Stochastik

Ingo Blechschmidt

27. März 2007

Inhaltsverzeichnis

1 Stochastik **2**

1.1 Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechung . . . 2

1.2 Grundmodelle zur Kombinatorik 4

1.3 Die erweiterte Vierfeldertafel 4

1.4 Das Axiomensystem von Kolmogorow 5

1.5 Die bedingte Wahrscheinlichkeit 5

1.6 Formel für die totale Wahrscheinlichkeit 7

1.7 Unabhängigkeit [Ausfrage] 8

1.8 Zufallsgrößen 8

1.8.1 Die Wahrscheinlichkeitsfunktion 8

1.8.2 Die (kumulative) Verteilungsfunktion 8

1.8.3 Gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung und Unabhängigkeit zweier Zufallsgrößen 9

1.8.4 Erwartungswert $E(X)$ einer Zufallsgröße X über (Ω, P) mit der Wertemenge $W_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ 9

1.9 BERNOULLIexperimente und -ketten 11

1.9.1 Modell der BERNOULLIkette 11

1.9.2 [Bestimmung der Minimalkettenlänge für Trefferwahrscheinlichkeit β] 11

1.9.3 Formel von Bernoulli 12

1.9.4 Erwartungswert und Varianz 12

1.10 Hypothesentests 12 11.11.2005

1 Stochastik

1.1 Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechung

- In einer Schublade befinden sich lose 7 Paar Socken. Es werden blind zwei Socken entnommen. Wie viele solcher „Paare“ sind möglich?

  $14 \cdot 13 : 2 = 91;$

- 20 Schülerinnen und Schüler kommen zum Mathematik-Unterricht in das Klassenzimmer: Auf wie viele Arten ist das möglich? 23.11.2005

  - Einzeln, Individuen werden unterschieden:

    $\omega = (18, 2, 5, 7, \ldots)$; („Der Schüler mit der Nummer 7 kommt als vierter.“)

    Ein Ergebnis ist ein 20-Tupel, als i-te Komponente ($i = 1, \ldots, 20$) tragen wir die Nummer des Schülers ein, der als i-ter erschien.

    $|\Omega| = 20! \approx 2{,}43 \cdot 10^{18};$

  - 2er-Gruppen: Anzahl der Möglichkeiten, 20 Schüler in 2er-Gruppen einzuteilen:

    * $\frac{20 \cdot 19}{2} = 190;$ (1. Paar)
    * $\frac{18 \cdot 17}{2} = 153;$ (2. Paar)
    * $\vdots$
    * $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6;$ (9. Paar)
    * $\frac{2 \cdot 1}{2} = 1;$ (10. Paar)

    $\frac{20 \cdot 19}{2} \cdot \frac{18 \cdot 17}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2 \cdot 1}{2} = \frac{20!}{(2!)^{10}};$

28.11.2005

- Schülergruppe $S = \{A, B, C, D\}$;

  a) [Jeweils] 1. Kurssprecher [von] E,Ph, Ämterhäufung möglich

  Mögliches Ergebnis: $\omega_1 = (A, B)$, $\omega_2 = (A, A)$;

  1. Komponente: E, 2. Komponente: Ph

  $\Omega_{\mathrm{a}} = \left\{ (x, y) \mid x \in S \wedge y \in S \right\};$

  $|\Omega_{\mathrm{a}}| = |S|^2;$

b) 1./2. Kurssprecher für M

Mögliches Ergebnis: $\omega = (A, B)$;

$\Omega_{\mathrm{b}} = \left\{(x, y) \mid x \in S \wedge y \in S \wedge x \neq y\right\} = \Omega_{\mathrm{a}} \setminus \left\{(x, x) \mid x \in S\right\}$;

$|\Omega_{\mathrm{b}}| = |S| \left(|S| + 1\right) = 16 - 4$;

„Jaja, da kannsch tausend Sachen [wischende Handbewegung] hinschreiben“

„Das ist [wie] die Sache mit der Sachtel: Welche Seite ist richtig“

„Ja was soll ich da sagen wenn ich spinn´“

c) Zwei Schüler werden als Tafeldienst gewählt.

