 - 441 = 1764 = \left|\overrightarrow{S_1S_2}\right|^2$;

f) Bestimme eine Gleichung der Normalen n von g durch Q.

$n\colon \vec{X} = \vec{M}_e + \mu\overrightarrow{M_eQ} = \begin{pmatrix} -3 \\ -27 \\ 12 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 19 \end{pmatrix}$;

g) Q an g gespiegelt ergibt Q'. Berechne Q'.

$\vec{Q}' = \vec{X}_n(-1) = \begin{pmatrix} -7 \\ -35 \\ -7 \end{pmatrix}$;

1.104.2 Geometrie-Buch Seite 230, Aufgabe 13

g ist die Gerade durch $A(8, 13, 3)$ und $B(14, 20, -3)$, h ist die Gerade durch $C(10, 19, 12)$ und $D(-8, -2, 30)$.

a) Berechne den Abstand $d(g, h)$ von g und h.

$g\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 8 \\ 13 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}$;

$h\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 10 \\ 19 \\ 12 \end{pmatrix} + \mu' \begin{pmatrix} -18 \\ -21 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 19 \\ 12 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -6 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix}$;

$\overrightarrow{X_gX_h} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -6 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}$;

$\overrightarrow{X_gX_h} \cdot \vec{g} = \overrightarrow{X_gX_h} \cdot \vec{h} = 0$;

$\overrightarrow{X_gX_h} \cdot \vec{g} = (12 - 36\mu - 36\lambda) + (42 - 49\mu - 42\lambda) + (-54 - 36\mu - 36\lambda) = -23\mu - 23\lambda = 0; \Leftrightarrow \mu = -\lambda$;

$\left|\overrightarrow{X_g(\lambda)X_h(-\lambda)}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4 + 36 + 81} = 11$;

b) Bestimme eine Gleichung der Mittelparallelen m von g und h.

$m\colon \vec{X} = \vec{X}_g + \frac{\overrightarrow{X_g(\lambda)X_h(-\lambda)}}{2} = \begin{pmatrix} 9 \\ 16 \\ 7{,}5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}$;

c) g an h gespiegelt ergibt u, und h an g gespiegelt ergibt v.

Bestimme Gleichungen von u und v.

$u\colon \vec{X} = \vec{X}_g + 2\overrightarrow{X_g(\lambda)X_h(-\lambda)} = \begin{pmatrix} 12 \\ 25 \\ 21 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}$;

$v\colon \vec{X} = \vec{X}_h - 2\overrightarrow{X_g(\lambda)X_h(-\lambda)} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -6 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix}$;

d) Wo liegen die Mittelpunkte der Kugeln, die g und h berühren?

$k\colon \vec{X} = \vec{X}_m + \sigma \left(\overrightarrow{X_g(\lambda) X_h(-\lambda)} \times \vec{g} \right) = \left(\begin{smallmatrix} 9 \\ 16 \\ 7{,}5 \end{smallmatrix}\right) + \lambda \left(\begin{smallmatrix} 6 \\ 7 \\ -6 \end{smallmatrix}\right) + \sigma \left(\begin{smallmatrix} -36-63 \\ 54+12 \\ 14-36 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 9 \\ 16 \\ 7{,}5 \end{smallmatrix}\right) + \lambda \left(\begin{smallmatrix} 6 \\ 7 \\ -6 \end{smallmatrix}\right) + \sigma \left(\begin{smallmatrix} -99 \\ 66 \\ -22 \end{smallmatrix}\right);$

e) Wo liegen die Mittelpunkte der kleinstmöglichen Kugeln, die g und h berühren?

Auf m.

1.104.3 Geometrie-Buch Seite 230, Aufgabe 14

$g_a\colon \vec{X} = \left(\begin{smallmatrix} 7 \\ 1 \\ a \end{smallmatrix}\right) + \mu \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right); \quad a \in \mathbb{Z};$

$M(-5,5,5); \quad V(6,18,6); \quad W(-6,12,0);$

a) Beschreibe die Schar g_a, welchen Abstand haben benachbarte Schargeraden?

Welche besondere Lage im Koordinatensystem hat die Mittelparallele von g_7 und g_{-7}?

Die Schar besteht aus unendlich vielen parallelen Geraden.

$\left| \vec{X}_{g_a} - \vec{X}_{g_{a+1}} \right| = \left| \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \right| = 1;$

Mittelparallele von g_7 und g_{-7} ist $g_0\colon \vec{X} = \left(\begin{smallmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + \mu \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, eine Gerade in der x_1–x_2-Ebene.

b) Welche Schargeraden haben vom Ursprung den Abstand 7?

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} \left| \overrightarrow{0X} \right|^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} \left[50 + a^2 + 10\mu + 5\mu^2 \right] = 10 + 10\mu \stackrel{!}{=} 0;$

$\Leftrightarrow \mu = -1;$

$\left| \overrightarrow{0X(-1)} \right| = \sqrt{45 + a^2} \stackrel{!}{=} 7; \Leftrightarrow a = \pm 2;$

c) Welche Schargeraden berühren die Kugeln um M mit Radius 9?

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} \left| \overrightarrow{MX} \right|^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} \left| \left(\begin{smallmatrix} 12 \\ -4 \\ a-5 \end{smallmatrix}\right) + \mu \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \right|^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} \left[185 + a^2 - 10a + 40\mu + 5\mu^2 \right] = 40 + 10\mu \stackrel{!}{=} 0;$

$\Leftrightarrow \mu = -4;$

$\left| \overrightarrow{MX(-4)} \right| = \sqrt{185 + a^2 - 10a - 80} \stackrel{!}{=} 9; \Leftrightarrow a^2 - 10a + 96 = 0;$

$D = 100 - 4 \cdot 1 \cdot 96 < 0; \Leftrightarrow$ keine Schargerade berührt die Kugel um M mit Radius 9.

d) Bezüglich welcher Schargerade sind V und W symmetrisch?

$\vec{V} + \frac{1}{2}\overrightarrow{VW} = \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 3 \end{pmatrix};$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} \left| \vec{X} - \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 3 \end{pmatrix} \right|^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} \left[154 + a^2 - 6a + 70\mu + 5\mu^2 \right] = 70 + 10\mu \stackrel{!}{=} 0;$

$\Leftrightarrow \mu = -7;$

$\left| \vec{X}(-7) - \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 3 \end{pmatrix} \right|^2 = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a-3 \end{pmatrix} \right|^2 = a^2 - 6a + 9 \stackrel{!}{=} 0;$

$\Leftrightarrow a = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2} = 3;$

10.11.2006

1.105 109. Hausaufgabe

1.105.1 Geometrie-Buch Seite 248, Aufgabe 1

Berechne das Volumen V des von $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ aufgespannten Spats:

a) $\vec{u} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix};$

$V = |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})| = |(-4)\left[(-5) \cdot 3\right] + 2 \cdot \left[(-2) \cdot 2 + 2 \cdot 5\right]| = 72;$

b) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix};$

$V = |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})| = |[5 \cdot 1 - 2 \cdot 4] + 2\left[3 \cdot 4 - 4 \cdot 1\right] + 3\left[4 \cdot 2 - 5 \cdot 3\right]| = 8;$

1.105.2 Geometrie-Buch Seite 249, Aufgabe 4

$A(1, 1, 5); \quad B(5, 1, 5); \quad C(2, 5, 5); \quad D(0, 3, 5);$ Spitze $S(4, 1, -1);$
Berechne das Volumen der Pyramide $ABCDS$

a) durch Zerlegen in zwei dreiseitige Pyramiden.

[XXX Mit „dreiseitige Pyramide“ ist eine Pyramide mit einem Dreieck als Grundfläche gemeint.]

b) mit der Formel $V = \frac{1}{3}Gh$.

$V = \frac{1}{3}Gh = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right| \cdot \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AC} \right| \cdot [5 - (-1)] = 48;$

[XXX 22 ist korrekt.]

13.11.2006

1.106 110. Hausaufgabe

1.106.1 Analysis-Buch Seite 256, Aufgabe 5

Entscheide, ob das Integral konvergiert, und berechne gegebenenfalls seinen Wert:

a) $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = [\ln x]_1^\infty = \infty;$

b) $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^\infty = 1;$

c) $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_1^\infty = \frac{1}{2};$

e) $\int\limits_1^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\right]_1^\infty = \infty;$

f) $\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,\mathrm{d}x = [3\sqrt[3]{x}]_1^\infty = \infty;$

g) $\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right]_1^\infty = 3;$

15.11.2006

1.107 111. Hausaufgabe

1.107.1 Analysis-Buch Seite 255, Aufgabe 1

Entscheide, ob das Integral konvergiert und berechne gegebenenfalls seinen Wert.

a) $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\alpha\to 0+} \left[\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\right]_\alpha^1 = \frac{3}{2};$

b) $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\alpha\to 0+} [3\sqrt[3]{x}]_\alpha^1 = 3;$

c) $\int\limits_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\alpha\to 0+} \left[-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right]_\alpha^1 = \infty;$

d) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt[3]{x^4}} \,\mathrm{d}x = 0;$

e) $\int\limits_{-16}^{16} \frac{1}{\sqrt{|x|}} \,\mathrm{d}x = 2 \cdot \int\limits_{0}^{16} \frac{1}{\sqrt{|x|}} \,\mathrm{d}x = 2 \cdot \lim\limits_{\alpha \to 0+} \left[2\sqrt{x}\right]_{\alpha}^{16} = 2 \cdot 8 = 16;$

17.11.2006

1.108 112. Hausaufgabe

1.108.1 Analysis-Buch Seite 255, Aufgabe 1

Entscheide, ob das Integral konvergiert und berechne gegebenenfalls seinen Wert.

g) $\int\limits_{0}^{\pi/2} \underbrace{\frac{1}{\sin^2 x}}_{\frac{1}{\frac{1}{2}(1-\cos 2x)}} \,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\alpha \to 0+} \left[-\frac{1}{\tan x}\right]_{\alpha}^{\pi/2} = \infty;$

h) $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{1}{\cos^2 x} \,\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{1}{\cos^2 x} \,\mathrm{d}x + \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \frac{1}{\cos^2 x} \,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\alpha \to \frac{\pi}{2}-} \tan\alpha + \lim\limits_{\beta \to \frac{\pi}{2}+} -\tan\beta = \infty;$

1.108.2 Analysis-Buch Seite 256, Aufgabe 8

Für welche Werte a konvergiert das Integral:

a) $\int\limits_{1}^{\infty} x^a \,\mathrm{d}x$

Analyse der Definiertheit des Integranden: Für alle $a \in \mathbb{R}$ definiert, da $x > 0$.

Analyse für $a = -1$: $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \infty;$

Analyse für $a \neq -1$: $\int\limits_{1}^{\infty} x^a \,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\alpha \to \infty} \left[\frac{\alpha^{a+1}}{a+1}\right]_{1}^{\alpha} = \begin{cases} \infty & \text{für } a > -1; \\ -\frac{1}{a+1} & \text{für } a < -1; \end{cases}$

b) $\int\limits_{0}^{\infty} x^a \,\mathrm{d}x$

Integrand bei $x = 0$ für $a = 0$ nicht definiert. In diesem Fall divergiert das Integral bestimmt.

$$\int x^a \,\mathrm{d}x = \begin{cases} \ln x + C & \text{für } a = -1; \\ \frac{x^{a+1}}{a+1} + C & \text{sonst}; \end{cases}$$

$$\int\limits_0^\infty x^a \,\mathrm{d}x = \begin{cases} \lim\limits_{\alpha\to\infty} \left[\alpha^a - 0\right] = \infty & \text{für } a > -1; \\ \int\limits_0^1 \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x + \int\limits_1^\infty \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\alpha\to 0+} -\ln\alpha + \lim\limits_{\beta\to\infty} \ln\beta = \infty & \text{für } a = -1; \\ \int\limits_0^1 \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x + \int\limits_1^\infty \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\alpha\to 0+} -\frac{\alpha^{a+1}}{a+1} + \lim\limits_{\beta\to\infty} \frac{\beta^{a1}}{a+1} = \infty & \text{für } a < -1; \end{cases}$$

20.11.2006

1.109 113. Hausaufgabe

1.109.1 Analysis-Buch Seite 256, Aufgabe 15

a) $\int \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \int \sin x \,(-\cos x)' \,\mathrm{d}x = -\sin x \cos x + \int \underbrace{\cos^2 x}_{1-\sin^2 x} \,\mathrm{d}x = -\sin x \cos x + x - \int \sin^2 \,\mathrm{d}x;$

$\Leftrightarrow \int \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x - \sin x \cos x\right);$

$\int\limits_0^\pi \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[x - \sin x \cos x\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2};$

b) $\int\limits_1^e x \ln x \,\mathrm{d}x = \int\limits_1^e \left(\frac{1}{2}x^2\right)' \cdot \ln x \,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2 \cdot \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2}x^2 \,\mathrm{d}x\right]_1^e = \left[\frac{1}{2}x^2 \cdot \ln x - \frac{1}{4}x^2\right]_1^e = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4};$

c) $\int\limits_1^{e^2} \sqrt{x} \ln x \,\mathrm{d}x = \int\limits_1^{e^2} \left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)' \cdot \ln x \,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}x^{3/2} \cdot \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{2}{3}x^{3/2} \,\mathrm{d}x\right]_1^{e^2} = \frac{2}{3}\left[x^{3/2} \cdot \ln x - \frac{2}{3}x^{3/2}\right]_1^{e^2} = \frac{8}{9}e^3 + \frac{4}{9};$

d) $\int\limits_{\sqrt{e}}^e \ln^2 x \,\mathrm{d}x = \int\limits_{\sqrt{e}}^e x' \cdot \ln^2 x \,\mathrm{d}x = \left[x \cdot \ln^2 x - \int x \cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x\right]_{\sqrt{e}}^e = \left[x \cdot \ln^2 x - 2\int x \ln x \,\mathrm{d}x\right]_{\sqrt{e}}^e = \left[x \cdot \ln^2 x - 2\left(x \cdot \ln x - x\right)\right]_{\sqrt{e}}^e = \left[x \cdot \left(\ln^2 x - 2\ln x + 2\right)\right]_{\sqrt{e}}^e = e - \frac{5}{4}\sqrt{e};$

22.11.2006

1.110 114. Hausaufgabe

1.110.1 Analysis-Buch Seite 256, Aufgabe 14a

$\int e^x \sin x \,\mathrm{d}x = e^x \sin x - \int e^x \cos x \,\mathrm{d}x = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \,\mathrm{d}x; \Leftrightarrow$
$\int e^x \sin x \,\mathrm{d}x = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x);$

$\int\limits_0^{\pi/2} e^x \sin x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(e^{\pi/2} + 1\right);$

1.110.2 Analysis-Buch Seite 256, Aufgabe 15

e) $$\int\limits_{-1}^{1} \ln x^2 \,\mathrm{d}x = 2\int\limits_0^1 \ln x^2 \,\mathrm{d}x = 2\int\limits_0^1 x' \cdot \ln x^2 \,\mathrm{d}x = \lim_{\alpha\to 0+} 2\left[x\ln x^2 - \int \underbrace{x \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x}_{2} \,\mathrm{d}x\right]_\alpha^1 =$$
$$\lim_{\alpha\to 0+} 2\left[x\ln x^2 - 2x\right]_\alpha^1 = -4;$$

f) $$\int\limits_1^{\sqrt{2}} x\ln\left(1+x^2\right)\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2}x^2\right)'\ln\left(1+x^2\right)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2\ln\left(1+x^2\right) - \int \underbrace{\frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x}_{\frac{x^3}{1+x^2}} \,\mathrm{d}x\right]_1^{\sqrt{2}} =$$
$$\left[\frac{1}{2}x^2\ln\left(1+x^2\right) - \int x\,\mathrm{d}x - \underbrace{\frac{x}{1+x^2}}_{\frac{(1+x^2)'}{1+x^2}\cdot\frac{1}{2}} \,\mathrm{d}x\right]_1^{\sqrt{2}} = \left[\frac{1}{2}x^2\ln\left(1+x^2\right) - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|\right]_1^{\sqrt{2}} =$$
$$\frac{1}{2}\left[\left(1+x^2\right)\ln\left(1+x^2\right) - x^2\right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\left(3\ln 3 - 2\ln 2 - 1\right);$$

g) $$\int\limits_0^1 x^{-1/2}\ln x\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(2x^{1/2}\right)'\ln x\,\mathrm{d}x = \lim_{\alpha\to 0+}\left[2\sqrt{x}\ln x - \int 2\underbrace{x^{1/2}x^{-1}}_{x^{-1/2}}\,\mathrm{d}x\right]_\alpha^1 = \lim_{\alpha\to 0+}\left[2\sqrt{x}\left(\ln x - 2\right)\right]_\alpha^1 =$$
$$-4;$$

