Sonstiges

Ingo Blechschmidt

23. März 2007

Inhaltsverzeichnis

12.01.2006

1 Sonstiges

1.1 Ungeklärte Fragen

- Wann setzt man das Semikolon?
- „Bei den Zahlen unterscheidet man nicht/kann man nicht unterscheiden zwischen »dem gleichen« (=) und »dem selben« (≡).“[1]

  Wieso nicht? Nehmen wir $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$, dann sind doch a,b mit $a = \frac{3}{4} = (3,4)$ und $b = \frac{6}{8} = (6,8)$ zwar sicher gleich (also $a = b$), aber nicht das gleiche Objekt (also $a \not\equiv b$), oder?

[1] Ich habe die Bedeutung von $=$ und $\equiv$ einem englischen Papier über Surreale Zahlen entnommen (»http://www.tondering.dk/claus/surreal.html«). $=$ bedeutet dort Gleichheit und unterscheidet sich qualitativ nicht von anderen Relationen. $\equiv$ dagegen ist „grundlegend“ und muss nicht extra für jede Menge bzw. für jeden Objekttyp definiert werden; $a \equiv b$ ist nur dann wahr, wenn a lediglich eine andere Bezeichnung für b ist; dabei spielt die Definition der Gleichheit ($=$; z.B. Gleichheit von $\frac{3}{4}$ mit $\frac{6}{8}$) keine Rolle.

- Bedeutet $a \in A$ dass ein Element aus A gleich a ist ($=$) oder dass es ein Element das selbe Objekt wie a ist ($\equiv$)?
- „$\mathbb{Z}$ enthält auch alle natürlichen Zahlen, also $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$."
  - Annahme: Die Antwort auf die vorherige Frage ist „$=$".
    Wie kann man natürliche Zahlen mit ganzen Vergleichen? Es handelt sich doch um verschiedene Strukturen (z.B. $42_{\mathbb{N}}$ gegen $(+, 42_{\mathbb{N}})$). Oder hat man $=$ so definiert, dass man nicht nur die Gleichheit von Zahlen aus den selben Zahlenmengen vergleichen kann, sondern auch dass man Zahlen aus verschiedenen Zahlenmengen vergleichen kann? Kurz: Ist $a = b$ mit (z.B.) $a \in \mathbb{N}$ und $b \in \mathbb{C}$ zulässig? (vgl. MMD (Multiple Method Dispatch) in der Informatik)
  - Annahme: Die Antwort auf die vorherige Frage ist „$\equiv$".
    Dann ist doch die Aussage „$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$" sicher falsch, oder? Beispielsweise ist $42_{\mathbb{N}}$ sicher nicht das selbe Objekt wie $42_{\mathbb{Z}} \equiv (+, 42_{\mathbb{N}})$.
- Ist das Einbeziehen von komplexen Zahlen in der Wahrscheinlichkeitsrechnung sinnvoll?
- Die „Menge aller Mengen" $M = \left\{ N \mid N \text{ ist eine Menge} \right\}$ existiert ja nicht (Russelsche Antinomie), stattdessen existiert aber die Klasse aller Mengen sehr wohl.

  Würde die „Klasse aller Klassen" nicht einen ähnlichen Widerspruch wie die „Menge aller Mengen" hervorrufen? Wie wird dieser Widerspruch axiomatisch verhindert?

  Was ist eine Klasse überhaupt?
- Gesucht sei die „maximale Definitionsmenge" einer konstanten Funktion f mit $\mathrm{f}(x) = 42$. Die „maximale Definitionsmenge" $D_{\mathrm{f}} = \left\{ x \mid x \text{ ist ein Objekt} \right\}$ gibt es aber nicht (wieder Russelsche Antinomie), also muss man sich „notgedrungen" auf „kleinere" Mengen beschränken; korrekt?
- Man hat ja die Addition, Multiplikation etc. auch auf Funktionen übertragen, wobei $\mathrm{f} + \mathrm{g} = \mathrm{h}$ mit $\mathrm{h}(x) = \mathrm{f}(x) + \mathrm{g}(x)$.