$\omega = \{A, B\} = \{B, A\}$;

$\Omega_{\mathrm{c}} = \left\{\{x, y\} \mid x \in S \wedge y \in S \wedge x = y\right\} = \left\{\{x, y\} \mid \{x, y\} \subset S\right\}$;

$|\Omega_{\mathrm{c}}| = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$;

$2!\,|\Omega_{\mathrm{c}}| = |\Omega_{\mathrm{b}}|$;

„Heut ham´ die Ramona und die Ramona Tafeldienst“

„Dann ist er [ein Schizophrener] endlich mal mit sich beisammen [wenn er Tafeldienst ist]“

d) Die Schüler bilden Paare.

$\Omega_{\mathrm{d}} = \{\{\{A, B\}, \{C, D\}\}, \{\{A, C\}, \{B, D\}\}, \{\{A, D\}, \{B, C\}\}\}$; 29.11.2005

$8\,|\Omega_{\mathrm{d}}| = 4!$;

$|\Omega_{\mathrm{d}}| = \frac{4!}{8} = 3$;

[Komisches Zeug: Tabelle mit ABCD, BACD, BADC, ABDC (für Paar AB,CD); also Vertauschung innerhalb der Paare ($2 \cdot 2$) und die Paar selbst (nochmal $\cdot\, 2$)] 28.11.2005

e) Die Schüler kommen paarweise ins Klassenzimmer, auf die Reihenfolge beim Betreten der Paare wird geachtet.

$\Omega_{\mathrm{e}} = \{(\{A, B\}, \{C, D\}), (\{A, C\}, \{B, D\}), \ldots\}$;

1. Komponente: 1. Paar 29.11.2005

$|\Omega_{\mathrm{e}}| = 2\,|\Omega_{\mathrm{c}}| = \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2 \cdot 1}{2} = \frac{4!}{2^2} = 6$; 30.11.2005

f) Einzeln, nach Geschlecht (4 w, 16 m)

Mögliches Ergebnis: $\omega = (\mathrm{w}, \mathrm{w}, \mathrm{w}, \mathrm{m}, \ldots)$;

20-Tupel

$\frac{20!}{4!16!}$

11.11.2005

- Auf wie viele Arten können sich 20 Schülerinnen und Schüler auf 34 Plätze setzen?

14.12.2005

1.2 Grundmodelle zur Kombinatorik

Stichprobendarstellung als	**Stichprobe vom Umfang n von $\{1, 2, \ldots, N\}$**	**Mit Zurücklegen**	**Ohne Zurücklegen**	
n-Tupel	**Achten auf Reihenfolge**	N^n (L)	$\frac{N!}{(N-n)!}$ (L)	**Unterscheidbare Murmeln**
n-Multimenge, n-Menge (echt)	**Nichtachten auf Reihenfolge**	$\binom{N+n-1}{n}$	$\binom{N}{n}$ (L)	**Nichtununterscheidbare Murmeln**
		Mit Mehrfachbesetzung	**Ohne Mehrfachbesetzung**	**Verteilungen von n Murmeln auf N Plätze**

„Ich bin bester Freund“ 16.01.2006

1.3 Die erweiterte Vierfeldertafel

[Beispiel] $\Omega =$ Schüler einer Klasse;

[Unterteilung in] 2. Fremdsprache:

- $L =$ Lateinschüler;
  $F =$ Französischschüler;
- $L \cap F = \varnothing$;
  $L \cup F = \Omega$;

[Unterteilung nach] Geschlecht:

- $M =$ Mädchen;
  $B =$ Buben;
- $M \cap B = \varnothing$;
  $M \cup B = \Omega$;

Absolute Häufigkeiten:

	M	B	
L	5	12	17
F	4	8	12
	9	20	29

17.01.2006

1.4 Das Axiomensystem von Kolmogorow

Das Axiomensystem von Kolmogorow legt Bedingungen für Wahrscheinlichkeiten fest, sagt aber nichts darüber, wie man zu Wahrscheinlichkeiten kommt.