1.110.3 Analysis-Buch Seite 256, Aufgabe 17a

Zeige, dass gilt:

$$\int \sin^n x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{n}(\sin x)^{n-1}\cos x + \frac{n-1}{n}\int(\sin x)^{n-2}\,\mathrm{d}x;$$

$$\left[-\tfrac{1}{n}(\sin x)^{n-1}\cos x+\tfrac{n-1}{n}\int(\sin x)^{n-2}\,\mathrm{d}x\right]'=$$

$$=\ \tfrac{1}{n}\left[(\sin x)^{n-1}\sin x-(n-1)(\sin x)^{n-2}\underbrace{\cos^2 x}_{1-\sin^2 x}+(n-1)(\sin x)^{n-2}\right]=$$

24.11.2006

$$=\ \tfrac{1}{n}\sin^n x\left[1-(n-1)(\sin x)^{-2}\left(1-\sin^2 x-1\right)\right]=$$

$$=\ \tfrac{1}{n}\sin^n x\cdot(1+n-1)=\sin^n x;$$

1.111 115. Hausaufgabe

1.111.1 Analysis-Buch Seite 256, Aufgabe 15h

$$\int_0^\infty x^2e^{-x}\,\mathrm{d}x=\int_0^\infty x^2\left(-e^{-x}\right)'\mathrm{d}x=\lim_{\alpha\to\infty}\left[-x^2e^{-x}-\int 2x\left(-e^{-x}\right)\mathrm{d}x\right]_0^\alpha=$$
$$\lim_{\alpha\to\infty}\left[-x^2e^{-x}+2\int x\left(-e^{-x}\right)'\mathrm{d}x\right]_0^\alpha=\lim_{\alpha\to\infty}\left[-x^2e^{-x}+2\left(-xe^{-x}-\int -e^{-x}\,\mathrm{d}x\right)\right]_0^\alpha=$$
$$\lim_{\alpha\to\infty}\left[e^{-x}\left(-x^2-2x-2\right)\right]_0^\alpha=2;$$

1.111.2 Analysis-Buch Seite 256, Aufgabe 16

a) Für $n\neq 1$:

$$\int_1^a\tfrac{\ln x}{x^n}\mathrm{d}x=\int_1^a\left(\tfrac{x^{1-n}}{1-n}\right)'\ln x\,\mathrm{d}x=\left[\tfrac{x^{1-n}}{1-n}\ln x-\int\underbrace{\frac{x^{1-n}}{1-n}\cdot\frac{1}{x}}_{\frac{x^{-n}}{1-n}}\mathrm{d}x\right]_1^a=\left[\tfrac{x^{1-n}}{1-n}\left(\ln x-\tfrac{1}{1-n}\right)\right]_1^a=$$
$$\tfrac{a^{1-n}}{1-n}\left(\ln a-\tfrac{1}{1-n}\right)+\left(\tfrac{1}{1-n}\right)^2;$$

Für $n=1$: $\int\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x=\int I(\ln x)(\ln x)'\,\mathrm{d}x=\int I(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\ln^2 x$ mit $I(t)=t$;

c) $\int_0^a x^n\ln x\,\mathrm{d}x=\left[\int\frac{\ln x}{x^{-n}}\mathrm{d}x\right]_0^a=\left[\frac{x^{1+n}}{1+n}\left(\ln x-\frac{1}{1+n}\right)\right]_0^a=\frac{a^{1+n}}{1+n}\left(\ln a-\frac{1}{1+n}\right);$

Speziell für $a=1$:

$\int_0^1 x^n\ln x\,\mathrm{d}x=-\left(\frac{1}{1+n}\right)^2;$

27.11.2006

1.112 116. Hausaufgabe

1.112.1 Analysis-Buch Seite 257, Aufgabe 19

Berechne:

a) $\int\limits_0^1 2x\left(2+x^2\right)^2\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(2+x^2\right)^2\left(2+x^2\right)'\mathrm{d}x = \left[\int t^2\,\mathrm{d}t\right]_0^1 = \left[\frac{1}{3}\left(2+x^2\right)^3\right]_0^1 = \frac{19}{3}$;

b) $\int\limits_0^\pi \sin x\cos^3 x\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^\pi \cos^3 x\cdot(\cos x)'\cdot(-1)\,\mathrm{d}x = \left[-\int t^3\,\mathrm{d}t\right]_0^\pi = \left[-\frac{1}{4}\cos^4 x\right]_0^\pi = 0$;

c) $\int\limits_{-1}^1 xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^1 e^{-x^2}\cdot\underbrace{\left(-x^2\right)'}_{-2x}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}\int e^t\,\mathrm{d}t\right]_{-1}^1 = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_{-1}^1 = 0$;

d) $\int\limits_1^e \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x = \int\limits_1^e I(\ln x)\cdot\underbrace{(\ln x)'}_{\frac{1}{x}}\mathrm{d}x = \left[\int\underbrace{I(t)}_{t}\,\mathrm{d}t\right]_1^e = \left[\frac{1}{2}\ln^2 x\right]_1^e = \frac{1}{2}$ mit $I(t)=t$;

28.11.2006

1.113 117. Hausaufgabe

1.113.1 Analysis-Buch Seite 257, Aufgabe 19

Berechne:

f) $\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^3}}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\int\frac{1}{\sqrt{1-x^3}}\cdot\left(1-x^3\right)'\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\int\frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = -\frac{2}{3}\sqrt{1-x^3}+C$;

g) $\int\frac{\tan^3 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int\tan^3 x\cdot(\tan x)'\,\mathrm{d}x = \int t^3\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\tan^4 x + C$;

h) $\int\frac{x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$

29.11.2006

1.114 118. Hausaufgabe

1.114.1 Analysis-Buch Seite 257, Aufgabe 22

Vertrackte Substitutionen: 04.12.2006

c) $$\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos t\,\underbrace{\sqrt{1-\cos^2 t}}_{\sin t}} \cdot (\cos t)'\,\mathrm{d}t = \int -\frac{1}{\cos t}\,\mathrm{d}t = -$$
$$\int \frac{1+\tan^2 t/2}{1-\tan^2 t/2}\,\mathrm{d}t = -\int \frac{1+z^2}{1-z^2} \cdot \underbrace{(2\arctan z)'}_{\frac{2}{x^2+1}}\,\mathrm{d}z = -2\int \frac{1}{1-z^2}\,\mathrm{d}z =$$
$$-\int \frac{1}{1+z} + \frac{1}{1-z}\,\mathrm{d}z + C = -[\ln|1+z| - \ln|1-z|] + C = -\ln\left|\frac{1+z}{1-z}\right| +$$
$$C = -\ln\left|\frac{1+\tan t/2}{1-\tan t/2}\right| + C = -\ln\left|\frac{1+\tan\left(\frac{1}{2}\arccos x\right)}{1-\tan\left(\frac{1}{2}\arccos x\right)}\right| + C;$$

Substitutionen:

$x = \cos t; \Leftrightarrow t = \arccos x;$

$t = 2\arctan z; \Leftrightarrow z = \tan t/2;$ 29.11.2006

d) $\int \frac{1}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x$

1.114.2 Selbstgestellte Aufgabe

a) $\int \frac{\ln^4 x}{x}\,\mathrm{d}x = \int \ln^4 x \cdot (\ln x)'\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\ln^5 x + C;$

b) $\int \frac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int \frac{\sin u}{u} \cdot (u^2)'\,\mathrm{d}u = 2\int \sin u\,\mathrm{d}u = -2\cos u = -2\cos\sqrt{t} + C;$

02.12.2006

„ich schau´ dann recht grimmig, weil damit zerstör´ ich ihr Feindbild nocht. . . das nennt man dann »Rücksicht«“ 04.12.2006

1.115 119. Hausaufgabe

1.115.1 Analysis-Buch Seite 258, Aufgabe 32

$f(x) = \ln(x^2+4)\,;$

a) Diskutiere f und zeichne G_f.

$f(x) \stackrel{!}{=} 0$; $\to$ keine Nullstellen

$f(-x) = f(x)$; $\to$ Symmetrie zur y-Achse

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$;

$f'(x) = \frac{2x}{x^2+4} \stackrel{!}{=} 0$; $\to$ TIP bei $(0, \ln 4)$;

$f''(x) = \frac{-2x^2+8}{(x^2+4)^2} = -2 \cdot \frac{(x-2)(x+2)}{(x^2+4)^2} \stackrel{!}{=} 0$; $\to$ WEP bei $(\pm 2, \ln 8)$;

b) Berechne den Inhalt der Fläche A zwischen G_f und der Verbindungsgeraden seiner Wendepunkte. Wie verhält sich A zur Fläche jenes Rechtecks, das der Fläche A umschrieben ist?

Wie verhält sich A zur Fläche des umbeschriebenen gleichschenkligen Dreiecks, dessen Schenkel auf den Wendetangenten liegen?

$$\int \ln(x^2+4) \cdot x' \,\mathrm{d}x = x\ln(x^2+4) - \int \underbrace{\frac{1}{x^2+4} \cdot 2x \cdot x}_{\frac{2x^2}{x^2+4}} \,\mathrm{d}x =$$

$$= x\ln(x^2+4) - \int 2\,\mathrm{d}x + \int \underbrace{\frac{8}{x^2+4}}_{\frac{2}{1+(x/2)^2}} \,\mathrm{d}x =$$

$$= x\ln(x^2+4) - 2x + 4\int \frac{1/2}{1+(x/2)^2} \,\mathrm{d}x =$$

$$= x\ln(x^2+4) - 2x + 4\arctan\frac{x}{2};$$

$\int \ln 8 - \ln(x^2+4) \,\mathrm{d}x = 8 - 2\pi$;

Rechteckinhalt: $[2-(-2)] \cdot (\ln 8 - \ln 4) = \ln 16$;

Wendetangentenschnittpunkt: $f'(\pm 2) = \pm\frac{1}{2}$; $\to$ Schnittpunkt bei $\left(0, \ln 8 - 2 \cdot \frac{1}{2}\right) = (0, \ln 8 - 1)$;

Dreiecksinhalt: $\frac{1}{2} \cdot [2-(-2)] \cdot [\ln 8 - (\ln 8 - 1)] = 2$;

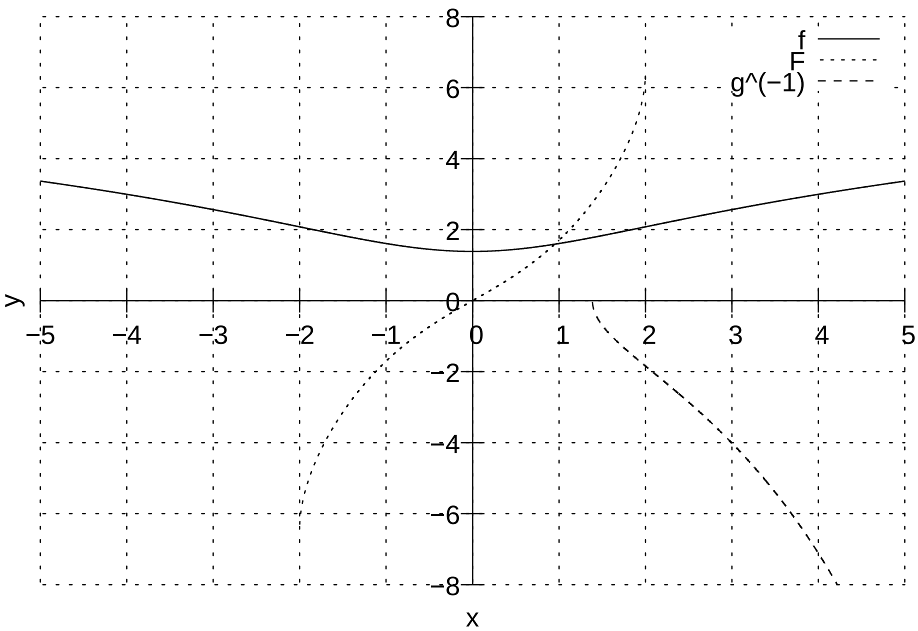
c) g sei eine umkehrbare Einschränkung von f mit möglichst großer Definitionsmenge. G_g enthalte den Punkt $(-1, ?)$.

Bestimme g^{-1} und stelle A durch ein Integral mit dem Integranden $g^{-1}(x)$ dar. Substituiere darin $x = \ln t^2$.

$g(x) = \ln(x^2+4)\,; \quad D_g = \mathbb{R}_0^-; \quad W_g = [\ln 4, \infty[\,;$

$g(x) = y = \ln(x^2+4)\,; \Leftrightarrow x = -\sqrt{e^y - 4} = g^{-1}(y)$;

Inhalt von A, dargestellt über $g^{-1}(x)$: $-2\int\limits_{f(0)}^{f(2)} g^{-1}(x)\,\mathrm{d}x = 2\int\limits_{f(0)}^{f(2)} \sqrt{e^x - 4}\,\mathrm{d}x =$
$2\int\limits_{t(f(0))}^{t(f(2))} \sqrt{e^{\ln t^2} - 4}\cdot(\ln t^2)'\,\mathrm{d}t = 2\int\limits_{t(f(0))}^{t(f(2))} \sqrt{t^2 - 4}\cdot\frac{1}{t^2}\cdot 2t\,\mathrm{d}t = 4\int\limits_{t(f(0))}^{t(f(2))} \frac{\sqrt{t^2-4}}{t}\,\mathrm{d}t$
mit $t(x) = \sqrt{e^x}$;



04.12.2006

1.116 120. Hausaufgabe

1.116.1 Analysis-Buch Seite 258, Aufgabe 33

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$;

a) Bestimme die maximale Definitionsmenge.

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{2-x}}$; $\to D_f =]0,2[$;

b) Verschiebe G_f so, dass der verschobene Graph G_g symmetrisch zur y-Achse ist. Bestimme $g(x)$.

$g(x) = f(x+1) = \frac{1}{\sqrt{x+1}\sqrt{2-x-1}} = \frac{1}{\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}}$;

Kontrolle: $g(-x) = g(x)$;

c) Bestimme die Wertemenge von g und damit von f und schließe daraus auf Ort und Art des Extrempunkts von G_f.

$g(x) = y = \frac{1}{\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}}; \rightarrow$

$|x| = \sqrt{\frac{y^2-1}{y}} = \sqrt{1 - \frac{1}{y^2}}; \rightarrow$

$1 - \frac{1}{y^2} \geq 0; \Leftrightarrow |y| \geq 1; \rightarrow$

$D_{g^{-1}} = W_g = W_f = [1, \infty[\,;$

$\rightarrow$ TIP bei $(0, 1)$;

d) Begründe: Eine Stammfunktion F von f hat kein Extremum.

$f(x) > 0$ für alle $x \in D_f \rightarrow F' = f$ wechselt nie das Vorzeichen.

e) Gib die Monotoniebereiche von f an. Was folgt daraus für den Verlauf von G_F einer beliebigen Stammfunktion F von f?

Was tut sich in G_f bei der Abszisse des Extrempunkts von G_f?

$f'(x) = -\frac{1}{2x-x^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x-x^2}} \cdot (2-2x) = \frac{x-1}{\sqrt{(2x-x^2)^3}} = \frac{x-1}{\sqrt{[-x(x-2)]^3}};$

VZW von $f'(x)$ bei $x = 1$ von $-$ nach $+$ $\rightarrow$ Bestätigung der Vermutung über die Extrempunktsart

Für eine Stammfunktion F von f folgt daraus, dass F an $x = 1$ einen Wendepunkt hat.

f) Zeichne G_f und G_F so, dass G_F den Punkt $(1, 0)$ enthält.