  Nun habe ich auch schon „$\mathrm{f} + 42 = \mathrm{h}$" gesehen (also mit $\mathrm{h}(x) = \mathrm{f}(x) + 42$„ gesehen; ist das lediglich eine Kurzschreibweise oder kann man 42 wirklich auch als Funktion auffassen (mit $42(x) = 42$)?

- Gibt es eine Schreibweise für die in der Informatik üblichen anonymen Funktionen?

  Beispiel: Die Funktion f, die $x \in \mathbb{N}$ die Funktion g mit $\mathrm{g}(t) = x + t$ zuordnet – kann man ihren Funktionsterm evtl. auch wie folgt schreiben?

  $\mathrm{f}(x) = (t \mapsto x + t)\,;$

- Was ist ein Term? Was unterscheidet einen Term von einer Funktion?

- Existiert die „Menge aller Funktionen“, oder gibt es auch hier wieder einen Widerspruch ala Russelscher Antinomie?

- Ich habe gelesen, dass man „umgangssprachlich“ sagen kann, dass die Klasse der Surrealen Zahlen (John Conway, 1974; „Surreal Numbers: How Two Ex-Students Turned on to Pure Mathematics and Found Total Happiness“ von Donald E. Knuth; „On Numbers and Games“ von Conway) „zu groß“ sei, um noch eine Menge zu sein.

  Wie ist das zu verstehen?

- Zu welcher Menge gehören die Kardinalzahlen? Ist es überhaupt möglich, eine „Menge aller Kardinalzahlen“ aufzustellen (evtl. wegen Widerspruch ala Russelscher Antinomie)?

  (Die Surrealen Zahlen enthalten die Kardinalzahlen, die Surrealen Zahlen bilden aber ja keine Menge, sondern eine Klasse.)

- Ist die Schreibweise „2^M“, wobei M eine beliebige (auch unendliche) Menge ist, nur eine Kurzschreibweise oder hat sie einen weiteren Hintergrund?

  Ist „M^2“ eine Kurzschreibweise? Wenn nein, kann man die Definition/ist es sinnvoll, die Definition zu erweitern auf M^x mit $x \in \mathbb{R}$ (oder sogar noch weiter)?

- „Obwohl $\mathbb{Q}$ dicht ist, gibt es trotzdem Zahlen, die nicht in $\mathbb{Q}$ enthalten sind (z.B. $\sqrt{2}$). Somit ist die Gleichung $x^2 = 2$ in $\mathbb{Q}$ nicht lösbar.“

  Dies ist zwar sicher richtig, aber was unterscheidet das Fehlen einer Lösung der Gleichung $x^2 = 2$ von dem der Gleichung $x^2 = -1$ und $\frac{42}{0} = a$?

Überträgt man die Argumentation, so ist $\mathbb{R}$ (und auch $\mathbb{C}$) nicht „vollständig“, da die Lösung der Gleichung $\frac{42}{0} = a$ nicht in ihr vorkommt.

- Ist es sinnvoll, die Vielfachheit von Elementen von Multimengen auf $\mathbb{N}$ zu beschränken? Ist es sinnvoll, sie auf $\mathbb{R}$ oder sogar $\mathbb{C}$ zu erweitern?

- „Man kann zwar auch noch weitere Zahlenmengen als $\mathbb{C}$ konstruieren (z.B. $\mathbb{R}^4$), aber diese verlieren dann immer mehr Körpereigenschaften.“

  Wieso? Und wieso erfüllen die Surrealen Zahlen „trotzdem“ die Körperaxiome (abzüglich der Tatsache, dass die Surrealen Zahlen keine Menge, sondern eine Klasse sind), sind wohlgeordnet und enthalten „sehr viel mehr“ Zahlen als $\mathbb{R}$ (z.B. Zahlen größer als 0 und kleiner als jede reelle Zahl (z.B. $\frac{1}{\omega} = \varepsilon$), Kardinalzahlen (z.B. ω) etc.)?

- Gödels Unvollständigkeitssatz besagt (sofern ich ihn richtig verstanden habe), dass es wahre Aussagen gibt, die trotzdem nicht beweisbar sind.

