Mathematik

Ingo Blechschmidt

1. Mai 2007

Inhaltsverzeichnis

21.09.2005

Teil I

Mathematik

1 Analysis

1.1 Stetigkeit und Differenzierbarkeit

1.1.1 Stetigkeit

f stetig in x_0; $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(x_0)$;[1]

1.1.2 Differenzierbarkeit

f ist diffbar an der Stelle x_0; $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\mathrm{f}(x)-\mathrm{f}(x_0)}{x-x_0}$ existiert;

Dieser Grenzwert heißt Ableitung von f an der Stelle x_0 und wird mit $\mathrm{f}'(x_0)$ bezeichnet.

(Ist x_0 Randpunkt von D_f, so sind die Grenzwerte einseitige.)

1.1.3 Satz des Hausmeisters

f ist diffbar auf $]a,b[$, stetig auf $]a,b]$ und $\lim\limits_{x\to b-} \mathrm{f}'(x)$ existiert.

$\Rightarrow$ f ist an der Stelle b von links diffbar, und es gilt:

$\mathrm{f}'_\mathrm{l}(b) = \lim\limits_{x\to b-} \mathrm{f}'(x)$;

Bemerkungen:

[1] Grenzwert von links und von rechts, wenn möglich

- Eine entsprechende Aussage gilt für die rechtsseitige Diffbarkeit.
- f ist an der Stelle x_0 diffbar genau dann, wenn gilt:

  $\mathrm{f}'_{\mathrm{l}}(x_0) = \mathrm{f}'_{\mathrm{r}}(x_0);$

1.1.4 Beispiel

Betrachtet werden die Funktionen f und g mit

$D_{\mathrm{f}} =]a, b]\,; \quad D_{\mathrm{g}} =]b, c[\,;$

und die Funktion h mit

$$\mathrm{h}(x) = \begin{cases} \mathrm{f}(x) & \textbf{für } x \in]a, b]\,; \\ \mathrm{g}(x) & \textbf{für } x \in]b, c[\,; \end{cases}$$

d.h. $D_{\mathrm{h}} =]a, c[\,;$

f und g besitzen die Stammfunktionen F und G.

Beschreibe eine Vorgehensweise, um herauszufinden, ob h eine Stammfunktion besitzt und gib gegebenfalls eine an.

Vorläufiges H:

$$\mathrm{H}(x) = \begin{cases} \mathrm{F}(x) & \textbf{für } x < b; \\ \mathrm{G}(x) & \textbf{für } x > b; \end{cases}$$

$\lim_{x \to b} \mathrm{H}(x) = \mathrm{H}(b);$

$\lim_{x \to b-} \mathrm{H}(x) = \lim_{x \to b-} \mathrm{F}(x);$

$\lim_{x \to b+} \mathrm{H}(x) = \lim_{x \to b+} \mathrm{G}(x);$

1. Fall: Einer der Grenzwerte existiert nicht.
2. Fall: Beide Grenzwerte existieren und stimmen überein.

   Diesen Grenzwerte nehmen wir als $\mathrm{H}(b)$.
3. Fall: Beide Grenzwerte existieren – etwa φ und γ –, aber stimmen nicht überein.

   Wir verwerfen das alte $\mathrm{H}(x)$ und nehmen

$$\mathrm{H}(x) = \begin{cases} \mathrm{F}(x) & \text{für } x < b; \\ \varphi & \text{für } x = b; \\ \underbrace{\mathrm{G}(x) + \varphi - \gamma}_{\text{Neues } \mathrm{G}(x)} & \text{für } x > b; \end{cases}$$

Überprüfung auf Differenzierbarkeit an der Stelle b:

1. Methode: Grenzwert des Differenzenquotienten
   $\lim\limits_{x \to b-} \frac{\mathrm{H}(x) - \mathrm{H}(b)}{x-b} = \lim\limits_{x \to b-} \frac{\mathrm{F}(x) - \mathrm{H}(b)}{x-b};$
   $\lim\limits_{x \to b+} \frac{\mathrm{H}(x) - \mathrm{H}(b)}{x-b} = \lim\limits_{x \to b+} \frac{\mathrm{G}(x) - \mathrm{H}(b)}{x-b};$
   Stimmen diese Grenzwerte überein, ist H Stammfunktion von h, andernfalls nicht.

2. Methode: Satz des Hausmeisters
   Nach Konstruktion ist H stetig an der Stelle b.
   $\lim\limits_{x \to b-} \mathrm{F}'(x) = \lim\limits_{x \to b-} \mathrm{f}(x);$
   $\lim\limits_{x \to b+} \mathrm{G}'(x) = \lim\limits_{x \to b+} \mathrm{g}(x);$
   Wenn die beiden Grenzwerte existieren und gleich sind, ist $\mathrm{H}(x)$ diffbar. Wenn ferner $\mathrm{H}'(b) = \mathrm{f}(b)$ gilt, ist H eine Stammfunktion von h.

02.10.2005

1.2 Das bestimmte Integral

„Ich geb´ euch immer so dumme Antworten, weil ihr mir in einer Vagheit Fragen stellt – bei denen hab´ ich keine Chance, richtig zu antworten.“

„Vor Newton ist das Fallen eines Steines im wahrsten Sinne des Wortes ungesetzlich gewesen – viele sagen sogar, vor Newton sind Steine [gar] nicht gefallen.“

1.2.1 Spezielle Flächen

$F = \{P(x,y) \,|\, x \in [a,b] \wedge y \in [0, \mathrm{f}(x)] \wedge \mathrm{f} \text{ stetig auf } [a,b]\}\,;$

Wie lässt sich der Inhalt der Fläche, $\mathrm{A}_a(x)$, bestimmen?

Wie betrachten das Änderungsverhalten von $\mathrm{A}_a(x)$:

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{A}_a(x) + h \min\limits_{[x,x+h]} \mathrm{f}(x) & \leq & \mathrm{A}_a(x+h) & \leq & \mathrm{A}_a(x) + h \max\limits_{[x,x+h]} \mathrm{f}(x); \\ \mathrm{A}_a(x) - h \min\limits_{[x-h,x]} \mathrm{f}(x) & \geq & \mathrm{A}_a(x-h) & \geq & \mathrm{A}_a(x) - h \max\limits_{[x-h,x]} \mathrm{f}(x); \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \min\limits_{[x,x+h]} \mathrm{f}(x) & \leq & \frac{\mathrm{A}_a(x+h)-\mathrm{A}_a(x)}{h} & \leq & \max\limits_{[x,x+h]} \mathrm{f}(x); \\ \mathrm{f}(x) & \leq & \mathrm{A}_a'(x) & \leq & \mathrm{f}(x); \end{array}$$ 05.10.2005

„Weil die einen Doofen von den anderen Doofen gerne gelobt werden“

Die Flächenfunktion ist eine Stammfunktion der Randfunktion, und zwar die Stammfunktion, für die gilt:

$\mathrm{A}_a(a) = 0;$ 24.10.2005

Für $\mathrm{f}(x) \leq 0$ auf $[a,b]$ soll sein:

$$\int\limits_a^b \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x := -\int\limits_a^b -\mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x \leq 0;$$

[B. S. 41]

[B. S. 46: $\mathrm{F}'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int\limits_k^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{f}(x);$] 25.10.2005

f integrierbar über $[a,b]$ und dort $\mathrm{F}' = \mathrm{f}$.