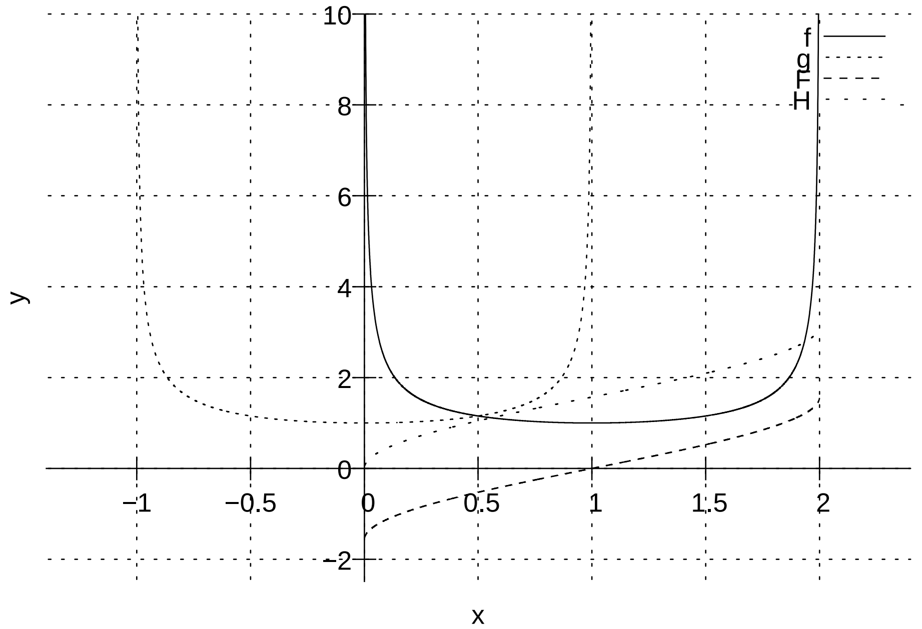
$F(a) = \int\limits_1^a \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\,\mathrm{d}x = \left[\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cdot (1+t)'\,\mathrm{d}t\right]_1^a = [\arcsin t]_1^a = [\arcsin(x-1)]_1^a = \arcsin(a-1)\,;$

g) Berechne den Term $F(x)$ der Funktion aus Aufgabe f).

h) $H(x) := \int\limits_0^x \frac{1}{\sqrt{2t-t^2}}\,\mathrm{d}t; \quad D_H = D_{\text{max}}$. Wie hängen F und H zusammen?

$H' = F' = f;$

$H(x) = F(x) + \int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{2t-t^2}}\,\mathrm{d}t = F(x) + \frac{\pi}{2};$



11.12.2006

1.117 122. Hausaufgabe

1.117.1 Geometrie-Buch Seite 260, Aufgabe 16

$g\colon \vec{X} = \begin{pmatrix}2\\9\\6\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}8\\1\\4\end{pmatrix};\quad P(14,6,3);$

a) g ist Tangente einer Kugel um P.

Berechne Berührpunkt A und Kugelradius r_{a}.

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\left|\overrightarrow{PX(\mu)}\right|^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\left|\begin{pmatrix}-12\\3\\3\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}8\\1\\4\end{pmatrix}\right|^2 =$

$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\left[144 - 2\cdot 96\mu + 64\mu^2 + 9 + 2\cdot 3\mu + \mu^2 + 9 + 2\cdot 12\mu + 16\mu^2\right] =$

$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\left[162 - 162\mu + 81\mu^2\right] = -162 + 162\mu \stackrel{!}{=} 0;$

Alternativ: $E\colon \vec{g}\cdot\left(\vec{X} - \vec{P}\right) = 0; \rightarrow E\cap g = \{A\};$

$\Leftrightarrow \mu = 1;$

$\vec{A} = \vec{X}(1) = \begin{pmatrix}10\\10\\10\end{pmatrix};$

$r_{\mathrm{a}} = \sqrt{162 - 162 + 81} = 9;$

b) Auf g liegt der Mittelpunkt B der kleinsten Kugel durch P. Berechne B und den Kugelradius r_b und die Schnittpunkte S von Kugel und Gerade.

$B = A; \quad r_\mathrm{b} = r_\mathrm{a};$

$\vec{g}^0 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}8\\1\\4\end{pmatrix};$

$\vec{S}_1 = \vec{B} + r_\mathrm{b}\vec{g}^0 = \begin{pmatrix}18\\11\\14\end{pmatrix}; \quad \vec{S}_2 = \vec{B} - r_\mathrm{b}\vec{g}^0 = \begin{pmatrix}2\\9\\6\end{pmatrix};$

c) Berechne Radius r_c und Mittelpunkt C der kleinsten Kugel, die durch P geht und g berührt.

$\vec{C} = \frac{\vec{A}+\vec{B}}{2}; \quad r_\mathrm{c} = \frac{r_\mathrm{a}}{2};$

1.117.2 Geometrie-Buch Seite 270, Aufgabe 1

Gib die HESSEform an.

a) NF: $7x_1 - 2x_2 + 26x_3 + 54 = 0;$

HNF: $-\frac{1}{27}(7x_1 - 2x_2 + 26x_3 + 54) = 0;$

b) NF: $6x_1 + 8x_3 = -50;$

HNF: $-\frac{1}{10}(6x_1 + 8x_3 + 50) = 0;$

c) NF: $15x_1 + 6x_2 - 10x_3 = 0;$

HNF: $\pm\frac{1}{19}(15x_1 + 6x_2 - 10x_3) = 0;$

d) NF: $3x_3 = 3;$

HNF: $\frac{3x_3-3}{3} = x_3 - 1 = 0;$

e) NF: $\frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 = 1;$

HNF: $\frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 - 1 = 0;$

f) NF: $x_1 = 0;$

HNF: $\pm x_1 = 0;$

12.12.2006

1.118 123. Hausaufgabe

1.118.1 Geometrie-Buch Seite 270, Aufgabe 2

Gib die HESSEform der Ebene A an, die durch $A(1,1,5)$, $B(9,1,1)$ und $C(11,4,-1)$ geht.

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{a^2+b^2+c^2} = a^2+b^2+c^2 = 1; \\ n_0 > 0; \\ \begin{array}{rcrcrcrcl} a & + & b & + & 5c & - & n_0 & = & 0; \\ 9a & + & b & + & c & - & n_0 & = & 0; \\ 11a & + & 4b & - & c & - & n_0 & = & 0; \end{array} \end{array}\right\} \Rightarrow (a,b,c,n_0) = \left(\tfrac{3}{7},\tfrac{2}{7},\tfrac{6}{7},5\right);$$

HNF: $\frac{3}{7}x_1 + \frac{2}{7}x_2 + \frac{6}{7}x_3 - 5 = 0;$

1.118.2 Geometrie-Buch Seite 270, Aufgabe 3

Welchen Abstand haben der Ursprung, $A(12,2,-2)$, $B(1,0,-2)$ und $C(-9,1,2)$ von der Ebene $E\colon x_1 + 8x_2 - 4x_3 = 9$?

HNF von E: $\frac{1}{9}\left[x_1 + 8x_2 - 4x_3 - 9\right] = 0;$

$d(O,E) = |HT(O)| = 1;$

$d(A,E) = |HT(A)| = 3;$

$d(B,E) = |HT(B)| = 0;$

$d(C,E) = |HT(C)| = 2;$ 13.12.2006

1.119 124. Hausaufgabe

1.119.1 Geometrie-Buch Seite 271, Aufgabe 15

Die Punkte $P(13,-6,6)$ und P' seien symmetrisch bezüglich der Ebene $E\colon 7x_1 - 4x_2 + 4x_3 - 7 = 0$. Berechne P'.

HNF von E: $HT_E(X) = \frac{1}{9}\left(7x_1 - 4x_2 + 4x_3 - 7\right) = 0;$

$d(P,E) = |HT_E(P)| = \left|\frac{44}{3}\right|;$

$\vec{P}' = \vec{P} - 2\vec{n}^0 \cdot d(P,E) = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} -265 \\ 190 \\ -190 \end{pmatrix};$

1.119.2 Geometrie-Buch Seite 284, Aufgabe 1

K sei Kugel um $M(3,6,2)$ mit Radius 7.

Welche der folgenden Punkte liegen in, auf oder außerhalb der Kugel?

$A(5,9,6); \quad d(A,K) = 7;$
$\rightarrow A$ liegt auf der Kugel

$B(-1,0,0); \quad d(B,K) = 2\sqrt{14};$
$\rightarrow B$ liegt außerhalb der Kugel

$C(0,0,0); \quad d(C,K) = 7;$
$\rightarrow C$ liegt auf der Kugel

$D(1,1,1); \quad d(D,K) = \sqrt{30};$
$\rightarrow D$ liegt innerhalb der Kugel

$E(3,6,2); \quad d(E,K) = 0;$
$\rightarrow E$ liegt innerhalb der Kugel

$F(3,6,-5); \quad d(F,K) = 7;$
$\rightarrow F$ liegt auf der Kugel

$G(0,0,4); \quad d(G,K) = 7;$
$\rightarrow G$ liegt auf der Kugel

1.119.3 Geometrie-Buch Seite 284, Aufgabe 2

Stelle die Gleichung der Kugel um den Ursprung auf, die

a) den Radius $\sqrt{17}$ hat.

$$\left|\vec{X}\right| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \sqrt{17};$$

b) durch $P(3,4,-12)$ geht.

$$d(O,P) = 13;$$

$$\left|\vec{X}\right| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = 13;$$

c) die Ebene $E\colon 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 49$ berührt.

$$d(O,E) = \left|HT_E(O)\right| = 7;$$

$$\left|\vec{X}\right| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = 7;$$

d) die Gerade durch $P(11, 0, 11)$ und $Q(20, -6, 13)$ berührt.

$g\colon \vec{X} = \vec{P} + \lambda\overrightarrow{PQ} = \left(\begin{smallmatrix}11\\0\\1\end{smallmatrix}\right) + \lambda\left(\begin{smallmatrix}9\\-6\\2\end{smallmatrix}\right);$

$\overrightarrow{OX(\lambda)} \cdot \overrightarrow{PQ} = \vec{X}(\lambda) \cdot \left(\begin{smallmatrix}9\\-6\\2\end{smallmatrix}\right) = 101 + 121\lambda \stackrel{!}{=} 0; \Leftrightarrow \lambda = -\frac{101}{121};$

$\vec{F} = \vec{X}(\lambda) = \frac{1}{121}\left(\begin{smallmatrix}422\\606\\-81\end{smallmatrix}\right);$

$d(O, F) = \frac{1}{11}\sqrt{4561};$

$\left|\vec{X}\right| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \frac{1}{11}\sqrt{4561};$

20.12.2006

1.120 125. Hausaufgabe

1.120.1 Analysis-Buch Seite 172, Aufgabe 23

Gegeben ist die Funktion f_k mit $f_k(x) = \frac{x^2-k^2}{kx}$, wobei $k > 0$ ist.

G_{f_k} ist der Graph von f_k.

a) Bestimme den maximalen Definitionsbereich und untersuche f_k auf Symmetrieeigenschaften, Nullstellen, Extrema, Wendepunkte und Asymptoten.

- Maximaler Definitionsbereich:
  $kx \neq 0; \Leftrightarrow x \neq 0$, da $k > 0;$
  $\rightarrow D_{f_k} = \mathbb{R} \setminus \{0\};$
- Symmetrieeigenschaften:
  $f(-x) = -\frac{x^2-k^2}{kx} = -f_k(x);$
  $\rightarrow$ Punktsymmetrie zum Ursprung
- Nullstellen:
  $f_k(x) = \frac{x^2-k^2}{kx} \stackrel{?}{=} 0; \Leftrightarrow x^2 - k^2 \stackrel{?}{=} 0; \Leftrightarrow |x| = |k| = k;$
  $\rightarrow$ Nullstellen: $-k$, k
- Extrema:
  $f_k'(x) = \frac{kx\cdot 2x - \left(x^2-k^2\right)\cdot k}{(kx)^2} = \frac{x^2+k^2}{kx^2};$
  GERIGKmethode für $f_k'(x)$:

```
        0
--------|------->
```

```
----------------- x^2 + k^2
--------0-------- k x^2
    +  [0]  +
```

→ Keine Extrema

- Wendepunkte:
  Keine, aber Wechsel des Krümmungsverhalten bei $x = 0$, da f_k' bei $x = 0$ ein Extremum hat.
- Asymptoten:
  $x = 0$; (VZW an der Polstelle von $-$ nach $+$ bei $x = 0$)
  $y = \frac{x}{k}$; (Beweis: $f_k(x) = \frac{x^2-k^2}{kx} = \frac{x}{k} - \frac{k}{x}$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_k(x) - \frac{x}{k} = 0$;)

b) Zeichne den zu $k = 3$ gehörigen Graphen G_{f_3}.

c) Für welche Werte von m hat die Gerade $y = mx$ mit G_{f_k} keine Punkte gemeinsam?

$y = mx \stackrel{?}{=} \frac{x^2-k^2}{kx} = f_k(x)$; $\Leftrightarrow$

$kmx^2 \stackrel{?}{=} x^2 - k^2$; $\quad x^2 \stackrel{?}{=} -\frac{k^2}{km-1}$;

RHS muss positiv sein: $-\frac{k^2}{km-1} \stackrel{?}{\geq} 0$; $\Leftrightarrow$ $\frac{1}{km-1} \leq 0$; $\Leftrightarrow$ $km \leq 1$;

Außerdem: $km - 1 \neq 0$; $\Leftrightarrow$ $km \neq 1$;

Also: $km < 1$; $\Leftrightarrow$ $m < \frac{1}{k}$;

Die Gerade $y = mx$ hat für $m \geq \frac{1}{k}$ keine Punkte mit G_{f_k} gemeinsam.

d) Bestimme ohne Berechnung des Integrals die Abszisse des Extremums der Funktion F_k mit

$F_k(x) = \int\limits_1^x f_k(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_1^x \frac{t^2-k^2}{kt}\,\mathrm{d}t$;

Von welcher Art ist dieses Extremum?

In welchem Bereich ist F_k definiert?

GERIGKmethode für $f_k(x) = \frac{x^2-k^2}{kx} = \frac{(x-k)(x+k)}{kx}$:

```
     -k     0     k
-----|-----|-----|---->

- - - - - - - - -0----> x - k
- - -0----------------> x + k
- - - - - -0----------> k x

  -  0  + [0] -  0  +
```

$D_{F_k} = \mathbb{R}^+$; (da an der Stelle 0 der Integrand unendlich wird)

$\rightarrow$ Bei $x = k$ einziges Extremum (ein Tiefpunkt).

e) Der Graph G_h einer ganzrationalen Funktion h dritten Grades ist punktsymmetrisch zum Ursprung und berührt G_{f_3} in den Nullstellen von f_3.

Ermittle den Funktionsterm $h(x)$ und die Extrema von h.

$h(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d;$

$h(-x) = -ax^3 + bx^2 - cx + d \stackrel{!}{=} -ax^3 - bx^2 - cx - d = -h(x); \Leftrightarrow bx^2 + d = 0; \Leftrightarrow d = -bx^2;$

$h(\pm 3) = a\,(\pm 3)^3 + c\,(\pm 3) = \pm 27a \pm 3c = \stackrel{!}{=} 0; \Leftrightarrow c = -9a;$

$h(x) = ax^3 - 9ax; \quad h'(x) = 3ax^2 - 9a;$

$h'(\pm 3) = 27a - 9a = 18a \stackrel{!}{=} f_3'(\pm 3) = \frac{2}{3}; \Leftrightarrow a = \frac{1}{27};$

$\rightarrow h(x) = \frac{1}{27}\left(x^3 - 9x\right);$

GERIGKmethode für $h'(x) = \frac{1}{9}\left(x^2 - 3\right) = \frac{1}{9}\left(x + \sqrt{3}\right)\left(x - \sqrt{3}\right)$:

```
-sqrt(3)     0     sqrt(3)
-------|-----|-----|------>

-------------------------- 1/9
- - - -0------------------ x + sqrt(3)
- - - - - - - - - -0------- x - sqrt(3)

   +   0     -     0   +
```

$\rightarrow$ HOP bei $\left(-\sqrt{3}, \frac{2}{9}\sqrt{3}\right)$;

$\rightarrow$ TIP bei $\left(\sqrt{3}, -\frac{2}{9}\sqrt{3}\right)$;

f) Zeichne G_h in die Zeichnung von Teilaufgabe b) ein.

g) Welche Fläche schließt G_h mit der positiven x-Achse ein?

Nullstellen von h: -3, 0, 3

Fläche: $\{(x, y) \mid x \in [0, 3] \wedge h(x) \leq y \leq 0\};$

Flächeninhalt: $\left|\int\limits_0^3 |h(x)|\;\mathrm{d}x\right| = \left|-\frac{1}{27}\int\limits_0^3 x^3 - 9x\,\mathrm{d}x\right| = \left|-\frac{1}{27}\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{9}{2}x^2\right]_0^3\right| = \left|-\frac{1}{27}\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{9}{2}x^2\right]_0^3\right| = \frac{3}{4};$

h) Die Funktion h_1 sei gegeben durch

$$h_1(x) = \begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{3}{x} & \text{für } |x| \geq 3; \\ \frac{1}{27}\left(x^3 - 9x\right) & \text{für } |x| < 3; \end{cases}$$

Ihr Graph ist G_{h_1}.