Vergleich: Inhalt $I(A)$ einer Fläche A

- $I(A) \geq 0$;
- $I(A_1 \cup A_2) = I(A_1) + I(A_2)$ falls $A_1 \cap A_2 = \varnothing$;
- $I(\text{Quadrat der Seitenlänge } 1) = 1$;

Hier: Ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist eine Funktion $P\colon \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ mit $A \mapsto P(A) \in \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

- $P(A) \geq 0$; (Nichtnegativität)
- $P(\Omega) = 1$; (Normierung)
- $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$ falls $A_1 \cap A_2 = \varnothing$; (Additivität)

Das Paar (Ω, P) heißt Wahrscheinlichkeitsraum.

Folgerungen: Kap. 6.2.3 und 6.2.4 18.01.2006

1.5 Die bedingte Wahrscheinlichkeit

	M	B	
L	5	12	17
F	4	8	12
	9	20	29

$\Omega = M \cup B = L \cup F$;

Wir nehmen Ω als Laplace-Raum an.

$P_\Omega(M \cup L) = \frac{5}{29}$; $\quad P_\Omega(M) = \frac{9}{29}$; $\quad P_\Omega(L) = \frac{17}{29}$;

	M	**B**
L	$M \cap L$	$B \cap L$
F	$M \cap F$	$B \cap F$

$\Omega = (M \cap L) \cup (M \cap F) \cup (B \cap L) \cup (B \cap F)$; ([jeweils] paarweise disjunkte Mengen)

$L = (M \cap L) \cup (B \cap L)$;

$F = (M \cap F) \cup (B \cap F)$;

$M = (M \cap L) \cup (M \cap F)$;

$B = (B \cap L) \cup (B \cap F)$;

$\Omega_M = M$;

$P_M(L) = \frac{5}{9} = \frac{P_\Omega(M \cap L) \cdot 29}{P_\Omega(M) \cdot 29} = \frac{P_\Omega(M \cap L)}{P_\Omega(M)}$; (Wahrscheinlichkeit von L unter der Bedingung M; Der Index Ω wird in aller Regel weggelassen; Def. B. S. 114)

$P_M \colon \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ mit $E \mapsto \frac{P(M \cap E)}{P(M)}$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß (vgl. B. S. 116 oben) und (Ω, P_M) ist ein Wahrscheinlichkeitsraum.

```
                    ---------o---------
                   /                   \
        P(M)=9/29 /                     \ P(B)=20/29
                 /                       \
               o M                      B o
              / \                        / \
   P_M(L)=5/9 /   \ P_M(F)=     P_B(L)= /   \ P_B(F)=8/20
            /     \ =4/9       =12/20 /     \
           o L   F o                o L   F o
```

```
                    ---------o---------
                   /                   \
       P(L)=17/29 /                     \ P(F)=12/29
                 /                       \
               o L                      F o
              / \                        / \
 P_L(M)=5/10 /   \ P_L(B)=      P_F(M)= /   \ P_F(B)=8/12
            /     \ =12/17      =4/12 /     \
           o M   B o                o M   B o
```

$P_M(L) = \frac{P(M \cap L)}{P(M)}$; $\Rightarrow P(M \cap L) = P(M)P_M(L) = \frac{9}{29}\frac{5}{9} = \frac{5}{29}$; (1. Pfadregel, vgl. B. S. 120)

$P(L) = P(L \cap M) + P(L \cap B) = \frac{9}{29}\frac{5}{9} + \frac{20}{29}\frac{12}{20} = \frac{17}{29}$; (2. Pfadregel, vgl. B. S. 120)

Verzweigungsregel:

```
     o
    / \
a /     \ b
 /       \
o         o
```

$a + b = 1$;

$P(A \cap B \cap C) = P(A)\, P_A(B \cap C) = P(A)\, P_A(B)\, P_{A \cap B}(C)$; 25.01.2006

1.6 Formel für die totale Wahrscheinlichkeit

$\Omega = \bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i$ mit paarweise disjunkten E_i;

$A = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \underbrace{(A \cap E_i)}_{\text{paarweise disjunkt}}$;

$P(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A \cap E_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(E_i)P_{E_i}(A)$;

Speziell: $\Omega = A \cup \overline{A}$;

$P(B) = P(A)P_A(B) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B)$;

Formel von Bayes:

Brücke: $P(A \cap B) = P(A)P_A(B) = P(B)P_B(A)$;