Dann gilt: $\int\limits_a^b \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a);$

1.2.2 Eigenschaften des bestimmten Integrals

- $\int\limits_a^b k\mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = k \int\limits_a^b \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x; \quad k \in \mathbb{R};$

„Ja ich bin nicht meine Skizze“
„Ich bin nicht mal meine Stimme“
„sonst würde ich ja »meine Stimme« heißen“

- $\int\limits_a^b [\mathrm{f}(x) + \mathrm{g}(x)]\ \mathrm{d}x = \int\limits_a^b \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_a^b \mathrm{g}(x)\,\mathrm{d}x;$
- $\int\limits_a^b \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_b^c \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x;$

30.10.2005

$$-\int\limits_a^b \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x =: \int\limits_b^a \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x; \quad a < b;$$

[in der Ableitung steckt die Richtung] 11.10.2005

1.3 Die Integralfunktion

f stetig auf $[a, b]$.
$k \in [a, b]\,;$
$\phi\colon x \mapsto \int\limits_k^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t; \quad x \in [a, b]\,;$
Es gilt: $\phi' = \mathrm{f};$
„Ist dir der logische Irrsinn deiner Aussage bewusst?“
„Brrr. . . da brauch´ ich ´ne mentale Dusche“ 19.06.2006

1.3.1 Logarithmische Integration

$(\ln \mathrm{f}(x))' = \frac{1}{\mathrm{f}(x)} \cdot \mathrm{f}'(x) = \frac{\mathrm{f}'(x)}{\mathrm{f}(x)};$
$\mathrm{f}(x) > 0; \quad x \in \mathbb{D}_\mathrm{f};$ 12.10.2005

1.4 Vollständige Induktion (Beweisverfahren für Aussagen $A(n)$; $\quad n \in \mathsf{N}$)

1. Schritt: Induktionsanfang: Die Aussage wird für $n = 1$ bewiesen.
2. Schritt: Induktionsschritt von n auf $n + 1$

   Unter der Voraussetzung, dass die Aussage für n gilt, wird bewiesen, dass die Aussage für $n + 1$ gilt.

„Im Grunde geht es um die Frage »Was ist Realität«"

„Weil sie wissen, dass Sprechen Realität schafft."

„Wenn ich mich da hineinintegriere [in nicht-algebraischen Kontext], dann [. . .]"

„Und das [was man aufgeschrieben hat] starrt mich an"

„Meine Hand ist nicht deine Hand"

„Und plötzlich entdecke ich hier jemanden von dem ich nie wusste, [dass] er [hier] wohnt"

„*monotone, befehlende Stimme* Die Kreativität ist per Gesetz durchzuführen." 08.05.2006

1.5 Die Exponentialfunktion

1.5.1 Einführende Beispiele

[. . .]

Allgemeine Struktur der auftretenden Gleichungen:

$\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(x_0) + \mathrm{f}(x_0)k\,(x - x_0)\,; \quad x \geq x_0$; mit einer Funktion $\mathrm{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;

Bemerkungen:

- Wird der Zins dem Kapital zugeschlagen, gilt die angegebene Gleichung nur bis zum Zeitpunkt t_Z des Zuschlags. Für $t > t_Z$ muss $K(t_0)$ durch $K(t_Z)$ ersetzt werden.

  Für je zwei geeignete Zeitpunkte t_1 und t_2 mit $t_1 < t_2$ gilt also:

  $K(t_2) = K(t_1) + K(t_1)k\,(t_2 - t_1)\,;$ 10.05.2006

[Einschub:]
$\mathrm{f}'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\mathrm{f}(x)-\mathrm{f}(x_0)}{x-x_0};$
$\mathrm{f}'(x_0) \approx \frac{\mathrm{f}(x)-\mathrm{f}(x_0)}{x-x_0};$
$\mathrm{f}'(x_0) \cdot (x - x_0) \approx \mathrm{f}(x) - \mathrm{f}(x_0);$
$\mathrm{f}'(x_0) \cdot x - \mathrm{f}'(x_0) \cdot x_0 \approx \mathrm{f}(x) - \mathrm{f}(x_0);$
$\mathrm{f}(x) \approx \underbrace{\mathrm{f}(x_0) + \mathrm{f}'(x_0)x - \mathrm{f}'(x_0)x_0}_{\mathrm{t}(x)};$
$\mathrm{f}(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{f}^{(k)}(x_0)\cdot(x-x_0)^{(k)}}{k!};$ (Taylorreihe, [Lagrangereihe bei negativen k])

- Auch in den restlichen Beispielen gilt die jeweilige Gleichung für $t = t_0 + \Delta t$ bzw. $x = x_0 + \Delta x$ nur für entsprechend kleine Δt bzw. Δx. Beim radioaktiven Zerfell etwa muss nach einer Zeitdauer $\Delta t \ll$ Zerfallsdauer die Zahl der nicht zerfallenen Atome aktualisiert werden.
- Überträgt man obige Überlegung auf f, ergibt sich für beliebige x_1, x_2 unter der Voraussetzung der Differenzierbarkeit
  $\mathrm{f}(x_2) = \mathrm{f}(x_1) + k\mathrm{f}(x_1) \cdot (x_2 - x_1)\,;$
  $\lim\limits_{x_2 \to x_1} \frac{\mathrm{f}(x_2)-\mathrm{f}(x_1)}{x_2-x_1} = \lim\limits_{x_2 \to x_1} k\mathrm{f}(x_1) = k\mathrm{f}(x_1);$

12.05.2006

1.5.2 Wie sieht der Funktionsterm von f aus?

Zurück: $k = 1;$

$\mathrm{f}'(x) = \mathrm{f}(x);$

Geometrische Bedeutung: Steigung und Funktionswert an einer Stelle sind gleich.

$\mathrm{f}(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k x^k;$

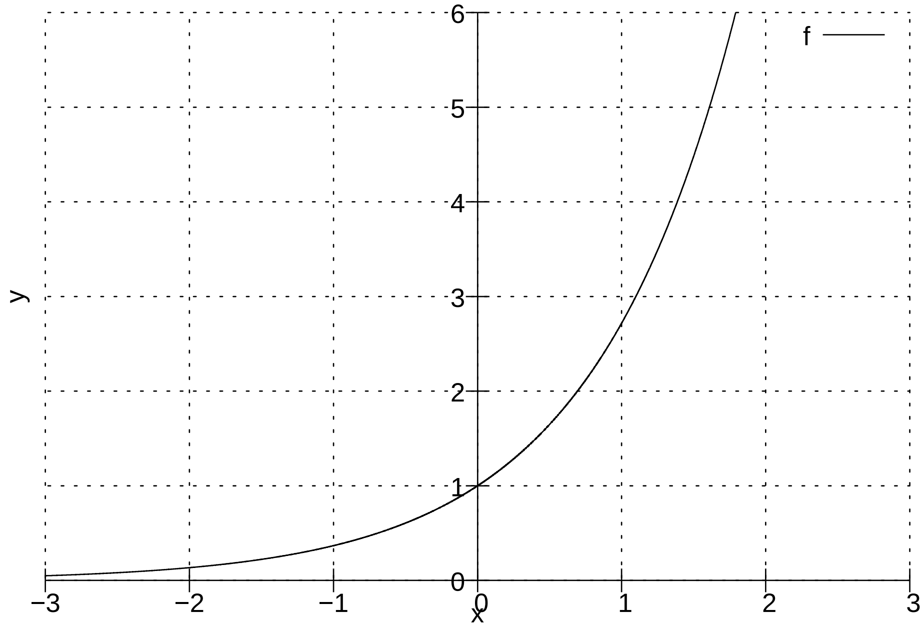
$\mathrm{f}'(x) = 0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1} = \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_{j+1}\,(j+1)\,x^j;$

$\mathrm{f}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2\cdot3} + \frac{x^4}{2\cdot3\cdot4} + \cdots = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!};$

$\mathrm{f}(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R};$

$\mathrm{f}'(x) = \mathrm{f}(x);$

$\mathrm{f}(0) = 1 = \mathrm{f}'(0);$



$\mathrm{f}(x)$ lässt sich auch in der Form e^x schreiben, also das Exponentialfunktion mit $e = \lim\limits_{|x|\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ (EULERsche Zahl, $\approx 2{,}7$).