Kennzeichne G_{h_1} in der Zeichnung der Teilaufgabe b) mit Farbe. Wie oft ist h_1 bei $x = 3$ differenzierbar? (Begründung!)

Stetigkeit von h_1 an der Stelle 3: $\lim\limits_{x \to 3-} h_1(x) = \lim\limits_{x \to 3+} h_1(x) = h_1(3) = 0$;

Provisorisch: $h_1'(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} + \frac{3}{x^2} & \text{für } |x| \geq 3; \\ \frac{1}{27}\left(3x^2 - 9\right) & \text{für } |x| < 3; \end{cases}$

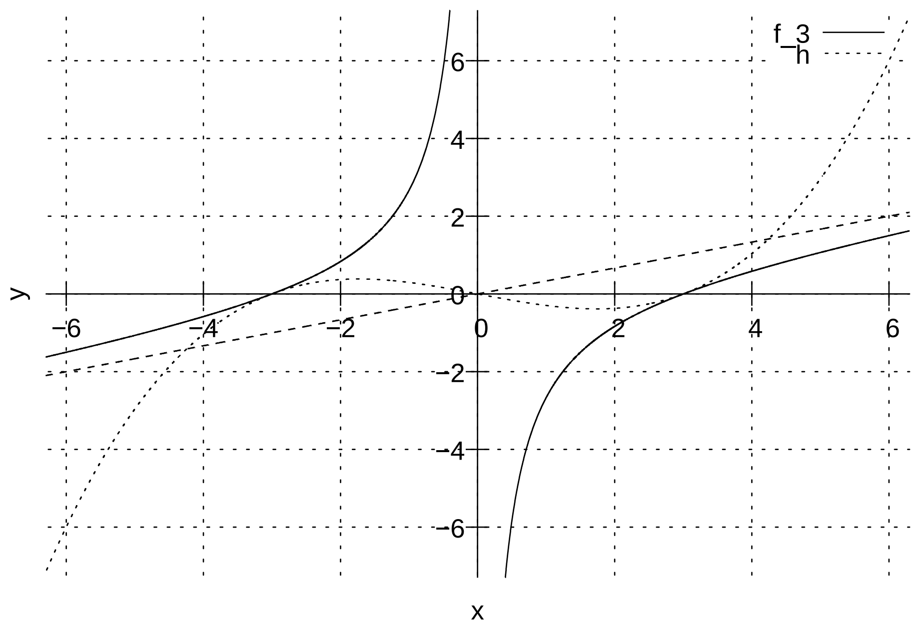
$\lim\limits_{x \to 3-} h_1'(x) = \frac{2}{3} = \lim\limits_{x \to 3+} h_1'(x)$;

$\to$ Provisorisches h_1' ist in der Tat die Ableitungsfunktion von h_1.

Provisorisch: $h_1''(x) = \begin{cases} -\frac{6}{x^3} & \text{für } |x| \geq 3; \\ \frac{2}{9}x & \text{für } |x| < 3; \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to 3-} h_1''(x) = \frac{2}{3} \neq -\frac{2}{9} = \lim\limits_{x \to 3+} h_1''(x)$;

$\to$ h_1 ist nicht zweimal an der Stelle $x = 3$ differenzierbar; das provisorisch aufgestellte h_1'' ist nicht die Ableitungsfunktion von h_1'.



1.120.2 Analysis-Buch Seite 172, Aufgabe 24

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{2x-4}{1-x}$; ihr Graph sei mit G_f bezeichnet.

a) Bestimme die maximale Definitionsmenge D_f von f und untersuche G_f auf Schnittpunkte mit dem Koordinatenachsen.

$1 - x \neq 0; \Leftrightarrow x \neq 1;$

$\rightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\};$

$f(0) = -4;$

$f(x) = \frac{2x-4}{1-x} \stackrel{?}{=} 0; \Leftrightarrow 2x - 4 \stackrel{?}{=} 0; \Leftrightarrow x = 2; \quad f(2) = 0;$

b) Untersuche das Verhalten von $f(x)$ für $x \rightarrow \pm\infty$ und für $x \rightarrow 1$.

$f(x) = \frac{2x-4}{1-x} = -2 - \frac{2}{1-x};$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = -2;$

$\lim\limits_{x \to 1\pm} f(x) = \pm\infty;$

c) Welches Monotonieverhalten zeigt die Funktion f? Hat G_f Extrempunkte? Begründe deine Antwort.

$f'(x) = -\frac{2}{(1-x)^2} < 0$ für alle $x \in D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{1\};$

$\rightarrow f$ ist auf $]-\infty, 1[$ und $]1, \infty[$ streng monoton fallend. (XXX auf ganz D_f smf? Oder mit 1 jeweils eingeschlossen? Oder nur bei einem eingeschlossen?)

GERIGKmethode von $f'(x)$:

```
         1
--------|------>

--------0- - - - 1 - x
--------0- - - - 1 - x

    +   0   +
```

$\rightarrow f$ hat keine Extrempunkte. (Aber eine Wendestelle bei $x = 1$, da f' bei $x = 1$ ein Extremum hat.)

(XXX ist es richtig, zu sagen, bei $x = 1$ liege eine Wendestelle, aber kein Wendepunkt vor?)

d) Zeichne nun G_f.

e) Begründe, weshalb f umkehrbar ist. Gib die Funktionsgleichung $y = f^{-1}(x)$ für die Umkehrfunktion f^{-1} von f sowie den Definitions- und den Wertebereich von f^{-1} an.

f ist umkehrbar, weil es bei beiden Ästen streng monoton ist und weil sich die Äste nicht „überlappen"; f ist injektiv.

$f(y) = \frac{2y-4}{1-y}$; $\Leftrightarrow$ $f(y) - yf(y) = 2y - 4$; $\Leftrightarrow$ $y = \frac{-4-f(y)}{-f(y)-2} = \frac{f(y)+4}{f(y)+2} = f^{-1}(f(y))$;

$f(y) + 2 \neq 0$; $\Leftrightarrow$ $f(y) \neq -2$;

$D_{f^{-1}} = W_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$; $\quad W_{f^{-1}} = D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$;

(XXX wieso ist -2 nicht 1, gespiegelt an $y = x$?)

f) Berechne die Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen G_f und $G_{f^{-1}}$.

($G_{f^{-1}}$ ist der Graph von $f^{-1}\colon x \mapsto y$)

$f(x) = \frac{2x-4}{1-x} \stackrel{?}{=} \frac{x+4}{x+2} = f^{-1}(x)$; $\Leftrightarrow$

$(2x-4)(x+2) = 2x^2+4x-4x-8 \stackrel{?}{=} x-x^2+4-4x = (x+4)(1-x)$; $\Leftrightarrow$

$3x^2 + 3x - 12 \stackrel{?}{=} 0$;

$x_{1,2} = \frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot3\cdot(-12)}}{2\cdot3} = \frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$;

$y_1 \approx 1{,}56$; $\quad y_2 \approx -2{,}56$;

g) Zeige, dass die Funktion $F\colon x \mapsto \ln\left[(1-x)^2\right] - 2x$ mit $D_F = D_f$ eine Stammfunktion von f ist.

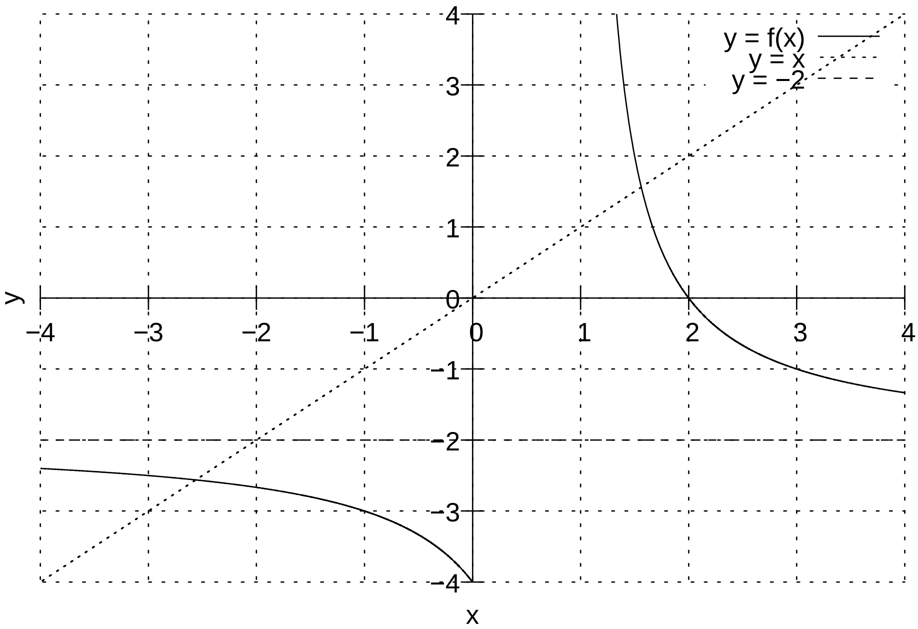
$F'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \cdot 2\,(1-x) \cdot (-1) - 2 = -\frac{2}{1-x} - 2 = f(x)$;

h) Bestimme den Flächeninhalt der Figur, die vom Graphen G_f, von der Geraden $y = x$ sowie von den beiden Geraden $y = -2$ und $x = 0$ begrenzt wird, auf zwei Dezimalstellen genau.

Schnittpunkte vom Graphen von $y = x$ und $f(x)$ = Schnittpunkte von G_f und $G_{f^{-1}}$.

$x_1 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$;

$\frac{1}{2}\left[2 + (2 + f(x_1))\right] \cdot x_1 + \int\limits_{x_1}^{\infty} f(x) - (-2)\,\mathrm{d}x = \infty$;



21.12.2006

1.120.3 Analysis-Buch Seite 172, Aufgabe 25

Gegeben ist die Funktion f_a mit $f_a(x) = \frac{a^2}{x^2} - \frac{x}{a}$ ($a > 0$). Der Graph von f_a heiße G_{f_a}.

a) Bestimme den maximalen Definitionsbereich D_{f_a}, die Nullstellen und die Asymptoten von G_{f_a}.

- Definitionsbereich:
  $x^2 \neq 0; \Leftrightarrow D_{f_a} = \mathbb{R} \setminus \{0\};$
- Nullstellen:
  $f_a(x) = \frac{a^2}{x^2} - \frac{x}{a} \stackrel{?}{=} 0; \Leftrightarrow a^3 \stackrel{?}{=} x^3; \Leftrightarrow f_a(a) = 0;$
- Asymptoten:
  $x = 0$; (Beweis: $\lim\limits_{x \to 0\pm} f_a(x) = \infty;$)
  $y = -\frac{x}{a}$; (Beweis: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f_a(x) + \frac{x}{a} = 0;$)

b) Berechne die Koordinaten (x_E, y_E) und die Art des Extremums von f_a. Hat G_{f_a} Wendepunkte? (Begründung!)

$f_a'(x) = -\frac{x^3+2a^3}{ax^3};$

$x^3 + 2a^3 \stackrel{?}{=} 0; \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{2}a;$

GERIGKmethode von $f_a'(x)$:

```
   -2^(1/3)a     0
-----------|-----|------>

- - - - - - - - - - - - - - - -1
- - - - - -0------------- x^3 + 2a^3
- - - - - - - - - -0------- a x^3

   -      0  + [0]  -
```

VZW von $-$ nach $+$ bei $x = -\sqrt[3]{2}a$; $\rightarrow$ TIP bei $\left(-\sqrt[3]{2}a, \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \sqrt[3]{2}\right)$;

$f_a''(x) = \frac{6a^2}{x^4} > 0$ auf ganz D_{f_a}; trotzdem aber Wendestelle von f_a bei $x = 0$.

c) Zeichne den zu $a = 2$ gehörigen Graphen G_{f_2}.

d) Wie lässt sich die Tatsache interpretieren, dass y_E den Parameter a nicht enthält?

Alle Tiefpunkte liegen auf einer gemeinsamen Geraden.

e) Berechne $F_2(x) = \int\limits_1^x f_2(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_1^x \left(\frac{4}{t^2} - \frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t$.

$F_2(x) = \int\limits_1^x \left(\frac{4}{t^2} - \frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t = \left[-\frac{4}{t} - \frac{t^2}{4}\right]_1^x = -\frac{4}{x} - \frac{x^2}{4} + \frac{17}{4};$

f) Begründe die Existenz eines Maximums von F_2 und berechne dessen Koordinaten.

GERIGKmethode von $f_a(x) = \frac{a^2}{x^2} - \frac{x}{a} = \frac{a^3 - x^3}{ax^2}$:

```
      0      a
------|------|------>

-------------0- - - - a^3 - x^3
------0-------------- a x^2

  +  [0]  +  0   -
```

VZW von $f_a(x)$ von $+$ nach $-$ bei $x = a$; $\rightarrow$ HOP bei $\left(a, -\frac{4}{a} - \frac{a^2}{4} + \frac{17}{4}\right)$;

g) Für welche Werte von k hat die Gerade

$g_k\colon y = -\frac{1}{a}x + k$

mit G_{f_a} keine Punkte gemeinsam? Welche Schnittpunkte ergeben sich für $k = a^2$?

Konventioneller Ansatz über $y = -\frac{1}{a}x + k \stackrel{?}{=} \frac{a^3-x^3}{ax^2} = f_a(x)$; führt nicht zum Ziel, da die Nullstellen eines Polynoms vierter Ordnung zu finden wären.

Stattdessen Überlegung mit den Erkenntnisen der a): y ist für $k = 0$ Asymptote von G_{f_a}, mit $f_a(x) > -\frac{x}{a}$ für alle $x \in D_{f_a}$.

Also: Für $k \leq 0$ gibt es keine Schnittpunkte.

$-\frac{1}{a}x + a^2 = \frac{-x+a^3}{a} = \frac{a^3-x^3}{ax^2}; \Leftrightarrow$

$-x^3 + x^2a^3 = a^3 - x^3; \Leftrightarrow |x| = 1;$

Schnittpunkte: $\left(\pm 1, \mp\frac{1}{a} + a^2\right);$

h) Die Funktion h_a ist gegeben durch

$$h_a(x) = \begin{cases} \frac{a^2}{x^2} - \frac{x}{a} & \text{für } |x| \geq 1; \\ -\frac{x}{a} + a^2 & \text{für } |x| < 1; \end{cases}$$

Ihr Graph heiße G_{h_a}.

Zeichne den zu $a = 2$ gehörigen Graphen G_{h_2}.

Untersuche h_a an der Stelle $x = 1$ auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit.

$\lim\limits_{x\to 1-} h_a(x) = \lim\limits_{x\to 1-} -\frac{x}{a} + a^2 = -\frac{1}{a} + a^2 = h_a(1) = \lim\limits_{x\to 1+} \frac{a^2}{x^2} - \frac{x}{a} = \lim\limits_{x\to 1+} h_a(x);$

$\to h_a$ ist an der Stelle $x = 1$ stetig.

Provisorische Ableitungsfunktion:

$$h_a'(x) = \begin{cases} -\frac{2a^2}{x^3} - \frac{1}{a} & \text{für } |x| \geq 1; \\ -\frac{1}{a} & \text{für } |x| < 1; \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 1-} h_a'(x) = \lim\limits_{x\to 1-} -\frac{1}{a} = -\frac{1}{a} \neq \lim\limits_{x\to 1+} -2a^2 - \frac{1}{a} = \lim\limits_{x\to 1+} -\frac{2a^2}{x^3} - \frac{1}{a} = \lim\limits_{x\to 1+} h_a'(x);$

$\to h_a$ ist an der Stelle $x = 1$ nicht differenzierbar; das provisorisch aufgestellte h_a' ist nicht Ableitungsfunktion von h_a.

i) Berechne den Inhalt $J(r)$ des Flächenstücks, das von G_{h_a}, der Geraden $g_0\colon y = -\frac{1}{a}x$, der y-Achse und der Geraden $x = r$ ($r > 0$) eingeschlossen wird.

