0.1 3. Klausur am 5.4.2006

1. Bei der Einschulung wurden alle Schüler eines Jahrgangs einem Eignungstest unterzogen. Am Ende der Schulzeit bestehen $35\,\%$ dieser Schüler die Abschlussprüfung nicht. Davon hatten $85\,\%$ im Eignungstest ein schlechtes Ergebnis. Von den Schülern mit bestandener Abschlussprüfung hatten $2\,\%$ im Eignungstest schlecht abgeschnitten. (6 P)

   a) Stelle diesen Sachverhalt in einem Baumdiagramm dar und gib dabei für jeden Ast die zugehörige Wahrscheinlichkeit an. (2 P)

   A: Abschlussprüfung bestanden
   E: Eignungstest gut

```
               +---+---+
      0,65 /           \ 0,35
          /             \
         /               
        A               Ā
 0,98 / \ 0,02   0,15 / \ 0,85
     /   \           /   \
    E     Ē         E     Ē
```

   b) Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Schüler mit schlechtem Ergebnis im Eignungstest die Abschlussprüfung nicht besteht. (4 P)

   $P_{\overline{E}}(\overline{A}) = \frac{P(\overline{A}\cap\overline{E})}{P(\overline{E})} = \frac{P(\overline{A}\cap E)}{P(A)P_A(E)+P(\overline{A})P_{\overline{A}}(E)} \approx 95{,}8\,\%$;

2. Aus der Menge der ersten dreißig natürlichen Zahlen wird zufällig eine Zahl ausgewählt. Untersuche, ob die Geradzahligkeit der Zahl selbst stoachstisch unabhängig ist von der Geradzahligkeit ihrer Quersumme. (4 P)

```
     *     *     *     *
  1  2  3  4  5  6  7  8  9 10
     *     *     *     *

                             *
 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
  *     *     *     *     *  *

     *     *     *     *
 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30
     *     *     *     *
```

$|G| = 15; \quad |QG| = 14; \quad |G \cap QG| = 9;$
$P(G)P(QG) = \frac{15}{30}\frac{14}{30} = \frac{7}{30} \neq \frac{9}{30} = P(G \cap QG);$
$\Rightarrow$ Grund für QG abhängig.

3. Gegeben sind die Ebene $E\colon x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0$ und die Geradenschar $g_a\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ a^2 \end{pmatrix} + k\vec{v_a}$ mit $\vec{v_a} = \begin{pmatrix} 1-a \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $a, k \in \mathbb{R}$. (6 P)

   a) S_a ist die Spitze des Repräsentanten von $\vec{v_a}$, der den Ursprung als Fußpunkt hat. Beschreibe in Worten die geometrische Bedeutung der Menge $M = \{S_a | a \in \mathbb{R}\}$ möglichst genau. (2 P)
   $\vec{v_a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad a \in \mathbb{R};$
   M ist eine Gerade parallel zur x_1-Achse durch den Punkt $(1, 2, 3)$.

   b) Bestimme alle Werte für a, für die gilt: (4 P)
   $g_a \cap E\colon 2 + k\,(1 - a) - 3 + 2k + a^2 + 3k - 1 = 0;$
   $k\,(6 - a) = 2 - a^2;$

   (a) Fall: $6 - a \neq 0;$
   $k = \frac{2-a^2}{6-a}$, d.h. k ist eindeutig bestimmt.

   (b) Fall: $6 - a = 0;$
   $6 = a;$
   $k \cdot 0 \neq 2 - 36;$
   Es gibt keine Lösung für k.

   α**)**
   $|g_a \cap E| = 1;$
   $a \neq 6;$

   β**)**
   $g_a \cap E = \{\}\,;$
   $a = 6;$

   γ**)**
   $g_a \cap E = g_a;$
   Nicht möglich, d.h. es gibt keinen Fall für a.

4. Gegeben sind der Punkt $A(4, 2, 6)$, die Geraden
   $g_1\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad k \in \mathbb{R};$
   $g_2\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} + l\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad l \in \mathbb{R};$

$g_3\colon \vec{X} = \begin{pmatrix}5\\0\\6\end{pmatrix} + m\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix};\quad m \in \mathbb{R}$; und die Ebene

$F\colon \vec{X} = u\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix};\quad u, v \in \mathbb{R}$; (24 P)

a) Zeige, dass sich g_1 und g_2 schneiden und berechne ihren Schnittpunkt. Untersuche g_1 und g_3 auf ihre gegenseitige Lage hin. (6 P)

g_1–g_3: Gleichungssystem nicht lösbar

b) Gib eine vektorielle Parameterdarstellung der Ebene E an, die parallel zur x_3-Achse ist und deren Schnittgerade mit der x_1–x_2-Ebene durch $x_1 - 2x_2 - 6 = 0$ beschrieben ist. (3 P)

$g_1 \cap g_2$: $S(0,0,0)$

$x_1 - 2x_2 - 6 = 0;$

$A(6,0,0);\quad B(0,-3,0);$

$s\colon \vec{X} = \begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix} + \varrho\begin{pmatrix}6\\3\\0\end{pmatrix};\quad \varrho \in \mathbb{R};$

$E\colon \vec{X} = \begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix} + \varrho\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix};\quad \varrho, \sigma \in \mathbb{R};$

c) Zeige, dass F echt parallel zu E ist und g_1 und g_2 in der Ebene F liegen. (9 P)

$F \cap x_1$–x_2-Ebene: $\vec{X} = w\begin{pmatrix}-4+2\\-2+1\\0\end{pmatrix} = w\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix};\quad w \in \mathbb{R};$

$(0,0,0) \in F;$

g_1–F [ergibt Lösbarkeit, Abhängigkeit von einem Parameter]

d) Untersuche, ob es eine Gerade h gibt, die parallel zu E ist und die Geraden g_1, g_2 und g_3 schneidet. Gib gegebenfalls eine Gleichung für h an. (6 P)

$E \parallel F;$

$g_1, g_2 \in F;$

$g_1 \cap g_2 = \{(0,0,0)\};$

h existiert genau dann, wenn $g_3 \cap F \neq \varnothing;$

$g_3 \cap F = \{T\} = \{(4,2,6)\};$

$h = 0T;$

$h\colon \vec{X} = \mu'\begin{pmatrix}4\\2\\6\end{pmatrix} = \mu\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix};$