$\mathrm{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, \quad x \mapsto e^x$ (natürliche Exponentialfunktion)

Auch $\varphi(x) = ae^x$, $a \neq 0$ erfüllt die Bedingungen.

$\lim\limits_{x\to\infty} e^x = \infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$; ($x$-Achse ist Asymptote für $x \to -\infty$)

$k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,;$

$\mathrm{f}_k(x) = ae^{kx};$

$\mathrm{f}_k'(x) = ae^{kx}\,(kx)' = kae^{kx} = k\mathrm{f}_k(x);$

Rechengesetze für Potenzen vgl. B. S. 77. 19.05.2006

1.5.3 Ableitung beliebiger Exponentialfunktionen

$\mathrm{g}(x) = b^x; \quad b > 0; x \in \mathbb{R};$

$\mathrm{g}(x) = \left(e^{\ln b}\right)^x = e^{x\cdot\ln b};$

$\mathrm{g}'(x) = x^{x\cdot\ln b} \cdot \ln b = \left(e^{\ln b}\right)^x \cdot \ln b = b^x \cdot \ln b;$ 29.05.2006

1.6 Funktion und Umkehrfunktion

Eine Funktion $\mathrm{f}\colon A \to B$ ordnet jedem $x \in A$ (**Definitionsmenge**) **genau** einen Wert $y \in B$ (Zielbereich) zu; man schreibt dafür $y = \mathrm{f}(x)$ und nennt $\mathrm{f}(x)$ den Funktionsterm von f für das Argument (die Variable) x.

Ist jedes $y \in B$ auch Funktionswert von f, so heißt f surjektiv.

Folgt für alle $x_1, x_2 \in A$ mit $x_1 \neq x_2$, dass $\mathrm{f}(x_1) \neq \mathrm{f}(x_2)$, so heißt f injektiv.

Die Menge aller Funktionswerte von f heißt **Wertemenge** von f.

Die Umkehrfunktion von f **soll** jedem Element aus B „sein" (genau ein) Element aus A zuordnen. Dazu muss f bijektiv[2] sein.

$\mathrm{f}\colon A \leftrightarrow B : \mathrm{f}^{-1}$;

Für alle $a \in A$ gilt: $\mathrm{f}^{-1}(\mathrm{f}(a)) = a$;
Für alle $b \in B$ gilt: $\mathrm{f}(\mathrm{f}^{-1}(b)) = b$;

1.6.1 Speziell [bei der Exponentialfunktion]

$\mathrm{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, \quad x \mapsto e^x$;

f ist echt monoton steigend auf der Definitionsmenge, also injektiv. 31.05.2006

„Mathematik ist wie ein Brennspiegel, die nur betrachtet, was eh schon da ist"

„Da ist die alte Frage, mit wem sprech´ ich denn, wenn ich mit spreche. . . ? Und wer bin ich wirklich. . . ?"

Für jedes $y \in \mathbb{R}^+$ gibt es ein $x \in \mathbb{R}$ mit $\mathrm{f}(x) = e^x = y$. Also ist f surjektiv.

$\Rightarrow$ f ist umkehrbar. Umkehrfunktion f^{-1} von f:

$\mathrm{f}^{-1}\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad y = e^x \mapsto x = \ln y$;

Trägt man auch die Argumentwerte von f^{-1} auf der Rechtswertachse und die Funktionswerte von f^{-1} auf der Hochwertachse auf (Spiegelung an der Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten), ergibt sich der Graph von f^{-1}.

$\mathrm{f}^{-1}\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \ln x$;

[2] injektiv und surjektiv

1.6.2 Zusammenhang zwischen der Ableitung von f und f^{-1} an sich entsprechenden Stellen

$\left(\mathrm{f}^{-1}\right)'(x_0) = \frac{1}{\mathrm{f}'(\mathrm{f}^{-1}(x))} \overset{\text{speziell}}{=} \frac{1}{\mathrm{f}(\mathrm{f}^{-1}(x_0))} = \frac{1}{x_0};$

Kurz: $(\ln x)' = \frac{1}{x};$

Folgerungen:

- 1. Fall: $x > 0$: $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln x + C = \ln|x| + C; \quad C \in \mathbb{R};$
- 2. Fall: $x < 0$: $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln -x + C = \ln|x| + C; \quad C \in \mathbb{R};$

$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C; \quad C \in \mathbb{R};$ 13.11.2006

1.7 Uneigentliche Integrale

$F_0(\alpha) = \int\limits_0^\alpha e^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-e^{-x}\right]_0^\alpha = 1 - e^{-\alpha};$

$\lim\limits_{\alpha\to\infty} F_0(\alpha) = 1;$

Uneigentliches Integral mit unbeschränktem Integrationswert:

$$\lim_{\alpha\to\infty} \int\limits_0^\alpha e^{-x}\,\mathrm{d}x =: \int\limits_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x;$$

[Kann konvergieren oder bestimmt oder unbestimmt divergieren.]

„es ist nicht schön, dass so hinzuschreiben, aber wir machen jetzt ja grad´ Physik. . . “

$\lim\limits_{\alpha\to-\infty} \int\limits_\alpha^\beta \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x + \lim\limits_{\gamma\to\infty} \int\limits_\beta^\gamma \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x =: \int\limits_{-\infty}^\infty \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x;$

„ein schlechter Kuchen ist nichts schlimmes“

„langsam kommen wir dazu, Mathematik zu machen, aber das Abitur kommt uns dazwischen. . . “

„mein Ziel besteht darin, mich überflüssig zu machen“ 20.11.2006

1.8 Partielle Integration

$(uv)' = u'\,v + u\,v';$

$u\,v' = (uv)' - u'\,v;$

$\int u\,v'\,\mathrm{d}x = \int (uv)'\,\mathrm{d}x - \int u'\,v\,\mathrm{d}x = uv + C - \int u'\,v\,\mathrm{d}x;$ 27.11.2006

1.9 [Integration durch] Substitution

Kettenregel:

$\phi(t) = F(g(t));\quad \dot{\phi}(t) = F'(g(x)) \cdot g'(t);$

$\int f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t = F(g(t)) + C = \int f(x)\,\mathrm{d}x$ mit $x = g(t);$ 22.01.2007

1.10 Asymptote

a ist Asymptote von f für $x \to \infty \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - a(x)] = 0;$

[Speziell für rationale Funktionen:] $f(x) = r(x) : q(x) = \underbrace{k(x)}_{a(x)} + \frac{z(x)}{q(x)};$

[Polynomdivision!]

„wer hat das [Tafelbild] gemacht? – der Herr Gräupner – ah, ja, ist gut *lobend*“ 11.11.2005

2 Stochastik

2.1 Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechung

- In einer Schublade befinden sich lose 7 Paar Socken. Es werden blind zwei Socken entnommen. Wie viele solcher „Paare“ sind möglich?