$P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A)P_A(B)}{P(A)P_A(B) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B)}$; 31.01.2006

1.7 Unabhängigkeit [Ausfrage]

Idee:

$P(A) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$;

$P(A) = P_\Omega(A) = \frac{P(A \cap \Omega)}{P(\Omega)}$;

$P(A \cap B) = P(A)P(B)$;

Zwei Ereignisse A und B [des gleichen Wahrscheinlichkeitsraums] sind genau dann unabhängig, wenn gilt: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$; 01.02.2006

- Unvereinbarkeit und Unabhängigkeit: nicht möglich
- Unvereinbarkeit $\Rightarrow$ Abhängigkeit
- Vereinbarkeit $\Leftarrow$ Unabhängigkeit
- Vereinbarkeit und Abhängigkeit: möglich

03.07.2006

1.8 Zufallsgrößen

Eine Abbildung $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ heißt Zufallsgröße (-variable).

„Wenn ich eine Wand sehe, muss ich nicht erst durch sie hindurch gehen, um zu sehen, dass es wirklich eine Wand ist.“ 12.07.2006

1.8.1 Die Wahrscheinlichkeitsfunktion

Geg.: (Ω, P), X auf Ω, P_X auf (Ω, P)

$$\tilde{P}_X\colon \mathbb{R} \to [0,1]\,; \quad x \mapsto \begin{cases} P_X(x) & \text{falls } x \in W_X; \\ 0 & \text{sonst;} \end{cases}$$

1.8.2 Die (kumulative) Verteilungsfunktion

Sei P_X eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf (Ω, P) und dem Wertebereich von X $W_X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Die Funktion $F_X\colon \mathbb{R} \to [0,1]\,; \quad x \mapsto P(X \leq x) = P(\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \leq x\})\,;$ heißt (kumulative) Verteilungsfunktion von X auf (Ω, P).

Folgerungen:

$F_X(x) = \sum\limits_{x_i \le x} \underbrace{P(X = x_i)}_{P_X(x_i)}$, da $\bigcup\limits_{i=1,2,\ldots,n} \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) = x_i\} = \Omega$; 23.07.2006

1.8.3 Gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung und Unabhängigkeit zweier Zufallsgrößen

$P(X = x \cap Y = y) = P_{X,Y}(x, y)$;

(Ω, P) sei ein Wahrscheinlichkeitsraum und X und Y seien Zufallsgrößen auf Ω mit den Wertemengen W_X und W_Y.

a) Die Funktion $P_{X,Y}\colon W_X \times W_Y \to [0,1]\,; (x, y) \mapsto P(X = x \cap Y = y) = P(\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) = x \wedge Y(\omega) = y\})$ heißt gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung von X und Y.

b) [Gilt für alle $x \in W_X$ und für alle $y \in W_Y$, dass die Ereignisse $X = x$ und $Y = y$ sind unabhängig sind, so sind X und Y unabhängig.] 25.07.2006

Die Ereignisse $X = x$ und $Y = y$ sind unabhängig **für alle** $x \in W_X$ und $y \in W_Y$. $\Leftrightarrow$

$P(X = x \cap Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$ für alle $x \in W_X$ und $y \in W_Y$. $\Leftrightarrow$

$P_{X,Y}(x, y) = P_X(x)P_Y(y)$ für alle $x \in W_X$, $y \in W_Y$. $\overset{\text{D}}{\Leftrightarrow}$

X und Y sind unabhängig.

15.09.2006

1.8.4 Erwartungswert $E(X)$ einer Zufallsgröße X über (Ω, P) mit der Wertemenge $W_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

$E(X) := x_1 P(X = x_1) + x_2 P(X = x_2) + \cdots + x_n P(X = x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$;

„Im Grund sitzt keiner gescheit, aber alle halbwegs gut“

$E(X) = x_1 \sum\limits_{\omega_i \in (X = x_1)} P(\{\omega_i\}) + x_2 \sum\limits_{\omega_i \in (X = x_2)} P(\{\omega_i\}) + \cdots + x_n \sum\limits_{\omega_i \in (X = x_n)} P(\{\omega_i\}) = \sum\limits_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\{\omega\})$;

