0.1 6. Klausur am 18.12.2006

1. Gegeben ist die Ebene $E\colon 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 1 = 0$. (12 P)

   a) Erläutere die geometrische Bedeutung der beiden HESSE-normierungen und gib den HESSEterm an. (3 P)

   b) Begründe für einen Punkt im positiven Halbraum von E bezüglich des HESSEvektors mittels einer Skizze die Bedeutung des Werts des HESSEterms für diesen Punkt. (3 P)

   c) Untersuche, welche der Punkte $A(1, 1, 1)$, $B(-1, 3, 5)$, $C(-2, 3, -5)$ im selben Halbraum bezüglich E liegen, und berechne den Abstand von C zu E. (3 P)

   d) Durch Spiegelung von E am Punkt $P(1, 2, 3)$ entsteht die Ebene E'. Bestimme eine Gleichung von E'. (3 P)

2. Ein Zylinder mit unbegrenzt langer Achse a und Radius $\sqrt{2}$ liegt im 1. und 4. Oktanten so zwischen den Ebenen $E\colon x_1 - x_3 = 0$ und $F\colon x_1 = 0$ eingekeilt, dass er E in der Geraden e und F in der Geraden f berührt. (10 P)

   a) Fertige eine aussagekräftige Skizze an, die den Schnitt der x_1–x_3-Ebene mit dem Zylinder und den Ebenen E und F darstellt. (4 P)

   b) Bestimme eine Gleichung für die Achse a. Verwende dazu möglichst wenig elementargeometrische Rechentechniken, sondern setze die Techniken der Vektorgeometrie ein. (6 P)

3. Bestimme eine Stammfunktion von f. Verwende dazu die partielle Integration oder die Substitutionsmethode. (10 P)

   a) $f(x) = \sin x \cdot \cos x; \quad x \in \mathbb{R}$; (3 P)

   b) $f(x) = \frac{x \ln\left(x^2+1\right)}{\sqrt{x^2+1}}; \quad x \geq 0$; (7 P)

4. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$, $x \in \mathbb{R}_0^+$. (12 P)

a) Untersuche das Monotonieverhalten von f sowie das Verhalten von f für $x \to \infty$. Skizziere den Graphen von f. (6 P)

b) Zeige mittels der Substitutionsmethode, dass F mit $F(x) = -\left(e^x + 1\right)^{-1}$, $x \in \mathbb{R}_0^+$ eine Stammfunktion von f ist. (3 P)

c) Die Gerade $x = t \geq 0$, die x-Achse und der Graph von f begrenzen eine unendlich ausgedehnte Fläche.

Berechne den Inhalt dieser Fläche. (3 P)