  $14 \cdot 13 : 2 = 91;$

- 20 Schülerinnen und Schüler kommen zum Mathematik-Unterricht in das Klassenzimmer: Auf wie viele Arten ist das möglich? 23.11.2005

- Einzeln, Individuen werden unterschieden:
  $\omega = (18, 2, 5, 7, \ldots)$; („Der Schüler mit der Nummer 7 kommt als vierter.“)
  Ein Ergebnis ist ein 20-Tupel, als i-te Komponente ($i = 1, \ldots, 20$) tragen wir die Nummer des Schülers ein, der als i-ter erschien.
  $|\Omega| = 20! \approx 2{,}43 \cdot 10^{18}$;
- 2er-Gruppen: Anzahl der Möglichkeiten, 20 Schüler in 2er-Gruppen einzuteilen:
  * $\frac{20 \cdot 19}{2} = 190$; (1. Paar)
  * $\frac{18 \cdot 17}{2} = 153$; (2. Paar)
  * $\vdots$
  * $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$; (9. Paar)
  * $\frac{2 \cdot 1}{2} = 1$; (10. Paar)

  $\frac{20 \cdot 19}{2} \cdot \frac{18 \cdot 17}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2 \cdot 1}{2} = \frac{20!}{(2!)^{10}}$;

28.11.2005

- Schülergruppe $S = \{A, B, C, D\}$;

a) [Jeweils] 1. Kurssprecher [von] E,Ph, Ämterhäufung möglich
Mögliches Ergebnis: $\omega_1 = (A, B)$, $\omega_2 = (A, A)$;
1. Komponente: E, 2. Komponente: Ph
$\Omega_{\text{a}} = \left\{ (x, y) \mid x \in S \land y \in S \right\}$;
$|\Omega_{\text{a}}| = |S|^2$;

b) 1./2. Kurssprecher für M
Mögliches Ergebnis: $\omega = (A, B)$;
$\Omega_{\text{b}} = \left\{ (x, y) \mid x \in S \land y \in S \land x \neq y \right\} = \Omega_{\text{a}} \setminus \left\{ (x, x) \mid x \in S \right\}$;
$|\Omega_{\text{b}}| = |S| \left(|S| + 1 \right) = 16 - 4$;
„Jaja, da kannsch tausend Sachen [wischende Handbewegung] hinschreiben“
„Das ist [wie] die Sache mit der Sachtel: Welche Seite ist richtig“
„Ja was soll ich da sagen wenn ich spinn´“

c) Zwei Schüler werden als Tafeldienst gewählt.
$\omega = \{A, B\} = \{B, A\}$;
$\Omega_{\text{c}} = \left\{ \{x, y\} \mid x \in S \land y \in S \land x = y \right\} = \left\{ \{x, y\} \mid \{x, y\} \subset S \right\}$;

$|\Omega_\mathrm{c}| = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6;$
$2!\,|\Omega_\mathrm{c}| = |\Omega_\mathrm{b}|\,;$
„Heut ham´ die Ramona und die Ramona Tafeldienst"
„Dann ist er [ein Schizophrener] endlich mal mit sich beisammen [wenn er Tafeldienst ist]"

d) Die Schüler bilden Paare.
$\Omega_\mathrm{d} = \{\{\{A, B\}, \{C, D\}\}, \{\{A, C\}, \{B, D\}\}, \{\{A, D\}, \{B, C\}\}\}\,;$ 29.11.2005
$8\,|\Omega_\mathrm{d}| = 4!;$
$|\Omega_\mathrm{d}| = \frac{4!}{8} = 3;$
[Komisches Zeug: Tabelle mit ABCD, BACD, BADC, ABDC (für Paar AB,CD); also Vertauschung innerhalb der Paare $(2 \cdot 2)$ und die Paar selbst (nochmal $\cdot\, 2$)] 28.11.2005

e) Die Schüler kommen paarweise ins Klassenzimmer, auf die Reihenfolge beim Betreten der Paare wird geachtet.
$\Omega_\mathrm{e} = \{(\{A, B\}, \{C, D\}), (\{A, C\}, \{B, D\}), \ldots\}\,;$
1. Komponente: 1. Paar 29.11.2005
$|\Omega_\mathrm{e}| = 2\,|\Omega_\mathrm{c}| = \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2 \cdot 1}{2} = \frac{4!}{2^2} = 6;$ 30.11.2005

f) Einzeln, nach Geschlecht (4 w, 16 m)
Mögliches Ergebnis: $\omega = (\mathrm{w}, \mathrm{w}, \mathrm{w}, \mathrm{m}, \ldots);$
20-Tupel
$\frac{20!}{4!16!}$
11.11.2005

- Auf wie viele Arten können sich 20 Schülerinnen und Schüler auf 34 Plätze setzen?

14.12.2005

2.2 Grundmodelle zur Kombinatorik

Stichprobendarstellung als	**Stichprobe vom Umfang n von $\{1, 2, \ldots, \mathrm{N}\}$**	**Mit Zurücklegen**	**Ohne Zurücklegen**	
n-Tupel	**Achten auf Reihenfolge**	N^n (L)	$\frac{N!}{(N-n)!}$ (L)	**Unterscheidbare Murmeln**
n-Multimenge, n-Menge (echt)	**Nichtachten auf Reihenfolge**	$\binom{N+n-1}{n}$	$\binom{N}{n}$ (L)	**Nichtunterscheidbare Murmeln**
		Mit Mehrfachbesetzung	**Ohne Mehrfachbesetzung**	**Verteilungen von** n **Murmeln auf** N **Plätze**

„Ich bin bester Freund“ 16.01.2006

2.3 Die erweiterte Vierfeldertafel

[Beispiel] $\Omega =$ Schüler einer Klasse;

[Unterteilung in] 2. Fremdsprache:

- $L =$ Lateinschüler;
  $F =$ Französischschüler;
- $L \cap F = \varnothing$;
  $L \cup F = \Omega$;

[Unterteilung nach] Geschlecht:

- $M =$ Mädchen;
  $B =$ Buben;
- $M \cap B = \varnothing$;
  $M \cup B = \Omega$;

Absolute Häufigkeiten:

	M	B	
L	5	12	17
F	4	8	12
	9	20	29

17.01.2006

2.4 Das Axiomensystem von Kolmogorow

Das Axiomensystem von Kolmogorow legt Bedingungen für Wahrscheinlichkeiten fest, sagt aber nichts darüber, wie man zu Wahrscheinlichkeiten kommt.

Vergleich: Inhalt $I(A)$ einer Fläche A

- $I(A) \geq 0$;
- $I(A_1 \cup A_2) = I(A_1) + I(A_2)$ falls $A_1 \cap A_2 = \varnothing$;
- $I(\text{Quadrat der Seitenlänge } 1) = 1$;

Hier: Ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist eine Funktion $P\colon \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ mit $A \mapsto P(A) \in \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

- $P(A) \geq 0$; (Nichtnegativität)
- $P(\Omega) = 1$; (Normierung)
- $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$ falls $A_1 \cap A_2 = \varnothing$; (Additivität)

Das Paar (Ω, P) heißt Wahrscheinlichkeitsraum.

Folgerungen: Kap. 6.2.3 und 6.2.4 18.01.2006

2.5 Die bedingte Wahrscheinlichkeit

	M	B	
L	5	12	17
F	4	8	12
	9	20	29

$\Omega = M \cup B = L \cup F$;

Wir nehmen Ω als Laplace-Raum an.

