14.11.2005

# 1 Tests

## 1.1 1. Klausur am 9.11.2005

1. Berechne $\int\limits_1^5 \left(\frac{1}{4}x^3 - 3x + 5\right) \mathrm{d}x$.

   $\int\limits_1^5 \left(\frac{1}{4}x^3 - 3x + 5\right) \mathrm{d}x = \ldots = 23;$

2. Berechne den Inhalt der Fläche, die von den Graphen der Funktionen $\mathrm{f}$ und $\mathrm{g}$ eingeschlossen wird. Dabei ist

   $\mathrm{f}(x) = 5x^3 - 2x^2 - 6; \quad x \in \mathbb{R};$ und
   $\mathrm{g}(x) = 3x^3 + 2x^2 + 10x - 18; \quad x \in \mathbb{R};$

   $\mathrm{f}(x) - \mathrm{g}(x) = 2x^3 - 4x^2 - 10x + 18;$

   Nullstellen: $-2$, $1$, $3$

   $\phi'(x) = \mathrm{f}(x) - \mathrm{g}(x);$

   $\phi(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{4}{3}x^3 - 5x^2 + 12x;$

   $A = |\phi(1) - \phi(-2)| + |\phi(3) - \phi(1)| = \frac{253}{6};$

   „Aber es ist in keiser Weise stringent[1]“

3. Gegeben sind die Geraden $\mathrm{g} : x = 1$ und $\mathrm{h} : y = 1$ sowie die Funktion $\mathrm{f}_a$, $a \in \mathbb{R}$ mit $\mathrm{f}_a(x) = a \cdot x^2$. [Spätere Ergänzung: $x \geq 0$]

   Berechne den Inhalt der angegebenen Fläche.

   **a)** Fläche, die von den Geraden $\mathrm{g}$ und $\mathrm{h}$ und dem Graphen von $\mathrm{f}_4$ eingeschlossen ist.

   $A = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} 4x^2 \,\mathrm{d}x - \frac{1}{2} = \ldots = \frac{2}{3};$

   **b)** Fläche, die von der Geraden $\mathrm{g}$ und $\mathrm{h}$ und dem Graphen von $\mathrm{f}_{\frac{1}{5}}$ eingeschlossen ist.

   $A = \sqrt{5} - 1 - \int\limits_1^{\sqrt{5}} \frac{1}{5}x^2 \,\mathrm{d}x = \ldots = \frac{2}{3}\sqrt{5} - \frac{14}{15};$

[1] „folgerichtig, einsichtig, nachvollziehbar“

„das kann man halt noch eintippen und dann kommt halt irgendwas ´raus“

**c)** $A = 1 - 2\int\limits_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3};$

4. Für $0 < a < b$ sei $q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$, $n \in \mathbb{N}$ und $x_k = a \cdot q^k$, $k = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. 16.11.2005

**a)** Zeige, dass gilt: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$;

$x_0 = a \cdot q^0 = a;$

$x_n = a \cdot q^n = a\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}\right)^n = a \cdot \frac{b}{a} = b;$

$x_{k+1} = x_k \cdot q > x_k$, da $q > 1$, weil $b > a > 0$.

**b)** Bestimme für festes $n$ den maximalen Abstand $d_n$ benachbarter Stellen $x_k$ und untersuche das Verhalten von $d_n$ für $n \to \infty$.

$x_{k+1} - x_k = aq^{k+1} - aq^k = aq^k\,(q-1)$, maximal für $k = n-1$.

$d_n = b - a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n-1}{n}} \to b - a\left(\frac{b}{a}\right)^1 = b - b = 0$ für $n \to \infty$.

**c)** Zeige, dass die Untersumme zur Funktion $f_\alpha$, $a \in \mathbb{N}$ mit $f_\alpha(x) = x^\alpha$, $x \in [a, b]$ bezogen auf die Stellen $x_k$ gegeben ist durch $a^{\alpha+1} \cdot (q-1) \cdot \left(1 + q^{\alpha+1} + q^{2(\alpha+1)} + \cdots + q^{(n-1)(\alpha+1)}\right)$

$$\begin{aligned}
s_n &= (aq - a)\,a^\alpha + (aq^2 - aq)\,(aq)^\alpha + (aq^3 - aq^2)\,(aq^2)^\alpha + \cdots + \\
&+ (aq^n - aq^{n-1})\,(aq^{n-1})^\alpha = \\
&= a \cdot a^\alpha \cdot (q-1) \cdot \left(1 + q \cdot q^\alpha + q^2 \cdot q^{2\alpha} + \cdots + q^{n-1} \cdot q^{(n-1)\alpha}\right) = \\
&= a^{\alpha+1}\,(q-1)\left(1 + q^{\alpha+1} + q^{2(\alpha+1)} + \cdots + q^{(n-1)(\alpha+1)}\right);
\end{aligned}$$

14.11.2005

5. Betrachtet werden die auf $[a, b]$ definierten Funktionen $\mathrm{f}$, $\mathrm{F}_k$ und $\mathrm{F}_l$ mit $\mathrm{F}_k(x) = \int\limits_k^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t$ und $\mathrm{F}_l(x) = \int\limits_l^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t$ gemäß folgender Skizze:

[Skizze]

**a)** Skizziere in ein Koordinatensystem möglichst genau die Graphen von $\mathrm{F}_k$ und $\mathrm{F}_l$.

**b)** Gib einen Zusammenhang zwischen $\mathrm{F}_k$ und $\mathrm{F}_l$ an.

**c)** Skizziere den Graphen einer Stammfunktion von $f$, die nicht als Integralfunktion darstellbar ist, und begründe deine Wahl.