  Wie kann man von „wahren Aussagen“ sprechen, wenn doch die „Wahrheit“ (bzw. die „Richtigkeit“) über die Axiome definiert ist?

  Wenn man eine Aussage nicht auf die (als richtig definierten) Aussagen des Axiomensystems zurückführen kann – dann ist die Aussage doch nicht richtig, oder?

- Kann man das „Gleichheitszeichen der Physik“ ($\frac{1{,}00}{3{,}0000} = 0{,}333$) mathematisch untermauern?

- Was sind Einheiten? Gilt $0\,X = 0$ für jede Einheit X (von additiven Einheiten wie $^\circ\mathrm{C}$ einmal abgesehen)?

  Wie kann man mit Einheiten rechnen? Zu welcher Zahlenmenge gehört überhaupt (z.B.) $42\,\mathrm{m}$? Zu $\mathbb{R} \times \{\mathrm{m}\}$?

- Die Addition zusammen mit der Multiplikation über Funktionen über $\mathbb{R}$ bildet doch nur in bestimmen Fällen einen Körper – beispielsweise müssen die Definitionsmengen jeder vorkommenden Funktion gleich $\mathbb{R}$ sein, oder?

- Hat es einen bestimmten Grund, dass die „herkömmlichen“ Erweiterungen der reellen Zahlen (ich ziele also nicht auf z.B. die Surrealen Zahlen ab) immer aus Tupeln mit 2^k mit $k \in \{1, 2, 4, 8, 16, \ldots\}$ Komponenten bestehen? (z.B. $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, $\mathbb{H} = \mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$, etc.)

- Ich habe gelesen, dass es einen Unterschied zwischen $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{C}$ gibt. Welchen?

- Ist es sinnvoll, Tupel mit unendlich vielen Komponenten zuzulassen? (Definiert man (a, b, c) als $(a, (b, c))$ sollte dies doch kein Problem darstellen, da alle vorkommenden Unter-Paare nur zwei Komponenten enthalten, richtig?)

- „$\oint \mathcal{B}(s)\,\mathrm{d}s = \mu_0 I$ – dabei spielt die Wahl des Weges, entlang dessen man integriert, keine Rolle.“

  Ist dies eine spezielle Eigenschaft von $\mathcal{B}$-Feldern? (Meine Idee ist, dass sich $\mathcal{B}(s)$ so verhält – so zunimmt oder abnimmt, damit sich die Unterschiede, die sich durch unterschiedliche Wege ergeben, wieder herausrechnen.) Oder trifft dies auf alle „normalen“ Funktionen zu (Funktionen, die stetig sind, deren Definitionsmenge eine „durchgehende“ Teilmenge von $\mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{R}^3$) ist (also keine Punkte ausgeschlossen werden), etc.)?

- Was meint die Schreibweise $\langle \mathrm{f}, \mathrm{g} \rangle$ im Zusammenhang mit Integralen?

- „$\Omega = \left\{\omega \;\middle|\; \omega \in [10, 40]\right\}$ (»der Bus kommt zwischen 10 und 40 Zeiteinheiten nach Beginn der Zeitrechnung an«; Ω sei ein Laplace-Raum)“

  Wie kann man mit diesem Ergebnisraum (der ja überabzählbar unendlich ist) umgehen?

  Beschreibe A das Ereignis „der Bus kommt genau 30 Zeiteinheiten nach Beginn der Zeitrechnung an“, also $A = \{30\}$. Intuitiv müsste die Wahrscheinlichkeit des Eintretens von A 0 sein, korrekt?

  Beschreibe B das Ereignis „der Bus kommt zwischen 20 Zeiteinheiten und 30 nach Beginn der Zeitrechnung an“, also $B = \left\{\omega \;\middle|\; \omega \in [20, 30]\right\}$. Intuitiv müsste die Wahrscheinlichkeit des Eintretens von B $\frac{30-20}{40-10} = \frac{1}{3}$ sein, korrekt? Wie lässt sich das mathematisch begründen? (Man kann ja schlecht $P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|}$

ansetzen – sowohl B als auch Ω sind ja unendlich groß und ∞ bzw. $|\Omega|$ ist ja kein Element von $\mathbb{R}$.)