$P_\Omega(M \cup L) = \frac{5}{29}$; $\quad P_\Omega(M) = \frac{9}{29}$; $\quad P_\Omega(L) = \frac{17}{29}$;

	M	**B**
L	$M \cap L$	$B \cap L$
F	$M \cap F$	$B \cap F$

$\Omega = (M \cap L) \cup (M \cap F) \cup (B \cap L) \cup (B \cap F)$; ([jeweils] paarweise disjunkte Mengen)

$L = (M \cap L) \cup (B \cap L)$;

$F = (M \cap F) \cup (B \cap F)$;

$M = (M \cap L) \cup (M \cap F)$;

$B = (B \cap L) \cup (B \cap F)$;

$\Omega_M = M$;

$P_M(L) = \frac{5}{9} = \frac{P_\Omega(M \cap L) \cdot 29}{P_\Omega(M) \cdot 29} = \frac{P_\Omega(M \cap L)}{P_\Omega(M)}$; (Wahrscheinlichkeit von L unter der Bedingung M; Der Index Ω wird in aller Regel weggelassen; Def. B. S. 114)

$P_M \colon \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ mit $E \mapsto \frac{P(M \cap E)}{P(M)}$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß (vgl. B. S. 116 oben) und (Ω, P_M) ist ein Wahrscheinlichkeitsraum.

```
                ---------o---------
               /                   \
     P(M)=9/29 /                     \ P(B)=20/29
             /                         \
            o M                       B o
           / \                           / \
P_M(L)=5/9 /   \ P_M(F)=     P_B(L)= /   \ P_B(F)=8/20
          /     \ =4/9       =12/20 /     \
         o L   F o                o L   F o

                ---------o---------
               /                   \
    P(L)=17/29 /                     \ P(F)=12/29
             /                         \
            o L                       F o
           / \                           / \
P_L(M)=5/10 /   \ P_L(B)=     P_F(M)= /   \ P_F(B)=8/12
          /     \ =12/17      =4/12 /     \
         o M   B o                o M   B o
```

$P_M(L) = \frac{P(M \cap L)}{P(M)}; \Rightarrow P(M \cap L) = P(M)P_M(L) = \frac{9}{29}\frac{5}{9} = \frac{5}{29}$; (1. Pfadregel, vgl. B. S. 120)

$P(L) = P(L \cap M) + P(L \cap B) = \frac{9}{29}\frac{5}{9} + \frac{20}{29}\frac{12}{20} = \frac{17}{29}$; (2. Pfadregel, vgl. B. S. 120)

Verzweigungsregel:

```
        o
       / \
   a /     \ b
    /       \
   o         o
```

$a + b = 1;$

$P(A \cap B \cap C) = P(A)\, P_A(B \cap C) = P(A)\, P_A(B)\, P_{A \cap B}(C);$ 25.01.2006

2.6 Formel für die totale Wahrscheinlichkeit

$\Omega = \bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i$ mit paarweise disjunkten E_i;

$A = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \underbrace{(A \cap E_i)}_{\substack{\text{paarweise}\\ \text{disjunkt}}};$

$P(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A \cap E_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(E_i) P_{E_i}(A);$

Speziell: $\Omega = A \cup \overline{A}$;

$P(B) = P(A)P_A(B) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B);$

Formel von Bayes:

Brücke: $P(A \cap B) = P(A)P_A(B) = P(B)P_B(A);$

$P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A)P_A(B)}{P(A)P_A(B) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B)};$ 31.01.2006

2.7 Unabhängigkeit [Ausfrage]

Idee:

$P(A) = P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$;

$P(A) = P_\Omega(A) = \frac{P(A\cap \Omega)}{P(\Omega)}$;

$P(A \cap B) = P(A)P(B)$;

Zwei Ereignisse A und B [des gleichen Wahrscheinlichkeitsraums] sind genau dann unabhängig, wenn gilt: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$; 01.02.2006

- Unvereinbarkeit und Unabhängigkeit: nicht möglich
- Unvereinbarkeit $\Rightarrow$ Abhängigkeit
- Vereinbarkeit $\Leftarrow$ Unabhängigkeit
- Vereinbarkeit und Abhängigkeit: möglich

03.07.2006

2.8 Zufallsgrößen

Eine Abbildung $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ heißt Zufallsgröße (-variable).

„Wenn ich eine Wand sehe, muss ich nicht erst durch sie hindurch gehen, um zu sehen, dass es wirklich eine Wand ist.“ 12.07.2006

2.8.1 Die Wahrscheinlichkeitsfunktion

Geg.: (Ω, P), X auf Ω, P_X auf (Ω, P)

$$\tilde{P}_X\colon \mathbb{R} \to [0,1]\,; \quad x \mapsto \begin{cases} P_X(x) & \text{falls } x \in W_X; \\ 0 & \text{sonst;} \end{cases}$$

2.8.2 Die (kumulative) Verteilungsfunktion

Sei P_X eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf (Ω, P) und dem Wertebereich von X $W_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Die Funktion $F_X\colon \mathbb{R} \to [0,1]\,; \quad x \mapsto P(X \leq x) = P(\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \leq x\})\,;$ heißt (kumulative) Verteilungsfunktion von X auf (Ω, P).

Folgerungen:

$F_X(x) = \sum\limits_{x_i \leq x} \underbrace{P(X = x_i)}_{P_X(x_i)}$, da $\bigcup\limits_{i=1,2,\ldots,n} \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) = x_i\} = \Omega$; 23.07.2006

2.8.3 Gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung und Unabhängigkeit zweier Zufallsgrößen

$P(X = x \cap Y = y) = P_{X,Y}(x,y)$;

(Ω, P) sei ein Wahrscheinlichkeitsraum und X und Y seien Zufallsgrößen auf Ω mit den Wertemengen W_X und W_Y.

a) Die Funktion $P_{X,Y}\colon W_X \times W_Y \to [0,1]\,; (x,y) \mapsto P(X = x \cap Y = y) = P(\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) = x \wedge Y(\omega) = y\})$ heißt gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung von X und Y.

b) [Gilt für alle $x \in W_X$ und für alle $y \in W_Y$, dass die Ereignisse $X = x$ und $Y = y$ sind unabhängig sind, so sind X und Y unabhängig.] 25.07.2006

Die Ereignisse $X = x$ und $Y = y$ sind unabhängig **für alle** $x \in W_X$ und $y \in W_Y$. $\Leftrightarrow$

$P(X = x \cap Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$ für alle $x \in W_X$ und $y \in W_Y$. $\Leftrightarrow$

$P_{X,Y}(x,y) = P_X(x)P_Y(y)$ für alle $x \in W_X$, $y \in W_Y$. $\overset{\text{D}}{\Leftrightarrow}$

X und Y sind unabhängig.

15.09.2006

2.8.4 Erwartungswert $E(X)$ einer Zufallsgröße X über (Ω, P) mit der Wertemenge $W_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

$E(X) := x_1 P(X = x_1) + x_2 P(X = x_2) + \cdots + x_n P(X = x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$;

„Im Grund sitzt keiner gescheit, aber alle halbwegs gut“

$E(X) = x_1 \sum\limits_{\omega_i \in (X = x_1)} P(\{\omega_i\}) + x_2 \sum\limits_{\omega_i \in (X = x_2)} P(\{\omega_i\}) + \cdots + x_n \sum\limits_{\omega_i \in (X = x_n)} P(\{\omega_i\}) = \sum\limits_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\{\omega\})$;

„weißt, einmal gehst ´rein [ins Haus] und einmal ´raus; was war jetzt richtig?“ 18.09.2006

Rechnen mit Erwartungswerten

- X sei eine Zufallsgröße auf (Ω, P) mit der Wertemenge $W_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

  $Y := aX + b; \quad a, b \in \mathbb{R};$

  $Y\colon \Omega \to W_Y = \{ax + b \,|\, x \in W_X\}\,; \quad \omega \mapsto aX(\omega) + b;$

  $E(Y) = E(aX+b) = \sum\limits_{x \in W_X} (ax + b)\, P(X = x) = \sum\limits_{x \in W_X} [axP(X = x) + bP(X = x)] = a \sum\limits_{x \in W_X} xP(X = x) + b \sum\limits_{x \in W_X} P(X = x) = aE(X) + b;$

- X und Y seien Zufallsgrößen über (Ω, P) mit den Wertemengen $W_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ und $W_Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$.

  $E(X + Y) = \sum\limits_{\omega \in \Omega} [X(\omega)P(\{\omega\}) + Y(\omega)P(\{\omega\})] = \sum\limits_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\{\omega\}) + \sum\limits_{\omega \in \Omega} Y(\omega)P(\{\omega\}) = E(X) + E(Y);$

20.09.2006

- Seien X und Y unabhängige Zufallsgrößen über (Ω, P) mit den Wertemengen $W_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ und $W_Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$.

