25.01.2007

0.1 BERNOULLIexperimente und -ketten

Ein Zufallsexperiment mit $|\Omega| = 2$ heißt „BERNOULLIexperiment".

Übliche Bezeichnungen: $\Omega = \{0, 1\}$, 0: Niete, 1: Treffer

Mit (Ω, P): $P(\{0\}) = q,\ P(\{1\}) = p$

Die Hintereinanderausführung von BERNOULLIexperimenten gleicher Trefferwahrscheinlichkeit ohne gegenseitige Beeinflussung nennt man „BERNOULLIkette".

0.1.1 Modell der BERNOULLIkette

$\Omega = \{0, 1\}^2; \quad n \in \mathbb{N}; \qquad (\Omega, P)$

Die Ereignisse $E_i = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in \Omega \,|\, \omega_i = 1\}$ ($|E_i| = 2^{n-1}$), $i = 1, 2, \ldots, n$ sind unabhängig und haben alle dieselbe Wahrscheinlichkeit.

n und p sind Parameter der Kette, n [nennt man] auch „Länge der Kette".

0.1.2 [Bestimmung der Minimalkettenlänge für Trefferwahrscheinlichkeit β]

Bestimmung der Kettenlänge n dafür, dass mindestens ein Treffer mit der Wahrscheinlichkeit β auftritt.

$P(\overline{\text{kein Treffer}}) = 1 - P(\text{kein Treffer}) = 1 - q^n \geq \beta; \Leftrightarrow$

$1 - \beta \geq q^n; \Leftrightarrow$ [beide Seiten kleiner 1]

$\log_q [1 - \beta] = \frac{\ln[1-\beta]}{\ln[1-p]} \leq n;$

[n natürlich aufrunden, falls nicht ganze Zahl]

[Mit X Anzahl der Treffer:]

$P(X = k) = B(n, p, k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k};$

$\sum\limits_{i=0}^{k} B(n, p, i) = P(X \leq k);$ 29.01.2007

0.1.3 Formel von Bernoulli

[Mit einer] BERNOULLIkette mit den Parametern n und p [und] X: Anzahl der Treffer

Das Wahrscheinlichkeitsmaß (Wahrscheinlichkeitsverteilung) $P_p^n\colon \mathcal{P}(\{0,1\}^n) \to [0,1]$ mit $P_p^n(X=k) = B(n,p;k)$ heißt „Binomialverteilung $B(n,p)$“. 30.01.2007

Die Zufallsgröße X [ist] binomialverteilt.

(Kumulative) Verteilungsfunktion:

$F(n,p;k) = P_p^n(X \leq x) = \sum\limits_{k \leq x} B(n,p;k);$

0.1.4 Erwartungswert und Varianz

BERNOULLIkette mit den Parametern n und p [und] X: Anzahl der Treffer

X_i: Anzahl der Treffer beim i-ten BERNOULLIexperiment

$E(X_i) = p \cdot 1 + q \cdot 0 = p;$

$E(X) = E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n) = np;$

$\operatorname{Var}(X) = \operatorname{Var}(X_1+X_2+\cdots+X_n) = n \operatorname{Var}(X_i) = n\left[(1-p)^2 p + (0-p)^2 q\right] = npq;$