„weißt, einmal gehst ´rein [ins Haus] und einmal ´raus; was war jetzt richtig?“ 18.09.2006

Rechnen mit Erwartungswerten

- X sei eine Zufallsgröße auf (Ω, P) mit der Wertemenge $W_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

  $Y := aX + b; \quad a, b \in \mathbb{R};$

  $Y \colon \Omega \to W_Y = \{ax + b \,|\, x \in W_X\}\,; \quad \omega \mapsto aX(\omega) + b;$

  $E(Y) = E(aX+b) = \sum\limits_{x \in W_X} (ax+b)\, P(X = x) = \sum\limits_{x \in W_X} [axP(X = x) + bP(X = x)] = a \sum\limits_{x \in W_X} xP(X = x) + b \sum\limits_{x \in W_X} P(X = x) = aE(X) + b;$

- X und Y seien Zufallsgrößen über (Ω, P) mit den Wertemengen $W_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ und $W_Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$.

  $E(X+Y) = \sum\limits_{\omega \in \Omega} [X(\omega)P(\{\omega\}) + Y(\omega)P(\{\omega\})] = \sum\limits_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\{\omega\}) + \sum\limits_{\omega \in \Omega} Y(\omega)P(\{\omega\}) = E(X) + E(Y);$

20.09.2006

- Seien X und Y unabhängige Zufallsgrößen über (Ω, P) mit den Wertemengen $W_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ und $W_Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$.

  $Z \colon \Omega \to W_Z$ (Wertemenge) $\quad \omega \mapsto X(\omega)Y(\omega);$

$$
\begin{aligned}
E(XY) &= \sum_{\substack{x \in W_X \\ y \in W_Y \\ xy \in W_Z}} xyP(X = x \cap Y = y) = \\
&= \sum_{\substack{x \in W_X \\ y \in W_Y \\ xy \in W_Z}} xyP(X = x \cap Y = y) + \underbrace{\sum_{\substack{x \in W_X \\ y \in W_Y \\ xy \notin W_Z}} xy\, \underbrace{P(\underbrace{X = x \cap Y = y}_{\varnothing})}_{0}}_{0} = \\
&= \sum_{\substack{x \in W_X \\ y \in W_Y}} xyP(X = x \cap Y = y) = \sum_{\substack{x \in W_X \\ y \in W_Y}} xP(X = x)\, yP(Y = y) = \\
&= \sum_{x \in W_X} xP(X = x) \cdot \sum_{y \in W_Y} yP(Y = y) = \\
&= E(X)E(Y);
\end{aligned}
$$

25.01.2007

1.9 BERNOULLIexperimente und -ketten

Ein Zufallsexperiment mit $|\Omega| = 2$ heißt „BERNOULLIexperiment".

Übliche Bezeichnungen: $\Omega = \{0, 1\}$, 0: Niete, 1: Treffer

Mit (Ω, P): $P(\{0\}) = q,\ P(\{1\}) = p$

Die Hintereinanderausführung von BERNOULLIexperimenten gleicher Trefferwahrscheinlichkeit ohne gegenseitige Beeinflussung nennt man „BERNOULLIkette".

1.9.1 Modell der BERNOULLIkette

$\Omega = \{0, 1\}^2; \quad n \in \mathbb{N}; \qquad (\Omega, P)$

Die Ereignisse $E_i = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \in \Omega \,|\, \omega_i = 1\}$ ($|E_i| = 2^{n-1}$), $i = 1, 2, \dots, n$ sind unabhängig und haben alle dieselbe Wahrscheinlichkeit.

n und p sind Parameter der Kette, n [nennt man] auch „Länge der Kette".

1.9.2 [Bestimmung der Minimalkettenlänge für Trefferwahrscheinlichkeit β]

Bestimmung der Kettenlänge n dafür, dass mindestens ein Treffer mit der Wahrscheinlichkeit β auftritt.