  $Z\colon \Omega \to W_Z$ (Wertemenge) $\quad \omega \mapsto X(\omega)Y(\omega);$

$$
\begin{aligned}
E(XY) &= \sum_{\substack{x \in W_X \\ y \in W_Y \\ xy \in W_Z}} xyP(X = x \cap Y = y) = \\
&= \sum_{\substack{x \in W_X \\ y \in W_Y \\ xy \in W_Z}} xyP(X = x \cap Y = y) + \underbrace{\sum_{\substack{x \in W_X \\ y \in W_Y \\ xy \notin W_Z}} xy\, \underbrace{P(\underbrace{X = x \cap Y = y}_{\varnothing})}_{0}}_{0} = \\
&= \sum_{\substack{x \in W_X \\ y \in W_Y}} xyP(X = x \cap Y = y) = \sum_{\substack{x \in W_X \\ y \in W_Y}} xP(X = x)\, yP(Y = y) = \\
&= \sum_{x \in W_X} xP(X = x) \cdot \sum_{y \in W_Y} yP(Y = y) = \\
&= E(X)E(Y);
\end{aligned}
$$

25.01.2007

2.9 BERNOULLIexperimente und -ketten

Ein Zufallsexperiment mit $|\Omega| = 2$ heißt „BERNOULLIexperiment“.

Übliche Bezeichnungen: $\Omega = \{0, 1\}$, 0: Niete, 1: Treffer

Mit (Ω, P): $P(\{0\}) = q,\ P(\{1\}) = p$

Die Hintereinanderausführung von BERNOULLIexperimenten gleicher Trefferwahrscheinlichkeit ohne gegenseitige Beeinflussung nennt man „BERNOULLIkette“.

2.9.1 Modell der BERNOULLIkette

$\Omega = \{0, 1\}^2;\quad n \in \mathbb{N};\qquad (\Omega, P)$

Die Ereignisse $E_i = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in \Omega \,|\, \omega_i = 1\}$ ($|E_i| = 2^{n-1}$), $i = 1, 2, \ldots, n$ sind unabhängig und haben alle dieselbe Wahrscheinlichkeit.

n und p sind Parameter der Kette, n [nennt man] auch „Länge der Kette“.

2.9.2 [Bestimmung der Minimalkettenlänge für Trefferwahrscheinlichkeit β]

Bestimmung der Kettenlänge n dafür, dass mindestens ein Treffer mit der Wahrscheinlichkeit β auftritt.

$P(\overline{\text{kein Treffer}}) = 1 - P(\text{kein Treffer}) = 1 - q^n \geq \beta; \Leftrightarrow$

$1 - \beta \geq q^n; \Leftrightarrow$ [beide Seiten kleiner 1]

$\log_q [1 - \beta] = \frac{\ln[1-\beta]}{\ln[1-p]} \leq n;$

[n natürlich aufrunden, falls nicht ganze Zahl]

[Mit X Anzahl der Treffer:]

$P(X = k) = B(n, p, k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k};$

$\sum\limits_{i=0}^{k} B(n, p, i) = P(X \leq k);$ 29.01.2007

2.9.3 Formel von Bernoulli

[Mit einer] BERNOULLIkette mit den Parametern n und p [und] X: Anzahl der Treffer

Das Wahrscheinlichkeitsmaß (Wahrscheinlichkeitsverteilung) $P_p^n\colon \mathcal{P}(\{0,1\}^n) \to [0,1]$ mit $P_p^n(X = k) = B(n,p;k)$ heißt „Binomialverteilung $B(n,p)$". 30.01.2007

Die Zufallsgröße X [ist] binomialverteilt.

(Kumulative) Verteilungsfunktion:

$F(n,p;k) = P_p^n(X \leq x) = \sum\limits_{k \leq x} B(n,p;k);$

2.9.4 Erwartungswert und Varianz

BERNOULLIkette mit den Parametern n und p [und] X: Anzahl der Treffer

X_i: Anzahl der Treffer beim i-ten BERNOULLIexperiment

$E(X_i) = p \cdot 1 + q \cdot 0 = p;$

$E(X) = E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n) = np;$

$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(X_1{+}X_2{+}\cdots{+}X_n) = n\,\mathrm{Var}(X_i) = n\left[(1-p)^2\,p + (0-p)^2\,q\right] = npq;$ 27.03.2007

2.10 Hypothesentests

Einfache Hypothesen
: p hat einen festen Wert.

Zusammengesetzte Hypothesen
: p nimmt mehrere Werte an, bei uns Werte aus einem [einzigen] Intervall, z.B. $p \in \left[0, \frac{3}{4}\right]$.

Einseitiger Test
: Für jedes $x \in \mathrm{An}\,H_1$ gilt: $x < b$ für jedes $b \in \mathrm{Ab}\,H_1$ oder umgekehrt.

```
      An       Ab
     ____   _____
    /    \/      \
--|----------|--
    \___________/
         W_X
```

Zweiseitiger Test

```
      Ab    An    Ab
      __  _____  __
     /  \/     \/  \
   --|------------|--
     \____________/
          W_X
```

Zwei zusammengesetzte Hypothesen der Form

$H_1\colon p \in [0, p_0]\,;\qquad H_2\colon p \in\,]p_0, 1]\,;$

$\mathrm{An}\, H_1 = \{0, 1, \ldots, k\};\qquad \mathrm{Ab}\, H_1 = \{k+1, k+2, \ldots, n\};$ für $k \in \{0, \ldots, n-1\};$

Die Sicherheits- und Irrtumswahrscheinlichkeiten als Funktion der Trefferwahrscheinlichkeit bei fester Kettenlänge und festem k:

$f_{n,k}(p) = P_p^n(X \leq k)$: monoton fallend

$g_{n,k}(p) = P_p^n(X > k)$: monoton steigend

Für $p \in [0, p_0]$ gilt: $P_p^n(X \leq k) \geq P_{p_0}^n(X \leq k);\qquad P_p^n(X > k) \leq P_{p_0}^n(X > k);$

Für $p \in\,]p_0, 1]$ gilt: $P_p^n(X \leq k) \leq P_{p_0}^n(X \leq k);\qquad P_p^n(X > k) \geq P_{p_0}^n(X > k);$

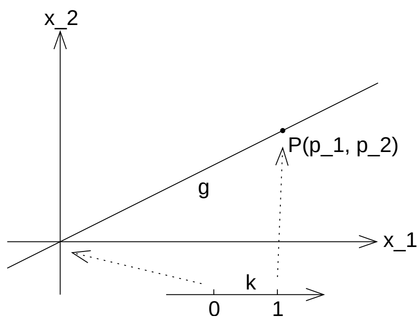
- Risiko 1. Art für H_1:
  $P_p^n(X > k) \leq P_{p_0}^n(X > k)$; ($p \in [0, p_0]$)
- Sicherheitswahrscheinlichkeit für H_1:
  $P_p^n(X \leq k) \geq P_{p_0}^n(X \leq k)$; ($p \in [0, p_0]$)
- Risiko 2. Art für H_1:
  $P_p^n(X \leq k) \leq P_{p_0}^n(X \leq k)$; ($p \in\,]p_0, 1]$)
- Sicherheitswahrscheinlichkeit für H_2:
  $P_p^n(X > k) \geq P_{p_0}^n(X > k)$; ($p \in\,]p_0, 1]$)

07.02.2006

3 Geometrie

3.1 Geraden

3.1.1 Ursprungsgeraden in der x_1–x_2-Ebene



Liegt $Q(q_1, q_2)$ auf g?

