07.11.2006
08.11.2006
10.11.2006

0.1 5. Klausur am 7.11.2006

1. Ein Torwart hält einen Elfmeter mit der Wahrscheinlichkeit $20\,\%$. Im Training schießt ein Spieler solange aus der Elfmeterposition, bis er zwei Tore erzielt hat, jedoch höchstens viermal. (13 P)

   a) Stelle die Trainingseinheit einschließlich der zugehörigen Wahrscheinlichkeiten in einem Baumdiagramm dar. (5 P)

   [11 Pfade]

   b) Berechne den Erwartungswert der erzielten Tore in einer Trainingseinheit. (8 P)

```
x | 0       | 1             | 2
--+---------+---------------+--------------------------------
P | 0,2^4   | 4*0,8*0,2^3   | 0,8^2+2*0,8^2*0,2+3*0,8^2*0,2
```

   $E(X) = 1{,}9712;$

2. Lackierte Kunststoffteile, z.B. Gehäuse von Außenspiegeln für Fahrzeuge, werden vor der Auslieferung auf optische Mängel hin untersucht. Während seiner gesamten Arbeitszeit fällt ein Kontrolleur bei der Begutachtung eines Kunststoffteils mit $95\,\%$ Wahrscheinlichkeit eine richtige Entscheidung.

   Berechne den Erwartungswert und die Standardabweichung für die Anzahl der falschen Entscheidungen des Kontrolleurs, wenn er a) ein Teil (6 P) bzw. b) zweihundert Teile (6 P) überprüft. (12 P)

   a) $X_1 =$ Anzahl der falschen Entscheidungen bei einem Teil;

```
x1 | 0      | 1
---+--------+----
P  | 95 %   | 5 %
```

   $E(X_1) = 0{,}05;$

   $\mathrm{Var}(X_1) = 0{,}05^2 \cdot 0{,}95 + 0{,}95^2 + 0{,}05 = 0{,}05 \cdot 0{,}95 = 0{,}0475; \quad \sigma(X_1) \approx 0{,}22;$

   b) $X_i =$ Anzahl der falschen Entscheidungen beim i-ten Teil; $\quad i = 1, 2, \ldots, 200;$

   $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_{200};$

   $E(X) = 200 \cdot 0{,}05 = 10;$

$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(X_1 + X_2 + \cdots + X_{200}) = 200\,\mathrm{Var}(X_1) = 9{,}5; \quad \sigma(X) \approx 3{,}08;$

3. Gegeben sind die Punkte $A(8,0,0)$, $B(8,3,0)$, $C_t(4t+5,3,-3t)$ und $D(0,0,6)$. Dabei ist t eine reelle Zahl. (19 P)

   a) Bestimme alle Werte von t, für die das Dreieck ABC_t rechtwinklig und gleichschenklig ist. (6 P)

   b) Berechne den Abstand des Punktes D von der Geraden AC_0 und den Flächeninhalt des Dreiecks AC_0D. (6 P)

   c) Das Volumen der Pyramide $ADBC_t$ ist unabhängig von t (Nachweis nicht verlangt). Gib eine geometrische Deutung dafür an und beweise deine Aussage. (7 P)

4. D, E und F bezeichnen die Mitten der Seiten eines Dreiecks ABC. Gegen den Uhrzeigersinn werden die genannten Punkte in der Abfolge $ADBECF$ durchlaufen. S ist ein Punkt der Ebene, in der das Dreieck liegt. Wir betrachten folgende Aussage:

   Aus $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{SD} = 0$ und $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{SF} = 0$ folgt: $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{SE} = 0$. (13 P)

   a) Fertige eine Skizze an, die die Aussagen widerspiegelt, und formulieren den Satz der Dreieckslehre, den die Aussage ausdrückt. (6 P)

   b) Beweise die Aussage. (2 P)

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{SE} = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) \cdot \left(\overrightarrow{SD} + \underbrace{\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}}_{\overrightarrow{DB}} + \underbrace{\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}}_{\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}}\right) = \underbrace{\overrightarrow{BA}\,\overrightarrow{SD}}_{0} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}\,\overrightarrow{AC} +$$
$$\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{SD} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}^2 = \overrightarrow{AC} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{SD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)}_{\overrightarrow{SF}} = 0;$$

„dann passiert das, wovor ich gewarnt hab´, dass man sich freut. . . “