$P(\overline{\text{kein Treffer}}) = 1 - P(\text{kein Treffer}) = 1 - q^n \geq \beta; \Leftrightarrow$

$1 - \beta \geq q^n; \Leftrightarrow$ [beide Seiten kleiner 1]

$\log_q [1 - \beta] = \frac{\ln[1-\beta]}{\ln[1-p]} \leq n;$

[n natürlich aufrunden, falls nicht ganze Zahl]

[Mit X Anzahl der Treffer:]

$P(X = k) = B(n, p, k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k};$

$\sum\limits_{i=0}^{k} B(n, p, i) = P(X \leq k);$ 29.01.2007

1.9.3 Formel von Bernoulli

[Mit einer] BERNOULLIkette mit den Parametern n und p [und] X: Anzahl der Treffer

Das Wahrscheinlichkeitsmaß (Wahrscheinlichkeitsverteilung) $P_p^n \colon \mathcal{P}(\{0,1\}^n) \to [0,1]$ mit $P_p^n(X = k) = B(n,p;k)$ heißt „Binomialverteilung $B(n,p)$". 30.01.2007

Die Zufallsgröße X [ist] binomialverteilt.

(Kumulative) Verteilungsfunktion:

$F(n,p;k) = P_p^n(X \leq x) = \sum\limits_{k \leq x} B(n,p;k);$

1.9.4 Erwartungswert und Varianz

BERNOULLIkette mit den Parametern n und p [und] X: Anzahl der Treffer

X_i: Anzahl der Treffer beim i-ten BERNOULLIexperiment

$E(X_i) = p \cdot 1 + q \cdot 0 = p;$

$E(X) = E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n) = np;$

$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = n \,\mathrm{Var}(X_i) = n \left[(1-p)^2 \, p + (0-p)^2 \, q\right] = npq;$ 27.03.2007

1.10 Hypothesentests

Einfache Hypothesen
: p hat einen festen Wert.

Zusammengesetzte Hypothesen
: p nimmt mehrere Werte an, bei uns Werte aus einem [einzigen] Intervall, z.B. $p \in \left[0, \frac{3}{4}\right]$.

Einseitiger Test
: Für jedes $x \in \mathrm{An}\, H_1$ gilt: $x < b$ für jedes $b \in \mathrm{Ab}\, H_1$ oder umgekehrt.

```
       An      Ab
      ____  _____
     /    \/     \
   --|----------|--
     \__________/
        W_X
```

Zweiseitiger Test

```
    Ab    An    Ab
   ___  _____  ___
  /   \/     \/   \
--|-------------|--
  \_____________/
        W_X
```

Zwei zusammengesetzte Hypothesen der Form

$H_1\colon p \in [0, p_0]\,;\qquad H_2\colon p \in\,]p_0, 1]\,;$

$\mathrm{An}\, H_1 = \{0, 1, \ldots, k\};\qquad \mathrm{Ab}\, H_1 = \{k+1, k+2, \ldots, n\}$; für $k \in \{0, \ldots, n-1\}$;

Die Sicherheits- und Irrtumswahrscheinlichkeiten als Funktion der Trefferwahrscheinlichkeit bei fester Kettenlänge und festem k:

$f_{n,k}(p) = P_p^n(X \leq k)$: monoton fallend

$g_{n,k}(p) = P_p^n(X > k)$: monoton steigend

Für $p \in [0, p_0]$ gilt: $P_p^n(X \leq k) \geq P_{p_0}^n(X \leq k);\qquad P_p^n(X > k) \leq P_{p_0}^n(X > k);$

Für $p \in\,]p_0, 1]$ gilt: $P_p^n(X \leq k) \leq P_{p_0}^n(X \leq k);\qquad P_p^n(X > k) \geq P_{p_0}^n(X > k);$

- Risiko 1. Art für H_1:
  $P_p^n(X > k) \leq P_{p_0}^n(X > k)$; ($p \in [0, p_0]$)
- Sicherheitswahrscheinlichkeit für H_1:
  $P_p^n(X \leq k) \geq P_{p_0}^n(X \leq k)$; ($p \in [0, p_0]$)
- Risiko 2. Art für H_1:
  $P_p^n(X \leq k) \leq P_{p_0}^n(X \leq k)$; ($p \in\,]p_0, 1]$)
- Sicherheitswahrscheinlichkeit für H_2:
  $P_p^n(X > k) \geq P_{p_0}^n(X > k)$; ($p \in\,]p_0, 1]$)