$h_a(0) = a^2;$

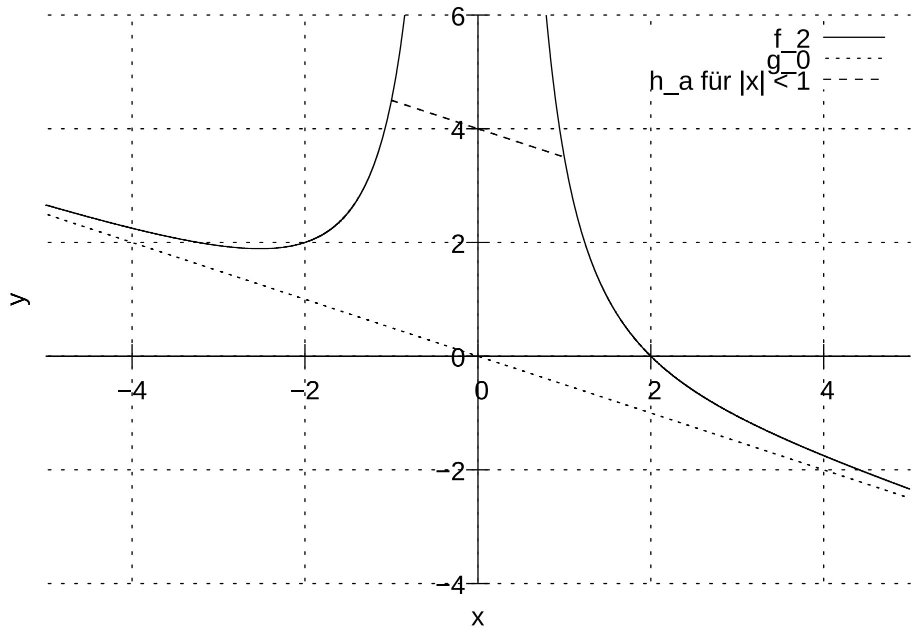
$A_1 = a^2 \cdot 1;$

$A_2 = \int\limits_1^r h_a(x) - y_{g_0}\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^r \frac{a^2}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{a^2}{x}\right]_1^r = -\frac{a^2}{r} + a^2 = a^2\left(1 - \frac{1}{r}\right);$

$J(r) = \begin{cases} A_1 \cdot r = ra^2 & \text{falls } 0 < x < 1; \\ A_1 + A_2 = a^2\left(2 - \frac{1}{r}\right) & \text{sonst;} \end{cases};$

j) Bestimme $\lim\limits_{r\to\infty} J(r)$.

$\lim\limits_{r\to\infty} J(r) = \lim\limits_{r\to\infty} a^2\left(2 - \frac{1}{r}\right) = 2a^2;$



25.01.2007

1.121 126. Hausaufgabe

1.121.1 Stochastik-Buch Seite 220, Aufgabe 2

Gegeben sei eine BERNOULLIkette der Länge 4 mit der Trefferwahrscheinlichkeit $0{,}3$.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

a) Auf zwei Treffer hintereinander folgen zwei Nieten.

$P_{\mathrm{a}} = p^2 q^2 \approx 4{,}4\,\%$;

b) Auf zwei Nieten hintereinander folgen zwei Treffer.

$P_{\mathrm{b}} = P_{\mathrm{a}} = q^2 p^2 \approx 4{,}4\,\%$;

c) Zwei Treffer und zwei Nieten treten jeweils hintereinander auf.

$P_{\mathrm{c}} = 2P_{\mathrm{a}} = 2p^2 q^2 \approx 8{,}8\,\%$;

d) Nur die ersten drei Versuche verlaufen erfolgreich.

$P_{\mathrm{d}} = p^3 q \approx 1{,}9\,\%$;

e) Die ersten drei Versuche verlaufen erfolgreich.

$P_{\mathrm{e}} = p^3 q + p^3 p = p^3 (q + p) = p^3 = 2{,}7\,\%$;

f) Nur zwei Versuche sind erfolgreich.

$P_{\mathrm{f}} = \binom{4}{2} p^2 q^2 \approx 26{,}5\,\%$;

1.121.2 Stochastik-Buch Seite 220, Aufgabe 3

Gegeben ist eine BERNOULLIkette der Länge 4 mit der Trefferwahrscheinlichkeit p.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau zwei Treffer aufeinander folgen.

$P_{\mathrm{a}} = P(\{1100, 0110, 0011, 1011, 1101\}) = 3p^2 q^2 + 2p^3 q$;

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau zwei Nieten aufeinander folgen.

$P_{\mathrm{b}} = P_{\mathrm{b}}$;

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau zwei Treffer oder genau zwei Nieten aufeinander folgen.

$P_{\mathrm{c}} = 4p^2 q^2 + 2p^3 q + 2pq^3 = 2p - 2p^2 = 2pq$;

1.121.3 Stochastik-Buch Seite 221, Aufgabe 7

Bei Beginn des Spiels **Mensch ärgere dich nicht** darf der Spieler dreimal würfeln. Wenn dabei eine Sechs fällt, darf er mit einer seiner Figuren starten.

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann man beim 1. Durchgang starten?

$P = p + qp + q^2p = 1 - q^3 \approx 42{,}1\,\%;$

1.121.4 Stochastik-Buch Seite 222, Aufgabe 17

Wie viel Mal muss man einen homogenen Würfel wenigstens werfen, um mit einer Mindestwahrscheinlichkeit von $90\,\%$ wenigstens einmal eine Sechs zu würfeln?

$n \geq \frac{\ln[1-90\,\%]}{\ln\left[1-\frac{1}{6}\right]} \approx 12{,}6;$

$\rightarrow n \geq 13;$ 25.01.2007

1.122 127. Hausaufgabe

1.122.1 Stochastik-Buch Seite 222, Aufgabe 18

Wie oft muss man bei einem Spiel mit

a) einem Laplace-Würfel,

b) zwei Laplace-Würfeln,

c) drei Laplace-Würfeln

mindestens spielen, damit die Wahrscheinlichkeit,

a) wenigstens eine Sechs,

b) wenigstens eine doppelte Sechs,

c) wenigstens eine dreifache Sechs

zu würfeln, mindestens $50\,\%$ ist?

a) $n \geq \frac{\ln[1-50\,\%]}{\ln\left[1-\frac{1}{6}\right]} \approx 3{,}8; \rightarrow n \geq 4;$

b) $n \geq \frac{\ln[1-50\,\%]}{\ln\left[1-\left(\frac{1}{6}\right)^2\right]} \approx 24{,}6; \rightarrow n \geq 25;$

c) $n \geq \frac{\ln[1-50\,\%]}{\ln\left[1-\left(\frac{1}{6}\right)^3\right]} \approx 149{,}3; \rightarrow n \geq 150;$

1.122.2 Stochastik-Buch Seite 222, Aufgabe 19

Wie viele Tippfelder sind beim Lotto **6 aus 49** unabhängig voneinander auszufüllen, damit bei einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $99\,\%$ auf wenigstens einem Feld

a) sechs Richtige,

b) fünf Richtige

stehen?

a) $n \geq \frac{\ln[1-99\,\%]}{\ln[1-6!43!/49!]} \approx 64 \cdot 10^6;$

($6!43!/49! = \frac{1}{\binom{49}{6}}$)

b) $n \geq \frac{\ln[1-99\,\%]}{\ln\left[1-\frac{\binom{6}{5}\binom{43}{1}}{\binom{49}{6}}\right]} \approx 0{,}25 \cdot 10^6;$

27.01.2007

1.123 128. Hausaufgabe

1.123.1 Stochastik-Buch Seite 223, Aufgabe 23

Gegeben sei eine BERNOULLIkette der Länge 4 und der Trefferwahrscheinlichkeit $0{,}3$.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, beim i-ten Versuch zum ersten Mal einen Treffer zu erzielen ($i = 1, 2, 3, 4$).

Kurzschreibweisen: $s^n = \underbrace{sss\ldots sss}_{n}$; $\quad 1{*}{*}{*} = \left\{(1, a, b, c) \,|\, a, b, c \in \{0, 1\}\right\}$;

$P(1{*}{*}{*}) = p = 30\,\%$;

$P(01{*}{*}) = qp = 21\,\%$;

$P(001{*}) = q^2p = 14{,}7\,\%$;

$P(\{0001\}) = q^3p \approx 10{,}3\,\%$;

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich zum ersten Mal ein Treffer nach höchstens vier Versuchen einstellt?

$P(1{*}{*}{*} \cup 01{*}{*} \cup 001{*} \cup \{0001\}) = p{+}qp{+}q^2p{+}q^3p = p\,(1 + q + q^2 + q^3) = 1 - P(\{0000\}) \approx 76\,\%$;

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Treffer frühstens beim dritten Versuch zum ersten Mal einstellt?

$P(001{*} \cup \{0001\}) = q^2p + q^3p = p\,(q^2 + q^3) \approx 25\,\%$;

1.123.2 Stochastik-Buch Seite 223, Aufgabe 24

Eine Laplace-Münze wird so lange geworfen, bis zum ersten Mal **Kopf** erscheint, höchstens aber zehn Mal.

a) Konstruieren Sie einen passenden Ergebnisraum.

$\Omega = \{0, 1\}^{10}$;

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt spätestens beim 5. Wurf Kopf?

$P(1{*}^9 \cup 01{*}^8 \cup 001{*}^7 \cup 0001{*}^6 \cup 00001{*}^5) = p + qp + q^2p + q^3p + q^4p = p + p^2 + p^3 + p^4 + p^5 \approx 96{,}9\,\%$;

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt frühestens beim 5. Wurf Kopf?

$P(00001{*}^5) = q^4p = p^5 \approx 3{,}1\,\%$;

„Alternativ“:

$P(0000{*}^6) = q^4 \approx 6{,}3\,\%$;

d) Mit welcher Anzahl von Würfen ist das Spiel mit mehr als $99\,\%$ Wahrscheinlichkeit spätestens beendet?

$n \geq \frac{\ln[1-99\,\%]}{\ln[1-p]} \approx 6{,}6; \rightarrow n \geq 7;$

1.123.3 Stochastik-Buch Seite 223, Aufgabe 25

Ein Laplace-Würfel wird so lange geworfen, bis zum ersten Mal Augenzahl 6 erscheint, höchstens aber sechs Mal.

a) Suchen Sie einen geeigneten Ergebnisraum.

$\Omega = \{0, 1\}^6;$

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt genau beim 6. Wurf die Zahl 6?

$P(0^5 1) = q^5 p \approx 6{,}7\,\%;$

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt keinmal die Sechs?

$P(0^6) = q^5 \approx 33{,}5\,\%;$

d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt frühestens beim 5. Wurf die Sechs?

$P(0^4 *^2) = q^4 \approx 48{,}2\,\%;$

1.123.4 Stochastik-Buch Seite 224, Aufgabe 26

Gegeben sei eine BERNOULLIkette mit den Parametern n und p. Wir interessieren uns für die Ereignisse E_k: „In den ersten $(k-1)$ Versuchen kein Treffer, beim k-ten Versuch ein Treffer“ ($k = 0, 1, \ldots, n$).

a) Berechnen Sie $P(E_2)$.

$P(E_2) = qp;$

b) Berechnen Sie $P(E_3)$.

$P(E_3) = q^2 p;$

c) Berechnen Sie $P(E_k)$.

$P(E_k) = q^{k-1} p;$

d) Da wir uns für die Ereignisse E_k interessieren, können wir den Ergebnisraum der BERNOULLIkette vergröbert auch darstellen durch

$$\Omega = \left\{1, 01, 001, \ldots, \underbrace{000\ldots000}_{n-1}1, \underbrace{000\ldots000}_{n}\right\}.$$

Zeigen Sie, dass die Summe der Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse gleich 1 ist.

$\Omega' = \{0,1\}^n$;

$$\begin{array}{rrcl} f\colon & \Omega' & \to & \Omega \\ & 1{*}^{n-1} & \mapsto & 1 \\ & 01{*}^{n-2} & \mapsto & 01 \\ & 001{*}^{n-3} & \mapsto & 001 \\ & & \vdots & \end{array}$$

Mit $\omega \in \Omega$: $P(\omega) = P(\{\omega' \in \Omega' \mid f(\omega') = \omega\})$;

Da $P(\Omega') = 1$ und die Zerlegung über das Urbild der Elementarereignisse von Ω unter f disjunkt ist, muss auch $P(\Omega) = 1$ gelten.

Alternativ:

$P(\Omega) = p + pq + pq^2 + \cdots + pq^{n-1} + q^n = p\,(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}) + q^n = p \cdot \left[\frac{q^n-1}{q-1} \cdot 1\right] + q^n = -q^n + 1 + q^n = 1$;

29.01.2007

1.124 129. Hausaufgabe

1.124.1 Stochastik-Buch Seite 222, Aufgabe 11

Die Ausschusswahrscheinlichkeit bei der Produktion eines Massenartikels sei $5\,\%$. Was ist wahrscheinlicher:

a) keine defekten unter 10 Stücken oder

b) wenigstens ein defektes unter 20 Stücken?

$q = 5\,\%$;

$P_\mathrm{a} = p^{10} \approx 59{,}9\,\% < 64{,}2\,\% \approx 1 - p^{20} = P_\mathrm{b}$; 30.01.2007

1.125 130. Hausaufgabe

1.125.1 Stochastik-Buch Seite 222, Aufgabe 13

Ein serienmäßig hergestelltes Gerät bestehe aus n Teilen. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Teil nicht funktioniert, sei für alle Teile gleich p. Fehlerhaftigkeit bzw. Brauchbarkeit der Teile seien unabhängige Ereignisse. Der Zusammenbau des Gerätes soll einwandfrei erfolgen. Das Gerät sei funktionsuntüchtig, wenn mindestens ein Teil fehlerhaft ist. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für Funktionsuntüchtigkeit in den Fällen

a) $n = 5$, $p = 0{,}03$,

b) $n = 250$, $p = 0{,}003$.

(Nach diesem Modell erklärt man sich das Versagen der Steuerung großer Raketen, die aus sehr vielen Einzelteilen zusammengesetzt sind.)

a) $P_{\mathrm{a}} = 1 - (1-p)^5 \approx 14{,}1\,\%$;

b) $P_{\mathrm{b}} = 1 - (1-p)^{250} \approx 52{,}8\,\%$;

1.125.2 Stochastik-Buch Seite 222, Aufgabe 14

Die Wahrscheinlichkeit eines sog. „China-Syndroms“ (Durchschmelzen eines Atomreaktors) wird auf maximal 10^{-5} geschätzt. Was kann man über die Wahrscheinlichkeit aussagen, dass 50 Atomreaktoren gleicher Sorte innerhalb der Wartungszeit störungsfrei arbeiten?

$q \leq 10^{-5}$;

$P \geq (1-q)^{50} \approx 99{,}95\,\%$;

1.125.3 Stochastik-Buch Seite 222, Aufgabe 15

Es liegen Ergebnisse mehrerer Untersuchungen vor, in denen Angehörige eines medizinischen Personals, die sich Nadelstichverletzungen mit HIV-kontaminierten Nadeln zugezogen hatten, nachuntersucht wurden. Das Infektionsrisiko wird nach diesen Studien als unter $1\,\%$ liegend angesehen. Was lässt sich über die Wahrscheinlichkeit aussagen, dass von 10 so verletzten Personen mindestens eine infiziert wurde?

$q \leq 1\,\%$;

$P \leq 1 - (1-q)^{10} \approx 9{,}6\,\%$;

31.01.2007

1.126 131. Hausaufgabe

1.126.1 Stochastik-Buch Seite 235, Aufgabe 44

Auf einem Eisenbahnnetz, das von einem Bahnkraftwerk mit Strom versorgt wird, verkehren zehn Lokomotiven. Die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Minute eine Lokomotive anfährt und dabei eine Stromeinheit benötigt, sei für jede Lokomotive gleich $0{,}2$.

a) Mit welchem mittleren Strombedarf hat man zu rechnen?

$E(X) = 10\,E(X_i) = 10 \cdot 0{,}2 = 2$;

b) Die Stromleitung sei für maximal viel Stromeinheiten ausgelegt.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt es zu einer Überlastung der Stromversorgung?

$P_{0,2}^{10}(X > 4) = 1 - P_{0,2}^{10}(X \leq 4) \approx 3{,}3\,\%$;

c) Für wie viele Stromeinheiten ist die Versorgung auszulegen, damit die Gefahr der Überlastung nicht größer als $1\,\%$ wird?

$P_{0,2}^{10}(X > m) = 1 - P_{0,2}^{10}(X \leq m) \overset{!}{\leq} 1\,\%$;

Ausprobieren liefert: $m \geq 5$;

1.126.2 Stochastik-Buch Seite 235, Aufgabe 45

Bei einer Prüfung wird ein sog. „Multiple-Choice-Test“ mit Fragen angewendet. Es werden fünf Fragen gestellt. Zu jeder der Fragen sind in zufälliger Anordnung eine richtige und zwei falsche Antworten gegeben. Die Prüfung gilt als bestanden, wenn bei mindestens vier Fragen die richtige Antwort angekreuzt ist. Ein unvorbereiteter Prüfling wählt seine Antworten rein zufällig aus.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit besteht er die Prüfung?