$Q(q_1, q_2) \in g \Leftrightarrow$ Es gibt eine Zahl $k \in \mathbb{R}$, so dass gilt:

$q_1 = kp_1 \wedge q_2 = kp_2;$

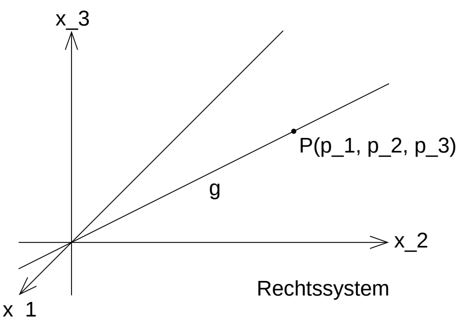
Anders geschrieben:

$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix};$

Darstellung von g:

$g = \left\{ Q(q_1, q_2) \middle| \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \text{ mit } k \in \mathbb{R} \right\};$ 08.02.2006

3.1.2 Ursprungsgeraden im Raum



$g = \left\{ Q(q_1, q_2, q_3) \middle| \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \text{ mit } k \in \mathbb{R} \wedge p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 \neq 0 \right\};$ 11.02.2006

3.1.3 Beliebige Geraden in der x_1–x_2-Ebene

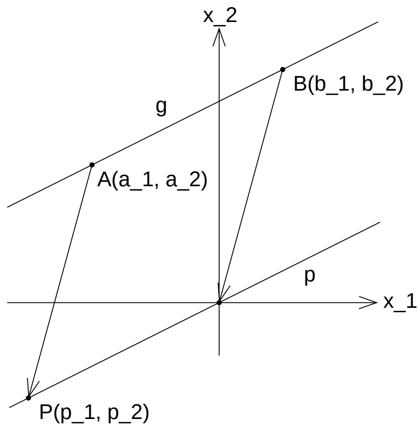


Abbildung:
$g \to p$
$B \mapsto 0$
$A \mapsto P$

Welche Koordinaten hat P?

$p_1 = a_1 - b_1;$
$p_2 = a_2 - b_2;$ 20.02.2006

$$p = \left\{ Q(q_1, q_2) \middle| \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix} \text{ mit } k \in \mathbb{R} \right\};$$

$$g = \left\{ R(r_1, r_2) \middle| \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix} \text{ mit } k \in \mathbb{R} \right\};$$

[Verschiedene Sichten: Die Sicht vor dem letzten Gleichheitszeichen stellt man sich durch eine Verschiebung jedes Punkten der Ursprungsgeraden vor. Das Ergebnis der Verschiebung ist dann die resultierende Gerade. Die Sicht nach dem letzten Gleichheitszeichen ist die bevorzugte Sicht. Bei ihr stellt man sich vor, dass man vom Ursprung ausgehend zum Aufpunkt (B) geht und dann von dort aus jeweils das k-fache des Richtungsvektors $\binom{a_1-b_1}{a_2-b_2}$ aufträgt.]

Ein Zahlenpaar $\binom{e}{f}$ kann durch Pfeile veranschaulicht werden, deren x_1-Koordinate e und deren x_2-Koordinate f ist.

Diese Pfeile sind alle parallel, gleich gerichtet und gleich lang zum Pfeil $\overrightarrow{0W}$ mit $W(e, f)$. 21.02.2006

(Diese Eigenschaft nennt man Parallelgleichheit.)

Die Menge aller parallelgleichen Pfeile heißt Pfeilvektor. Jedes Element, d.h. jeder Pfeil, dieser Menge heißt Repräsentant dieser Menge.

Bezeichnungen: $\vec{a} = \overrightarrow{PQ} = \binom{2}{-3} = \binom{q_1 - p_1}{q_2 - p_2} \equiv \binom{q_1}{q_2} - \binom{p_1}{p_2} = \overrightarrow{0Q} - \overrightarrow{0P} \equiv \vec{Q} - \vec{P}$

$PQ = \left\{ X(x_1, x_2) \middle| \binom{x_1}{x_2} = \vec{P} + k\overrightarrow{PQ} \text{ mit } k \in \mathbb{R} \right\};$

Kürzer: $PQ\colon \vec{X} = \vec{P} + k\overrightarrow{PQ};\quad (k \in \mathbb{R})$ 22.02.2006

3.1.4 Möglichkeiten der gegenseitigen Lage zweier Geraden g und h in der Ebene

$g\colon \vec{X} = \vec{A} + k\vec{u};\quad k \in \mathbb{R};$
$h\colon \vec{X} = \vec{B} + l\vec{v};\quad l \in \mathbb{R};$

- g und h schneiden sich (in einem Punkt).

  $\Leftrightarrow$ Es gibt kein $r \in \mathbb{R}$, so dass $\vec{u} = r\vec{v}$, d.h. $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind keine Vielfache voneinander. ($\vec{u}$ und $\vec{v}$ heißen dann nicht kollinear, d.h. die Repräsentanten von $\vec{u}$ sind nicht parallel zu den Repräsentanten von $\vec{v}$.)

  Bestimmung des Schnittspunkts: Der Schnittpunkt erfüllt sowohl die Gleichung von g (für ein bestimmtes k) als auch die Gleichung von h (für ein bestimmtes l).

  $$\left.\begin{array}{l} \vec{S} = \vec{A} + k_S\vec{u}; \\ \vec{S} = \vec{B} + l_S\vec{v}; \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{A} + k_S\vec{u} = \vec{B} + l_s\vec{v};$$

- g und h sind parallel [$\Leftrightarrow$ die Richtungsvektoren sind kollinear].

  - g und h sind identisch [$\Leftrightarrow$ der Verbindungsvektor ist kollinear zu den Richtungsvektoren].
  - g und h sind echt parallel [$\Leftrightarrow$ der Verbindungsvektor ist nicht kollinear zu den Richtungsvektoren].

07.03.2006

3.1.5 Beliebige Geraden im Raum

$g\colon \vec{X} = \vec{A} + k\overrightarrow{AB};\quad k \in \mathbb{R};$

3.1.6 Möglichkeiten der gegenseitigen Lage zweier Geraden g und h im Raum

g: $\vec{X} = \vec{A} + k\vec{u}$; $k \in \mathbb{R}$;
h: $\vec{X} = \vec{B} + l\vec{v}$; $l \in \mathbb{R}$;

- g und h sind parallel. $\Leftrightarrow$ $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind kollinear.

  Wenn g und h parallel sind, gilt:

  $A \in h \Leftrightarrow g$ und h identisch $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ und $\vec{u}$ [oder $\vec{v}$] kollinear

- (Wenn g und h nicht parallel sind, gilt:)

  g und h schneiden sich $\Leftrightarrow$ die Gleichung $\vec{A} + k\vec{u} = \vec{B} + l\vec{v}$ hat für k und l genau eine Lösung, d.h. es gibt genau einen Wert für k und genau einen Wert für l, sodass die Gleichung erfüllt ist.

3.1.7 Vorgehen bei einem System aus drei Gleichungen für zwei Lösungsvariablen

1. Eine Gleichung wird nach einer Lösungsvariablen aufgelöst.
2. Der erhaltene Term wird in eine weitere Gleichung eingesetzt.
3. Man versucht, für die zweite Lösungsvariante einen Term zu bestimmen. [Falls das nicht gelingt, hat das Gleichungssystem keine Lösung.]
4. Falls für beide Lösungsvariablen Terme gefunden wurden, muss überprüft werden, ob auch die restliche Gleichung damit erfüllt ist.