- Ist es sinnvoll, Surreale Zahlen in der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu nutzen? (Damit hätte man ja die Kardinalzahlen als „normale Zahlen" (für die auch die Division definiert ist), zur Verfügung.)

01.03.2007
21.03.2007
22.03.2007
23.03.2007

1.2 Kurscharakteristik

Mathematik ist wie Fußball spielen: Nur weil man die Regeln kennt, ist man noch lange kein guter Spieler...

Die erste Frage, die sich uns bei der Überlegung, wie eine Charakteristik auszusehen hat, stellt, ist die, ob eine Form nicht viel mehr eine Denkgewohnheit als eine tatsächliche Notwendigkeit darstellt.

Wenn man nun nicht erkennt, dass Fragen dieser Art elementarer Bestandteil des wirklichen Mathematikunterrichts sind, offenbart man nur sein persönliches neurotisches Verhältnis zur Mathematik per se.

Diejenigen Menschen, auf die dies zutrifft, können eineindeutig – aber nicht surjektiv – auf die Menge derer abgebildet werden, die unter der Last von Schlagzeilen wie „seit wann sind wir nicht mehr sicher?!" zusammenbrechen und durch Selbstoffenbarungen wie „ich habe Mathematik auch nie verstanden" klarmachen, wie verdrängend und senil sie im Grunde sind.

Das bedeutet jetzt nicht, dass diese Leute dumm sind. Vielmehr liegt die Ursache des nicht gefundenen Ausgangs aus der mitunter jedoch selbst verschuldeten Unmündigkeit mit an Wahrscheinlichkeit grenzender Sicherheit in der Schizophrenie der heutigen Gesellschaft. Oder umgekehrt.

Dem Protagonisten des Grauen Alltags würde es – so scheint es zumindest – mehr Energie abverlangen, das Weltbild an die unleugbaren Gegebenheiten der „Realität" anzupassen, als mit allen Mitteln das Existente zu flicken und abzustützen – selbst auf die erhebliche Gefahr hin, Tatsachen verdrehen zu müssen, damit sie der Wirklichkeitsauffassung nicht widersprechen: Finde ich heraus, dass Bester Freund mich immer belügt, so hat er mich nicht belogen, nein!, schließlich wäre er sonst nicht Bester Freund!

Die Mathematik als Brennspiegel, die nur betrachtet, was sowieso schon da ist, offenbart in ihrer Asinnigkeit diese Paradoxa. Im ständigen Bestreben des „normalen“ Schülers, seine Welt aufrechtzuerhalten, wehrt er sich daher gegen die Befreiung durch die Mathematik als einzig verbliebene Geisteswissenschaft am Gymnasium. Und damit ist er nicht alleine; auch der typische Bürger tut dies. Der Grund dafür ist klar; Befreiung tut weh, genau wie der Tropfen der Vernunft zischt, wenn er auf den erstarrten Kalk der Gesellschaft trifft.

Ein weiteres Problem ist, dass die Mathematik und der Mathematikunterricht im wahrsten Sinne des Wortes ex-klusiv sind und sich der „vernünftige“ Schüler (zu Recht) nach Jahren der Denk-Entfremdung gegen das Interesse am erwähnten Unterricht wehrt. Schließlich ist der Grund für den Besuch des Gymnasiums ein rein pragmatischer – das Statussymbol Abitur wird angestrebt!

Wir sind letztendlich froh darüber, uns für den richtigen Leistungskurs entschieden zu haben. Wir fanden heraus, dass Steine vor Newton im wahrsten Sinne des Wortes ungesetzlich fielen, die elfte Klasse überflüssig war und (noch immer) ist, und wir mit Mathematik die richtige Wahl getroffen haben. Manchmal (ok, oft) tat es weh, doch zum Glück war es für uns noch nicht zu spät, den Zug der Vernunft zu erreichen. . .