$n = 5; \quad p = \frac{1}{3};$

$P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - P(X \leq 3) \approx 4{,}5\,\%;$

b) Wie groß sind Erwartungswert und Standardabweichung der Anzahl X seiner richtigen Antworten?

$E(X) = np \approx 1{,}7;$

$\sigma(X) = \sqrt{npq} \approx 1{,}1;$

1.126.3 Stochastik-Buch Seite 238, Aufgabe 57

Bei der laufenden „Gut-Schlecht-Prüfung“ eines Massenartikels habe sich ein Ausschuss von $10\,\%$ ergeben. Zur Überprüfung des Ausschussprozentsatzes in der weiteren Produktion greifen wir eine Stichprobe von 10 Stück zufällig heraus und lehnen die Hypothese, der Ausschussanteil sei weiter $10\,\%$ ab, falls sich in der Stichprobe zwei oder mehr Ausschussstücke befinden.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Hypothese zu Unrecht verworfen wird?

$n = 10; \quad p = 10\,\%;$

$P^{10}_{10\,\%}(X \geq 2) = 1 - P^{10}_{10\,\%}(X \leq 1) \approx 26{,}4\,\%;$

b) Wie groß ist bei dieser Entscheidungsregel die Wahrscheinlichkeit, dass die Hypothese nicht verworfen wird, wenn in Wirklichkeit der Ausschussanteil $20\,\%$ ist?

$P^{10}_{20\,\%}(X < 2) = P^{10}_{20\,\%}(X \leq 1) \approx 37{,}6\,\%;$

02.02.2007

1.127 132. Hausaufgabe

1.127.1 Stochastik-Buch Seite 238, Aufgabe 58

Eine Fabrik gibt den Ausschussanteil bei der Produktion elektrischer Sicherungen mit $1\,\%$ an. Der Käufer einer größeren Stückzahl entnimmt eine Stichprobe von 100 Stück und entscheidet nach folgendem Plan:

Sind unter den 100 Prüfstücken mehr als zwei defekt, wird die Lieferung zurückgewiesen. Sonst wird sie angenommen.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Kaufmann die Lieferung zurückweist, obwohl der Ausschussanteil der Angabe entspricht?

$P_{1\,\%}^{100}(X > 2) = 1 - P_{1\,\%}^{100}(X \leq 2) \approx 8{,}0\,\%;$

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Kaufmann die Lieferung annimmt, wenn der Ausschussanteil in Wirklichkeit $5\,\%$ ist?

$P_{5\,\%}^{100}(X \leq 2) \approx 11{,}8\,\%;$

1.127.2 Stochastik-Buch Seite 238, Aufgabe 59

In einer Lieferung von Schrauben einer bestimmten Sorte befinden sich nach Fabrikangabe $10\,\%$ Ausschussstücke. Zehn Schrauben werden zufällig mit Zurücklegen entnommen.

a) Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich in der Stichprobe keine schlechte (höchstens eine schlechte) Schraube befindet.

p: Wahrscheinlichkeit für eine schlechte Schraube

X: Anzahl der schlechten Schrauben

$P_{10\,\%}^{10}(X = 0) = (90\,\%)^{10} \approx 34{,}9\,\%;$

$P_{10\,\%}^{10}(X \leq 1) \approx 73{,}6\,\%;$

b) Der Käufer entschließt sich, die Lieferung zurückzusenden, wenn die Anzahl der defekten Schrauben in der Stichprobe drei oder noch größer sein sollte. Sonst wird die Lieferung angenommen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für irrtümliche Zurückweisung.

$P_{10\,\%}^{10}(X \geq 3) = 1 - P_{10\,\%}^{10}(X \leq 2) \approx 7{,}0\,\%;$

c) Angenommen, der Ausschussanteil ist nicht $10\,\%$, sondern in WAHRHEIT $20\,\%$.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird dann die Lieferung irrtümlicherweise angenommen?

$P_{20\,\%}^{10}(X < 3) = P_{20\,\%}^{10}(X \leq 2) \approx 67{,}8\,\%;$

d) Berechnen Sie die Annahmewahrscheinlichkeit für einen Ausschuss von $30\,\%$.

$P_{30\,\%}^{10}(X < 3) = P_{30\,\%}^{10}(X \leq 2) \approx 38{,}3\,\%;$

05.02.2007

„ich zwing dich nicht. . . ich lass´ dich durchfallen“ 05.02.2007

1.128 133. Hausaufgabe

1.128.1 Stochastik-Buch Seite 245, Aufgabe 67

Bestimmen Sie die Maximalwerte von

a) $B(10, 0{,}5)$,

$np - q = 10 \cdot 0{,}5 - 0{,}5 = 4{,}5$ nicht ganzzahlig

$B(n, p; k)$ maximal für $k = \lfloor (n+1)\,p \rfloor = \lfloor 5{,}5 \rfloor = 5;$

b) $B(15, 0{,}5)$,

$np - q = 15 \cdot 0{,}5 - 0{,}5 = 7$ ganzzahlig

$B(n, p; k)$ maximal für $k = (n+1)\,p - 1 = 7$ und $k = (n+1)\,p = 8$

c) $B(20, 0{,}5)$.

$np - q = 20 \cdot 0{,}5 - 0{,}5 = 9{,}5$ nicht ganzzahlig

$B(n, p; k)$ maximal für $k = \lfloor (n+1)\,p \rfloor = \lfloor 10{,}5 \rfloor = 10;$

1.128.2 Stochastik-Buch Seite 245, Aufgabe 69

Aus einer Urne, die zwei weiße Kugeln und eine schwarze Kugel enthält, sollen 12 Kugeln mit Zurücklegen gezogen werden.

a) Zeigen Sie, dass die Kombination von 8 weißen und 4 schwarzen Kugeln die wahrscheinlichste ist.

$p = \frac{2}{3}$: Trefferwahrscheinlichkeit (weiß)

$12 \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{23}{3}$ nicht ganzzahlig

$B\left(12, \frac{2}{3}\right)$ maximal für $k = \lfloor (12+1) \cdot \frac{2}{3} \rfloor = \lfloor 8{,}\overline{6} \rfloor = 8;$

b) Berechnen Sie diese Wahrscheinlichkeit.

$B\left(12, \frac{2}{3}; 8\right) \approx 23{,}8\,\%;$

07.02.2007

1.129 134. Hausaufgabe

1.129.1 Stochastik-Buch Seite 258, Aufgabe 2

X sei die Augenzahl beim Werfen eines echten Würfels.

a) Wie groß ist die maximale absolute Abweichung $|X-\mu|$?

$\mu = 3{,}5;$

$\max\{|X(\omega)-\mu| \,|\, \omega \in \Omega\} = 2{,}5;$

b) Berechnen Sie $P(|X-\mu| \leq 2{,}5)$ und $P(|X-\mu| > 2{,}5)$.

$P(|X-\mu| \leq 2{,}5) = 1;$

$P(|X-\mu| > 2{,}5) = 1 - P(|X-\mu| \leq 2{,}5) = 0;$

c) Welche Abschätzung liefert die Tschebyschew-Ungleichung für $P(|X-\mu| \leq 2{,}5)$ bzw. $P(|X-\mu| > 2{,}5)$?

$\sigma^2 = \frac{35}{12};$

$P(|X-\mu| \leq 2{,}5) > 1 - \frac{\sigma^2}{(2{,}5)^2} = 1 - \frac{35/12}{(2{,}5)^2} \approx 53{,}3\,\%;$

$P(|X-\mu| > 2{,}5) \leq \frac{\sigma^2}{(2{,}5)^2} = \frac{35/12}{(2{,}5)^2} \approx 46{,}7\,\%;$

1.129.2 Stochastik-Buch Seite 258, Aufgabe 3

Berechnen Sie von den folgenden Zufallsgrößen jeweils $P(|X-\mu| < t\sigma)$ für $t = 3/2$ und $t = 2$ und vergleichen Sie die exakten Werte mit den Schranken nach Tschebyschew:

a) X sei die Augensumme beim Werfen zweier Würfel.

$\mu = 7; \quad \sigma^2 = \frac{70}{12};$

$P\left(|X-\mu| < \frac{3}{2}\sigma\right) = \frac{30}{6^2} \approx 83{,}3\,\%;$ (Augensummen von 3 bis 11)

$P\left(|X-\mu| < \frac{3}{2}\sigma\right) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\left(\frac{3}{2}\sigma\right)^2} = 1 - \frac{4}{9} \approx 55{,}5\,\%;$

$P(|X-\mu| < 2\sigma) = \frac{34}{6^2} \approx 94{,}4\,\%;$ (Augensummen von 4 bis 10)

$P(|X-\mu| < 2\sigma) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{(2\sigma)^2} = 1 - \frac{1}{4} = 75\,\%;$

b) X sei die Anzahl der Wappen beim viermaligen Werfen einer einwandfreien Münze.

$\mu = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2; \quad \sigma^2 = 4 \cdot \frac{1}{2}\frac{1}{2} = 1;$

$P\big(|X-\mu| < \frac{3}{2}\sigma\big) = 87{,}5\,\%;$ (alle Ergebnisse außer 0^4 und 1^4)

$P\big(|X-\mu| < \frac{3}{2}\sigma\big) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\left(\frac{3}{2}\sigma\right)^2} = 1 - \frac{4}{9} \approx 55{,}5\,\%;$

$P(|X-\mu| < 2\sigma) = 87{,}5\,\%;$ (alle Ergebnisse außer 0^4 und 1^4)

$P(|X-\mu| < 2\sigma) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{(2\sigma)^2} = 1 - \frac{1}{4} = 75\,\%;$

1.129.3 Stochastik-Buch Seite 258, Aufgabe 4

Sei $k \in \mathbb{R}^+$. Eine Zufallsgröße X nehme die Werte $(-k)$, 0, k mit den Wahrscheinlichkeiten $P(X = -k) = \frac{1}{2\sqrt{k}}$, $P(X = 0) = 1 - \frac{1}{\sqrt{k}}$, $P(X = k) = \frac{1}{2\sqrt{k}}$ an.

a) Berechnen Sie μ und σ^2.

Achtung: k muss größergleich $\frac{1}{4}$ sein, andernfalls ist $P(X = \pm k)$ größer 1!

$\mu = 0; \quad \sigma^2 = E(X^2) - E^2(X) = k^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} = k^{3/2};$

b) Berechnen Sie $P(|X| \geq k)$.

$P(|X| \geq k) = \frac{1}{\sqrt{k}};$ ($X = \pm k$)

c) Schätzen Sie $P(|X| \geq k)$ nach Tschebyschew ab.

$P(|X| \geq k) \leq \frac{k^{3/2}}{k^2} = \frac{1}{\sqrt{k}};$

d) Vergleichen Sie die beiden Ergebnisse.

Die TSCHEBYSCHEWschranke ist in diesem Fall optimal.

1.129.4 Stochastik-Buch Seite 258, Aufgabe 5

Bei der automatischen Herstellung von Stahlbolzen wird ein Durchmesser von $4{,}5\,\text{mm}$ verlangt, wobei Abweichungen bis zu $0{,}2\,\text{mm}$ zulässig sind. Eine Überprüfung ergab für den Durchmesser den Erwartungswert $4{,}5\,\text{mm}$ bei einer Standardabweichung von $0{,}08\,\text{mm}$. Mit welchem Anteil an unbrauchbaren Bolzen muss höchstenfalls gerechnet werden?

$P(|X - 4{,}5\,\text{mm}| > 0{,}2\,\text{mm}) < \frac{(0{,}08\,\text{mm})^2}{(0{,}2\,\text{mm})^2} = 16\,\%;$

1.129.5 Stochastik-Buch Seite 258, Aufgabe 6

Der Inhalt automatisch verpackter Fleischkonserven soll $1000\,\mathrm{g}$ betragen. Abweichungen von $30\,\mathrm{g}$ vom Soll seien zulässig. Bei der Überprüfung des Inhalts X vieler Konservendosen in g ergab sich als arithmatischer Mittelwert $\overline{x} = 1000\,\mathrm{g}$ und als empirische Varianz $s^2 = 100\,\mathrm{g}^2$.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt der Doseninhalt außerhalb der zulässigen Toleranz?

$P(|X - \overline{x}| > 30\,\mathrm{g}) < \frac{s^2}{(30\,\mathrm{g})^2} = \frac{1}{9} \approx 11{,}1\,\%;$

1.129.6 Stochastik-Buch Seite 258, Aufgabe 7

Der Fehleranteil serienmäßig hergestellter Produkte sei $1\,\%$. Aus einem Los sehr großen Umfangs N wird eine Stichprobe von $n = 1000$ Einheiten entnommen ($n \ll N$). Gefragt ist nach einer Abschätzung der Wahrscheinlichkeit, dass die Zahl X der fehlerhaften Elemente vom Erwartungswert um höchstens 10 Einheiten abweicht.

$\mu = 1000 \cdot 1\,\% = 10; \quad \sigma^2 = 1000 \cdot (1\,\%)\,(99\,\%) = 9{,}9;$

$P(|X - 10| \leq 10) > 1 - \frac{9{,}9}{10^2} = 90{,}1\,\%;$

1.129.7 Stochastik-Buch Seite 258, Aufgabe 8

Eine Anlage besteht aus 10 unabhängig voneinander arbeitenden Elementen, von denen jedes innerhalb der Wartungszeit mit der Wahrscheinlichkeit $5\,\%$ ausfällt. Es ist die Wahrscheinlichkeit dafür abzuschätzen, dass die Zahl X der ausfallenden Elemente vom Erwartungswert um mindestens 2 abweicht. Vergleich mit dem exakten Wert!

$\mu = 10 \cdot 5\,\% = 0{,}5; \quad \sigma^2 = 10 \cdot (5\,\%)\,(95\,\%) = 0{,}475;$

$P(|X - 0{,}5| \geq 2) \leq \frac{0{,}475}{2^2} \approx 11{,}9\,\%;$ 11.02.2007

1.130 135. Hausaufgabe

1.130.1 Stochastik-Buch Seite 260, Aufgabe 11

Die Lebensdauer X bestimmter Projektionslampen schwankt mit einer Standardabweichung von $\sigma = 10\,\mathrm{h}$ um den Erwartungswert $\mu = 150\,\mathrm{h}$.

a) Mit welcher Mindestwahrscheinlichkeit ergibt eine Zufallsauswahl von vier Lampen eine mittlere Lebensdauer zwischen 130 und 170 Stunden?

$P\left(\left|\overline{X} - 150\,\mathrm{h}\right| \leq 20\,\mathrm{h}\right) > 1 - \frac{(10\,\mathrm{h})^2}{4(20\,\mathrm{h})^2} \approx 93{,}8\,\%;$

b) Mit welcher Mindestwahrscheinlichkeit kann bei insgesamt 16 Lampen mit einer Gesamtlebensdauer zwischen 2240 und 2560 Stunden gerechnet werden?

$P\left(\left|X^{\Sigma} - 2400\,\mathrm{h}\right| \leq 160\,\mathrm{h}\,\mathrm{h}\right) > 1 - \frac{16(10\,\mathrm{h})^2}{(160\,\mathrm{h})^2} \approx 93{,}8\,\%;$

1.130.2 Stochastik-Buch Seite 260, Aufgabe 12

Für die Brenndauer X einer Glühlampenserie kann die Standardabweichung $\sigma < 100\,\mathrm{h}$ angenommen werden. Wie viele Lampen müssen mindestens getestet werden, damit der arithmetische Mittelwert der Brenndauer mit einer Wahrscheinlichkeit von wenigstens $95\,\%$ um weniger als $50\,\mathrm{h}$ vom Erwartungswert abweicht?

$95\,\% = P\left(\left|\overline{X} - \mu\right| < 50\,\mathrm{h}\right) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{n\cdot(50\,\mathrm{h})^2}; \Leftrightarrow$

$n \leq \frac{\sigma^2}{\left[1-P\left(\left|\overline{X}-\mu\right|<50\,\mathrm{h}\right)\right]c^2} = 80;$

XXX Fehler: n müsste $\geq$ irgendwas sein 4,21

1.130.3 Stochastik-Buch Seite 260, Aufgabe 13

Ein fairer Würfel wird n Mal unabhängig geworfen. X_i sei die beim i-ten Wurf erzielte Augenzahl.

a) Geben Sie mit Hilfe der Ungleichung von Tschebyschew eine Abschätzung der Wahrscheinlichkeit dafür an, dass das arithmetische Mittel $\overline{X}$ der erzielten Augenzahlen einen Wert aus dem Intervall $[3,4]$ annimmt, wenn $n = 70$ Würfe durchgeführt werden.

Führen Sie dieses Experiment durch und berechnen Sie $\overline{x}$.

$\operatorname{Var}(X_i) = E(X_i^2) - E^2(X_i) = \frac{1}{6}\left[1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2\right] - (3{,}5)^2 = \frac{35}{12}$;

$P\left(\left|\overline{X} - 3{,}5\right| \leq 0{,}5\right) > 1 - \frac{35/12}{70\cdot(0{,}5)^2} \approx 83{,}3\,\%$;

Berechnung von $\overline{x}$:

```
module Main where

import System.Random
import Control.Monad
import Data.List

main = study 10000 >>= putStrLn . show

run = fmap (avg . take 70 . randomRs (1,6))

study n = do
  ws <- replicateM n $ run (newStdGen >> getStdGen)
  let ok = filter (\x -> x >= 3 && x <= 4) ws
  return $ genericLength ok / genericLength ws

avg xs = fromIntegral (sum xs) / genericLength xs
```

Ergebnis: Mit ca. $98{,}679\,\%$ Wahrscheinlichkeit ($100\,100$ durchgeführte Experimente) liegt $\overline{x}$ in $[3,4]$.

b) Wie oft muss man nach der Tschebyschew-Abschätzung mindestens werfen, damit $\overline{X}$ mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als $90\,\%$ einen Wert aus dem Intervall $[3{,}3, 3{,}7]$ annimmt?

$90\,\% = P\left(\left|\overline{X} - 3{,}5\right| \leq 0{,}2\right) > 1 - \frac{35/12}{n\cdot(0{,}2)^2}$; $\Leftrightarrow$

$n < \frac{35/12}{(1-90\,\%)\cdot(0{,}2)^2} \approx 729{,}2$; (XXX müsste $>$ heißen)

Man muss mindestens 730 Mal werfen. 19.02.2007

1.131 136. Hausaufgabe

1.131.1 Stochastik-Buch Seite 265, Aufgabe 17

In einer Urne befinden sich 1000 Kugeln, davon 200 weiße. Es wird 400 Mal eine Kugel mit Zurücklegen gezogen. Man gebe eine untere Schranke für die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass mindestens 40 Mal und höchstens 120 Mal eine weiße Kugel gezogen wird.

$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \leq \frac{40}{200}\right) > 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2} = 99\,\%$;

1.131.2 Stochastik-Buch Seite 265, Aufgabe 20

In einem Gefäß befinden sich 10^{23} Moleküle eines Gases. Für jedes Molekül sei die Wahrscheinlichkeit, sich in der linken Gefäßhälfte aufzuhalten, ebenso groß wie die, sich in der rechten Gefäßhälfte aufzuhalten. Die Moleküle mögen sich unabhängig bewegen.

Man schätze die Wahrscheinlichkeit dafür ab, dass sich zu einem bestimmten Zeitpunkt weniger als $49{,}99\,\%$ oder mehr als $50{,}01\,\%$ der Moleküle in der linken Hälfte des Gefäßes aufhalten.

$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| > 0{,}01\,\%\right) < \frac{pq}{n\varepsilon^2} = 2{,}5 \cdot 10^{-16};$

1.131.3 Stochastik-Buch Seite 266, Aufgabe 22

Wie oft muss man würfeln, damit sich die relative Häufigkeit für das Werfen einer Sechs mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $80\,\%$ um weniger als $1\,\%$ von der Wahrscheinlichkeit, eine Sechs zu würfeln, unterscheidet?

$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| < \varepsilon\,\%\right) \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2} \geq P; \Leftrightarrow$

$1 - P \geq \frac{pq}{n\varepsilon^2}; \Leftrightarrow$

$n \geq \frac{pq}{\varepsilon^2(1-P)};$

Speziell: $n \geq \frac{\frac{1}{6}\frac{5}{6}}{(1\,\%)^2 \cdot 20\,\%} \approx 6944{,}4; \to n \geq 6945;$

1.131.4 Stochastik-Buch Seite 266, Aufgabe 24

Man gebe eine Abschätzung für die Anzahl der Wahlberechtigten an, die man befragen muss, um mit mehr als $90\,\%$ Wahrscheinlichkeit das Wahlergebnis für eine bestimmte Partei mit einem Fehler von höchstens $1\,\%$ vorhersagen zu können.

$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) > 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2} \geq P; \Leftrightarrow$

$n \geq \frac{1}{4\varepsilon^2(1-P)};$

Speziell: $n \geq \frac{1}{4(1\,\%)^2 \cdot 10\,\%} = 25\,000;$ 26.02.2007

1.132 137. Hausaufgabe

1.132.1 Stochastik-Buch Seite 296, Aufgabe 1

Man berechne $\sum\limits_{i=0}^{25} B(50, 1/2; i)$ nach der integralen Näherungsformel und vergleiche das Ergebnis mit dem Tabellenwert.

$\sum\limits_{i=0}^{25} B(50, 1/2; i) = P_{1/2}^{50}(X \leq 25) \approx \phi\left(\frac{25-50\cdot 1/2+1/2}{\sqrt{50\cdot 1/2\cdot 1/2}}\right) \approx \phi(0{,}141421) \approx 0{,}55567$;

$F(50, 1/2; 25) \approx 0{,}55614$;

$\frac{0{,}55567-0{,}55614}{0{,}556140} \approx -0{,}085\,\%$;

1.132.2 Stochastik-Buch Seite 296, Aufgabe 2

Man berechne $B(72, 1/3; 26)$

a) nach der lokalen Näherungsformel,

$$B(72, 1/3; 26) \approx \frac{1}{\sqrt{72\cdot 1/3\cdot 2/3}} \cdot \varphi\left(\frac{26-72\cdot 1/3}{\sqrt{72\cdot 1/3\cdot 2/3}}\right) \approx \frac{1}{4}\varphi(0{,}5) \approx 0{,}088;$$

b) nach der integralen Näherungsformel.

$$B(72, 1/3; 26) \approx \phi\left(\frac{26-72\cdot 1/3+1/2}{\sqrt{72\cdot 1/3\cdot 2/3}}\right) - \phi\left(\frac{26-72\cdot 1/3-1/2}{\sqrt{72\cdot 1/3\cdot 2/3}}\right) \approx \phi(0{,}625) - \phi(0{,}375) \approx 0{,}73765 - 0{,}64803 = 0{,}08784;$$

27.02.2007

1.133 138. Hausaufgabe

1.133.1 Stochastik-Buch Seite 297, Aufgabe 13

Wir werfen 10.000 Mal eine Münze und nehmen an, dass die Ergebnisse „Zahl“ und „Wappen“ gleichwahrscheinlich sind. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich das Ergebnis „Wappen“ um höchstens 100 vom Erwarungswert unterscheidet.

$P(|X-\mu| \leq 100) > 1 - \frac{10\,000\cdot 1/2\cdot 1/2}{100^2} = 75\,\%$;

$P(|X-\mu| \leq 100) = P(4900 \leq X \leq 5100) = F_{1/2}^{10\,000}(5100) - F_{1/2}^{10\,000}(4899) =$?;

$P(|X-\mu| \leq 100) \approx 2 \cdot \phi\left(\frac{100+1/2}{\sqrt{10\,000 \cdot 1/2 \cdot 1/2}}\right) - 1 = \phi(2{,}01) \approx 95{,}556\,\%$;

1.133.2 Stochastik-Buch Seite 297, Aufgabe 17

In der Bundesrepublik Deutschland wurden jährlich ca. $6 \cdot 10^5$ Kinder geboren. Die Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt ist erfahrungsgemäß $0{,}514$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die relative Häufigkeit der Knabengeburten vom WAHREN Wert um höchstens $1/600$ abweicht?

$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \leq 1/600\right) > 1 - \frac{pq}{n(1/600)^2} \approx 85{,}0\,\%$;

$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \leq 1/600\right) \approx 2 \cdot \phi\left(\frac{6 \cdot 10^5 \cdot 1/600 + 1/2}{\sqrt{6 \cdot 10^5 \cdot 0{,}514 \cdot (1-0{,}514)}}\right) - 1 \approx 2\phi(2{,}58) - 1 \approx 99{,}0\,\%$;

Angabe schlecht formuliert: Der „wahre Wert“ der relativen Häufigkeit ist einfach der Wert der relativen Häufigkeit! Gemeint ist die Wahrscheinlichkeit.

Außerdem ist die angegebene „Wahrscheinlichkeit“ von $0{,}514$ eine rel. Häufigkeit...

Und zusätzlich ist nicht angegeben, auf welchen Zeitraum sich die „relative Häufigkeit der Knabengeburten“ bezieht. 28.02.2007

1.134 139. Hausaufgabe

1.134.1 Stochastik-Buch Seite 299, Aufgabe 23

Wie oft muss man einen Laplace-Würfel werfen, damit die relative Trefferhäufigkeit der Augenzahl 6 von der Trefferwahrscheinlichkeit um höchstens $\varepsilon = 1\,\%$ abweicht bei einer Wahrscheinlichkeit von ca. $\beta = 95\,\%$?

$\phi(t) = \frac{1+\beta}{2} = 97{,}5\,\%; \rightarrow t \approx 1{,}96$;

$n > \langle \tilde{n} \rangle = \langle pq \cdot \frac{t^2}{\varepsilon^2} \rangle \approx \langle 5335{,}6 \rangle = 5336$; (mit $\langle \cdot \rangle$ der Rundungsfunktion) 04.03.2007

1.135 140. Hausaufgabe

1.135.1 Stochastik-Buch Seite 299, Aufgabe 25

Welche Versuchszahl ist erforderlich, damit die relative Trefferhäufigkeit von der unbekannten Trefferwahrscheinlichkeit um weniger als $0{,}1\,\%$ abweicht bei einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $99\,\%$?

$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{n}\sqrt{pq}$; $\rightarrow$ für unbekanntes p: $\sigma \leq \sqrt{n}/2$;

$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| < 0{,}1\,\%\right) = 99\,\% \approx 2 \cdot \phi\left(\frac{n \cdot 0{,}1\,\%}{\sqrt{n}/2}\right) - 1$; $\Leftrightarrow$

$\frac{1}{2}\left(1 + 99\,\%\right) = \phi\left(\frac{n \cdot 0{,}1\,\%}{\sqrt{n}/2}\right)$; $\Leftrightarrow$

$\phi^{-1}\left(\frac{1+99\,\%}{2}\right) = \frac{n \cdot 0{,}1\,\%}{\sqrt{n}/2} = 2\sqrt{n} \cdot 0{,}1\,\%$; $\Leftrightarrow$

$n = \left[\frac{\phi^{-1}\left(\frac{1+99\,\%}{2}\right)}{2 \cdot 0{,}1\,\%}\right]^2 \approx \left[\frac{2{,}58}{2 \cdot 0{,}1\,\%}\right]^2 = 1\,664\,100$;

1.135.2 Stochastik-Buch Seite 299, Aufgabe 26

Wie viele Wahlberechtigte muss man befragen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $90\,\%$ das Wahlergebnis für eine bestimmte Partei mit einem Fehler von höchstens $1\,\%$ vorhersagen können?

$n \approx \left[\frac{\phi^{-1}\left(\frac{1+90\,\%}{2}\right)}{2 \cdot 1\,\%}\right]^2 \approx \left[\frac{1{,}64}{2 \cdot 1\,\%}\right]^2 = 6724$;

„und dann schuf Gott die Welt, und sie war so, wie jetzt“

„mach´ so, dass es gut ist“ 05.03.2007

1.136 141. Hausaufgabe

1.136.1 Stochastik-Buch Seite 300, Aufgabe 29

Geben Sie die Maximalabweichung der relativen Geburtenhäufigkeit für Knaben bei 1000 Neugeborenen von der Geburtenwahrscheinlichkeit $0{,}514$ an, die man mit einer Wahrscheinlichkeit zu $50\,\%$ zu erwarten hat.

$P(|X/n - p| \leq \varepsilon) \approx 2 \cdot \phi\left(\frac{1000\varepsilon + 1/2}{\sigma}\right) - 1 \stackrel{!}{=} 50; \Leftrightarrow$

$\phi^{-1}(3/4)\sqrt{1000 \cdot 0{,}514 \cdot (1 - 0{,}514)} = 1000\varepsilon \approx 10{,}1;$

06.03.2007

1.137 142. Hausaufgabe

1.137.1 Stochastik-Buch Seite 300, Aufgabe 30

Eine Laplace-Münze wird 4000 Mal geworfen. Bestimmen Sie diejenigen Grenzen der relativen Häufigkeit von Wappen gegenüber dem normalen Wert $0{,}5$, welchen die Wahrscheinlichkeit $50\,\%$ zukommt, sodass es ebenso wahrscheinlich ist, der Wert werde zwischen sie fallen bzw. sie überschreiten.

$P(|X/4\,000 - p| \leq \varepsilon) \approx 2 \cdot \phi\left(\frac{4\,000\varepsilon + 1/2}{10\sqrt{10}}\right) - 1 \stackrel{!}{=} 50\,\%; \Leftrightarrow$

$\varepsilon = \frac{\phi^{-1}(3/4) \cdot 10\sqrt{10} - 1/2}{4\,000} \approx \frac{20{,}7}{4000};$

1.137.2 Stochastik-Buch Seite 309, Aufgabe 41

In einem Großversuch wurde an einer Universität ermittelt, dass der mittlere IQ (Intelligenzquotient) der Stundenten normal verteilt ist mit einem Mittelwert von 110 und einer Standardabweichung von 12.

a) Welcher Anteil der Studenten der obigen Universität hat einen IQ von höchstens 100?

$P(X \leq 100) = \phi\left(\frac{100-110}{12}\right) \approx 20{,}2\,\%;$

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit besitzt ein zufällig ausgewählter Student der obigen Universität einen IQ von mehr als 107?

$P(X > 107) = 1 - P(X \leq 107) = 1 - \phi\left(\frac{107-110}{12}\right) \approx 61{,}3\,\%;$

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt der IQ eines zufällig ausgewählten Studenten der obigen Universität im Intervall $[104, 116]$?

$P(104 \leq X \leq 116) = \phi\left(\frac{116-110}{12}\right) - \phi\left(\frac{104-110}{12}\right) \approx -0{,}2531\,\%;$ **(XXX)**

19.03.2007

1.138 144. Hausaufgabe

1.138.1 Stochastik-Buch Seite 337, Aufgabe 5

Bei der Kreuzung zweier Blumensorten ergeben sich rot blühende und weiß blühende Pflanzen. Eine der beiden Farben ist ein „dominantes“, die andere ein „rezessives“ Merkmal. Nach den MENDELschen Gesetzen tritt das dominante Merkmal mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{4}$, das rezessive mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ auf. Bei einem Kreuzungsversuch ergeben sich 15 Nachkommen. Das häufiger auftretende Merkmal soll als dominant gelten. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Entscheidung nicht richtig?

X: Anzahl rot blühender Pflanzen
Y: Anzahl weiß blühender Pflanzen
n: Gesamte Anzahl Pflanzen ($X + Y = n$)

p: Wahrscheinlichkeit für rot blühende Pflanze

$P_{1/4}^{n}(X > Y) = P_{1/4}^{n}(X > n - X) = P_{1/4}^{n}(X > n/2) = 1 - P_{1/4}^{n}(X \leq n/2) \approx 1{,}7\,\%$;

[Ps unterschiedlicher Räume nicht addieren!]

„zur Zeit geht viel kaputt. . . das ist ein Zeichen, dass etwas zu Ende geht. . . “ 20.03.2007

1.139 145. Hausaufgabe

1.139.1 Stochastik-Buch Seite 336, Aufgabe 3

Bei einem Stichprobenumfang von $n = 20$ soll über die beiden Hypothesen H_1: $p = 0{,}25$ und H_2: $p = 0{,}5$ entschieden werden. Die irrtümliche Entscheidung für H_2 soll höchstens mit $5\,\%$ Wahrscheinlichkeit vorkommen.

a) Bestimmen Sie die Entscheidungsregel.

$\mathrm{An}\,H_1 = \{0, 1, \ldots, k\}$; $\quad \mathrm{An}\,H_2 = \{k + 1, \ldots, n\}$;

$P_{H_1}^{20}(X \in \mathrm{An}\,H_2) = P_{0{,}25}^{20}(X \geq k + 1) = 1 - P_{0{,}25}^{20}(X < k + 1) = 1 - P_{0{,}25}^{20}(X \leq k) = 1 - F(20, 0{,}25; k) \overset{!}{\leq} 5\,\%$; $\Leftrightarrow$

$F(20, 0{,}25; k) \geq 1 - 5\,\% = 95\,\%$; $\Leftrightarrow$ $k \geq 8$;

$\mathrm{An}\,H_1 = \{0, 1, \ldots, 8\}$; $\quad \mathrm{An}\,H_2 = \{9, 10, \ldots, 20\}$;

b) Stellen Sie die Wahrscheinlichkeiten für richtige und irrtümliche Entscheidungen in einer Vierfeldertafel entsprechend Beispiel 15.1 zusammen.

	$X \in \mathrm{An}\, H_1$	$X \in \mathrm{An}\, H_2$
H_1 „in Wahrheit“	$P_{0,25}^{20}(X \leq 8) \approx 95{,}9\,\%$	$P_{0,25}^{20}(X > 8) \approx 4{,}1\,\%$
H_2 „in Wahrheit“	$P_{0,5}^{20}(X \leq 8) \approx 25{,}2\,\%$	$P_{0,5}^{20}(X > 8) \approx 74{,}8\,\%$

c) Für welche Entscheidungsregel sind die beiden Fehlerwahrscheinlichkeiten etwa gleich groß? Entwerfen Sie auch in diesem Fall eine Vierfeldertafel der Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Entscheidungen.

$\mathrm{An}\, H_1 = \{0, 1, \ldots, k\}$; $\quad \mathrm{An}\, H_2 = \{k + 1, \ldots, n\}$;

$P_{0,25}^{20}(X \geq k + 1) \overset{!}{\approx} P_{0,5}^{20}(X \leq k)$; $\Leftrightarrow$

$1 - P_{0,25}^{20}(X \leq k) \overset{!}{\approx} P_{0,5}^{20}(X \leq k)$;

Ausprobieren liefert: $k = 7$;

Fehlerwahrscheinlichkeiten sind dann $10{,}2\,\%$ bzw. $13{,}2\,\%$.

22.03.2007

1.140 146. Hausaufgabe

1.140.1 Stochastik-Buch Seite 337, Aufgabe 4

In einem Betrieb werden Schrauben 1. Wahl mit $5\,\%$ Ausschussstücken und Schrauben 2. Wahl mit $20\,\%$ Ausschussstücken in getrennten Schachteln verpackt. Von einer Schachtel ist das Etikett verloren gegangen. Der Werkmeister will schnell entscheiden, um welche Sorte es sisch handelt. Er entnimmt 10 Schrauben und überprüft, ob sie sich in die entsprechenden Muttern einwandfrei eindrehen lassen. Sollte höchstens eine Schraube nicht passen, entschließt er sich, den Inhalt der Schachtel für 1. Wahl, ansonsten für 2. Wahl zu halten.

a) Formulieren Sie mit Worten die beiden Möglichkeiten für falsche Entscheidungen.

Es ist möglich, dass der Werkmeister die Schachtel für 2. Wahl hält, obwohl sie „in Wahrheit“ eine 1. Wahl ist (Fehler 1. Art), und dass der Werkmeister die Schachtel für 1. Wahl hält, obwohl sie „in Wahrheit“ eine 2. Wahl ist (Fehler 2. Art).

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt es jeweils zu den falschen Entscheidungen?

H_1: Schachtel 1. Wahl, H_2: Schachtel 2. Wahl

Testgröße Z: Anzahl nicht passender Schrauben

$\mathrm{An}\, H_1 = \{0, 1\}; \qquad \mathrm{An}\, H_2 = \{2, 3, \ldots, 10\};$

$P(\text{Fehler 1. Art}) = P^{10}_{5\,\%}(Z \geq 2) = 1 - P^{10}_{5\,\%}(Z \leq 1) \approx 8{,}6\,\%;$

$P(\text{Fehler 2. Art}) = P^{10}_{20\,\%}(Z \leq 1) \approx 37{,}6\,\%;$

c) Wie muss die Entscheidungsregel lauten, damit 1. Wahl höchstens mit $5\,\%$ Wahrscheinlichkeit für 2. Wahl gehalten wird?

Wie groß ist in diesem Fall die Wahrscheinlichkeit, 2. Wahl irrtümlich für 1. Wahl zu halten?

$\mathrm{An}\, H_1 = \{0, 1, \ldots, k\}; \qquad \mathrm{An}\, H_2 = \{k + 1, \ldots, 20\};$

$P(\text{Fehler 1. Art}) = P^{10}_{5\,\%}(Z \geq k + 1) = 1 - P^{10}_{5\,\%}(Z \leq k) \overset{!}{\leq} 5\,\%; \Leftrightarrow$

$P^{10}_{5\,\%}(Z \leq k) \overset{!}{\geq} 95\,\%; \Leftrightarrow$

$k \geq 2; \rightarrow$

$\mathrm{An}\, H_1 = \{0, 1, 2\}; \qquad \mathrm{An}\, H_2 = \{3, 4, \ldots, 20\};$

$P(\text{Fehler 2. Art}) = P^{10}_{20\,\%}(Z \leq 2) \approx 67{,}8\,\%;$

d) Lässt sich die Wahrscheinlichkeit der irrtümlichen Entscheidung für 1. Wahl unter $10\,\%$ senken? (Begründung!)

$P(\text{Fehler 2. Art}) = P^{10}_{20\,\%}(Z \leq k) \overset{!}{<} 10\,\%;$

Nein, es ist möglich, da schon $P^{10}_{20\,\%}(Z \leq 0)$ größer als $10\,\%$ ist und $k \mapsto P^{10}_{20\,\%}(Z \leq k)$ in k monoton steigt.

(Es wäre noch der „Hack“ $\mathrm{An}\, H_1 = \{\}$ möglich. Außerdem könnte man den Umfang der Stichprobe erhöhen.)

23.03.2007

„insofern ist Mathematik für viele Menschen sowieso Wahrscheinlichkeitsrechnung. . . “ 23.03.2007

1.141 147. Hausaufgabe

1.141.1 Stochastik-Buch Seite 340, Aufgabe 7

Bei der Entscheidung über die Qualität der Widerstände von Beispiel 15.1 soll höchstens mit $5\,\%$ Wahrscheinlichkeit eine Schachtel mit Widerständen 1. Wahl irrtümlich für 2. Wahl gehalten werden, wobei 130 Wiederstände überprüft werden.

a) Bestimmen Sie die Entscheidungsregel.

H_1 (1. Wahl): $p = 0{,}1;\quad \mathrm{An}\,H_1 = \{0, 1, \ldots, k\};$

H_2 (2. Wahl): $p = 0{,}3;\quad \mathrm{An}\,H_2 = W_Z \setminus H_1 = \{k+1, k+2, \ldots, 130\};$

$1 - P_{0,1}^{130}(X \leq k) \approx 1 - \phi\left(\frac{k - 130 \cdot 0{,}1 + 1/2}{\sqrt{130 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9}}\right) \overset{!}{\leq} 5\,\%; \Leftrightarrow$

$\phi(t) \geq 95\,\%; \Leftrightarrow$

$t = \frac{k - 130 \cdot 0{,}1 + 1/2}{\sqrt{130 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9}} \geq 1{,}65; \Leftrightarrow$

$k \geq 18{,}1; \rightarrow$

$\mathrm{An}\,H_1 = \{0, 1, 2, \ldots, 19\};$

b) Berechnen Sie auch die zweite Fehlerwahrscheinlichkeit.

$P_{0,3}^{130}(X \leq 19) \approx \phi\left(\frac{19 - 130 \cdot 0{,}3 + 1/2}{\sqrt{130 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7}}\right) \approx \phi(-3{,}73) = 1 - \phi(3{,}73) \approx 0{,}01\,\%;$

26.03.2007

„drum vergammelt ihr nur“

„viele Schüler erschrecken ja, wenn Unterricht stattfindet“

„sehr gut, hast dich noch verbessert. . . sonst hätt´ ich wieder »1000 Punkte« gesagt“

„bloß das schlimme ist, danach [nach dem Unfall] steht er [der Baum] ja nicht mehr, und dann stimmt´s doch nicht mehr“ 26.03.2007

1.142 148. Hausaufgabe

1.142.1 Stochastik-Buch Seite 350, Aufgabe 11

Ein Elektrohändler vereinbart mit einem Lieferanten von Glühbirnen, dass er einen bestimmten Preisnachlass erhält, falls der Anteil p an defekten Glühbirnen einer größeren Lieferung $10\,\%$ übersteigt.

Vereinbarungsgemäß werden der ganzen Sendung 50 Glühbirnen zufällig entnommen und geprüft. Ergeben sich mehr als 7 defekte Glühbirnen, so soll angenommen werden, p übersteige $10\,\%$.

(Bemerkung: Selbstverständlich werden die Glühbirnen ohne Zurücklegen entnommen. Da es sich aber um eine sehr große Lieferung handelt, macht es für die Rechnung keinen wesentlichen Unterschied, ob mit oder ohne Zurücklegen entnommen wird.)

a) Wie groß ist das Risiko des Lieferanten, einen Preisnachlass gewähren zu müssen, obwohl nur $10\,\%$ der Glühbirnen defekt sind?

X: Anzahl defekter Glühbirnen

$P_{10\,\%}^{50}(X > 7) = 1 - P_{10\,\%}^{50}(X \leq 7) \approx 12{,}2\,\%;$

b) Wie groß ist das Risiko des Händlers, keinen Preisnachlass zu erhalten, obwohl nur $20\,\%$ der Glühbirnen defekt sind?

$P_{20\,\%}^{50}(X \leq 7) \approx 19{,}0\,\%;$

c) Wie müsste das Entscheidungsverfahren eingerichtet werden, damit der Händler höchstens mit einer Wahrscheinlichkeit von $5\,\%$ zu Unrecht einen Preisnachlass erhält?

$P_{10\,\%}^{50}(X > c) = 1 - P_{10\,\%}^{50}(X \leq c) \overset{!}{\leq} 5\,\%; \Leftrightarrow$

$P_{10\,\%}^{50}(X \leq c) \geq 95\,\%; \Leftrightarrow$

$c \geq 9;$

Nimmt man die Hypothese, p übersteige $10\,\%$, dann an, wenn $X > 9$ ist, so ist die Erforderung der Aufgabenstellung erfüllt.

d) Wie müsste die Entscheidungsregel lauten, damit der Händler mit mindestens $50\,\%$ Wahrscheinlichkeit einen Preisnachlass erhält, wenn $20\,\%$ der Glühbirnen defekt sind?

$P_{20\,\%}^{50}(X > c) = 1 - P_{20\,\%}^{50}(X \leq c) \overset{!}{\geq} 50\,\%; \Leftrightarrow$

$P_{20\,\%}^{50}(X \leq c) \leq 50\,\%; \Leftrightarrow$

$c \leq 9;$

Nimmt man die Hypothese, p übersteige $10\,\%$, dann an, wenn $X > 9$ ist, so ist die Erforderung der Aufgabenstellung erfüllt.

27.03.2007

1.143 149. Hausaufgabe

1.143.1 Stochastik-Buch Seite 350, Aufgabe 12

Ein Unternehmen beauftragt eine Werbeagentur, für eines seiner Produkte eine große Fernsehwerbung durchzuführen. Sollte nach Beendigung der Werbeaktion der Bekanntheitsgrad des Produkts mehr als $40\,\%$ betragen, so ist das Unternehmen bereit, über den vereinbarten Preis für die Werbeaktion hinaus einen zusätzlichen Betrag an die Werbeagentur zu zahlen.

Zur Entscheidung darüber soll eine Umfrage unter 100 zufällig ausgewählten Personen durchgeführt werden.

a) Wie lautet die zu testende Nullhypothese?

H_0: $p \leq 40\,\%$;

b) Wie muss die Entscheidungsregel lauten, damit das Risiko für das Unternehmen, zu Unrecht mehr zu zahen, höchstens $1\,\%$ beträgt?

$\mathrm{An}\,H_0 = \{0, 1, \ldots, k\}$;

$p \leq 40\,\%$: $P_p^{100}(X > k) \leq P_{40\,\%}^{100}(X > k) = 1 - P_{40\,\%}^{100}(X \leq k) \stackrel{!}{\leq} 1\,\%$;

$P_{40\,\%}^{100}(X \leq k) \geq 99\,\%$; $\Leftrightarrow k \geq 52$;

$\mathrm{An}\,H_0 = \{0, 1, \ldots, 52\}$;

c) Wie groß ist dann das Risiko der Werbeagentur, den zusätzlich vereinbarten Betrag nicht zu erhalten, obwohl der Bekanntheitsgrad des Produkts nach der Werbeaktion bei $50\,\%$ liegt?

$P_{50\,\%}^{100}(X \leq 52) \approx 69{,}1\,\%$;

1.143.2 Stochastik-Buch Seite 350, Aufgabe 13

Man werfe eine Münze 100 Mal und teste mit $\alpha = 10\,\%$ ($5\,\%$) die Nullhypothese, dass es sich um eine Laplace-Münze handelt.

XXX: Was ist der Arbeitsauftrag? 16.04.2007

1.144 150. Hausaufgabe

1.144.1 Stochastik-Buch Seite 351, Aufgabe 16

In einer Klinik hat sich nach langjähriger Erfahrung gezeigt, dass $60\,\%$ der Patienten, bei denen eine bestimmte Darmoperation durchgeführt wird, als geheilt angesehen werden können. Ein Arzt entwickelt eine neue Operationstechnik, die bei 22 von 30 Patienten erfolgreich ist. Kann man daraus signifikant oder gar hochsignifikant schließen, dass die neue Operationstechnik besser ist?

$H_0\colon p > 60\,\%$;

$\mathrm{An}\,H_0 = \{22, 23, \ldots, 30\}$;

$P_p^{30}(X \geq 22) \leq P_{60\,\%}^{30}(X \geq 22) = 1 - P_{60\,\%}^{30}(X \leq 21) \approx 9{,}4\,\%$; mit $p \leq 60\,\%$;

Nein, man kann weder von einer signifikanten noch von einer hochsignifikanten Steigerung sprechen.

[„H_0 ist die Hypothese des Etablierten“]

[Beim „Signifikanzansatz“ muss in die $P(\cdots)$-Klammern der Ablehnungsbereich der Nullhypothese!]

[Annahme der „Signifikanzvermutung“ = Ablehnung der Nullhypothese] 17.04.2007

1.145 151. Hausaufgabe

1.145.1 Stochastik-Buch Seite 351, Aufgabe 18

Aufgrund längerer Erfahrung weiß man in einem Betrieb, der Glühbirnen herstellt, dass etwa $25\,\%$ der gefertigten Glühlampen eine Brenndauer von weniger als 6000 Stunden haben. Durch ein neuartiges Herstellungsverfahren soll die Qualität verbessert werden. Aus der neuen Fertigung werden 100 Glühlampen entnommen. Wie viele davon müssen mindestens mehr als 6000 Stunden brennen, damit man das neue Verfahren als signifikant bzw. hochsignifikant besser bezeichnen kann?

$H_0\colon p \leq 75\,\%$; $\quad \mathrm{An}\,H_0 = \{0, \ldots, k\}$;

$P_{75\,\%}^{100}(X > k) = 1 - P_{75\,\%}^{100}(X \leq k) \leq \alpha$;

Für $\alpha = 5\,\%$: $k \geq 83$; $\quad \mathrm{Ab}\,H_0 = \{84, \ldots, 100\}$;

Für $\alpha = 1\,\%$: $k \geq 36$; $\quad \mathrm{Ab}\,H_0 = \{87, \ldots, 100\}$; 18.04.2007

1.145.2 152. Hausaufgabe

Stochastik-Buch Seite 351, Aufgabe 19

Ein Wirtschaftsinstitut behauptet, dass in einer bestimmten Großstadt $50\,\%$ der Bevölkerung ein monatliches Brutto-Einkommen von höchstens 1500 € und $50\,\%$ der Bevölkerung mehr als 1500 € haben.

Eine Zufallsstichprobe von 100 Familien ergibt, dass nur 41 ein Einkommen von mehr als 1500 € haben. Kann man die Angaben des Wirtschaftsinstituts mit dem Signifikanzniveau $5\,\%$ als falsch bezeichnen?

$X =$ Anzahl Familien mit Einkommen mehr als 1500 €;

$H_0\colon p \geq 50\,\%$; (Behauptung des Wirtschaftsinstituts)

$P_{50\,\%}^{100}(X \leq 41) \approx 4{,}4\,\% \leq 5\,\%$;

($\mathrm{Ab}\, H_0 = \{0, \ldots, 41\}$;)

Ja, man kann die Angaben mit dem Signifikanzniveau $5\,\%$ als falsch bezeichnen.