07.04.2006

3.1.8 Teilverhältnis

```
--------+-----+-----+--------
        A     T1    B
```

[T_1 Mittelpunkt von $[AB]$]

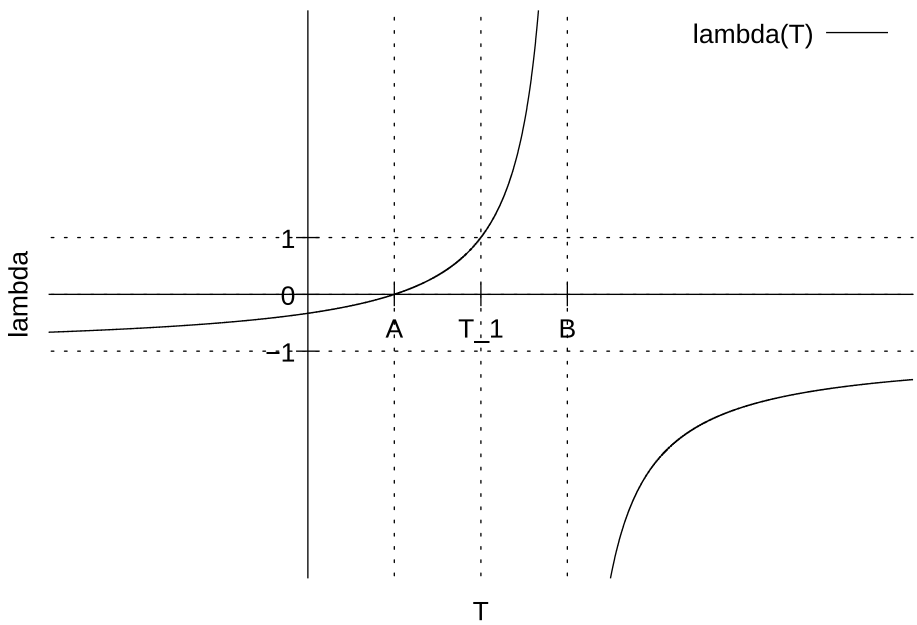
$\overrightarrow{AT} = \lambda\overrightarrow{TB}$;

- $T \in AB \setminus [AB\colon \lambda \in \,]-1, 0[\,$;
- $T = A$: $\lambda = 0$;
- $T \in [AT_1] \setminus \{A, T_1\}$: $\lambda \in \,]0, 1[\,$;
- $T = T_1$: $\lambda = 1$;
- $T \in [T_1B] \setminus \{T_1, B\}$: $\lambda \in \,]1, \infty[\,$;
- [$T = B$: λ undefiniert]
- [$T \in AB \setminus AB$]: $\lambda \in \,]-\infty, -1[\,$;]

$\lambda = \lambda(T)$;

$\lambda(0) = 0$;

$\lambda = \frac{T-A}{B-T} = \frac{T}{B-T}$;



25.04.2006

Festlegung: A, B, T liegen auf einer Geraden. T teilt $[AB]$ im Verhältnis λ. $\Leftrightarrow \overrightarrow{AT} = \lambda \overrightarrow{TB}$;

10.10.2006

3.1.9 Abstand einer Geraden zu einem Punkt

$\overrightarrow{PS} \cdot \vec{u} = 0;$

$\left(\underbrace{\vec{A} + k_S\vec{u}}_{\vec{S}} - \vec{P}\right) \cdot \vec{u} = 0;$ (Gleichung für k_s)

3.1.10 Abstand zweier Geraden

$g\colon \vec{X} = \vec{A} + k\vec{u}; \quad k \in \mathbb{R};$

$h\colon \vec{X} = \vec{B} + l\vec{v}; \quad l \in \mathbb{R};$

$d(g,h) = \left|\overrightarrow{PQ}\right|$ mit $P \in g$ und $Q \in h$ und $[PQ] \perp g$ und $[PQ] \perp h$.

$\vec{P} = \vec{A} + k_P\vec{u}; \quad \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{u} = 0;$

$\vec{Q} = \vec{B} + l_Q\vec{v}; \quad \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v} = 0;$

$\left(\vec{B} + l_Q\vec{v} - \vec{A} - k_P\vec{u}\right) \cdot \vec{u} = 0;$

$\left(\vec{B} + l_Q\vec{v} - \vec{A} - k_P\vec{u}\right) \cdot \vec{v} = 0;$ 13.03.2006

3.2 Ebenen

Echt parallele Geraden mit Aufpunkt auf g bestimmen eine Ebene E.

$E = \left\{X \middle| \vec{X} = \vec{A}_l + k\vec{u} \text{ mit } k \in \mathbb{R} \wedge \vec{A}_l = \vec{B} + l\vec{v} \text{ mit } l \in \mathbb{R} \wedge \{\vec{u}, \vec{v}\} \text{ nicht kollinear}\right\};$

Kürzer:

$E\colon \vec{X} = \vec{B} + k\vec{u} + l\vec{v}; \quad k, l \in \mathbb{R};$ 15.03.2006

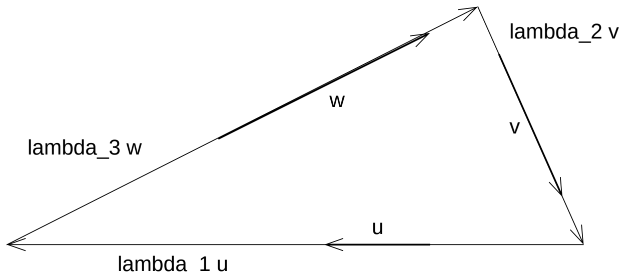
3.2.1 Möglichkeiten der gegenseitigen Lage von Gerade und Ebene

$E\colon \vec{X} = \vec{P} + k\vec{u} + l\vec{v};$

$g\colon \vec{X} = \vec{Q} + r\vec{w};$

- g und E sind parallel. $\Leftrightarrow$

  Es gibt Repräsentanten der Richtungsvektoren, die in einer [gemeinsamen] Ebene liegen.



  $\lambda_1\vec{u} + \lambda_2\vec{v} + \lambda_3\vec{w} = \vec{0};$

  Dabei sind nicht alle λ_i, $i = 1, 2, 3$ zugleich Null. ($\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2 \neq 0;$)

  [D.h.] $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sind komplanar.

- [$g \subset E \Leftrightarrow$ die Richtungsvektoren sind komplanar und Aufpunkt $\in E$]

- $\vec{P} + k\vec{u} + l\vec{v} = \vec{Q} + r\vec{w};$

  - E und g echt parallel $\Leftrightarrow$ die Gleichung hat keine Lösung;
  - $g \subset E \Leftrightarrow$ die Gleichung hat unendlich viele Lösungen („die Punkte von g")
  - g und E schneiden sich in einem Punkt $\Leftrightarrow$ die Gleichung hat genau eine Lösung;]

29.03.2006

3.2.2 Möglichkeiten der gegenseitigen Lage zweier Ebenen

- Beide Ebenen sind in vektorieller Parameterform gegeben.

  $E\colon \vec{X} = \vec{A} + k\vec{u} + l\vec{v}; \quad k, l \in \mathbb{R}; \quad F\colon \vec{X} = \vec{B} + m\vec{w} + n\vec{z}; \quad m, n \in \mathbb{R};$

  - E und F sind parallel. $\Leftrightarrow$
    $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{z}$ sind komplanar. $\Leftrightarrow$
    $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ und $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{z}$ sind komplanar.
  - E und F ist echt parallel. $\Leftrightarrow$
    $E \parallel F$ und $\Big[(A \notin F) \vee (B \notin E) \vee \Big(\overrightarrow{AB}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ nicht komplanar$\Big)\Big]$.

- E und F sind identisch. $\Leftrightarrow$
  $E \parallel F$ und $\Big[(A \in F) \vee (B \in E) \vee \Big(\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}$ komplanar$\Big)\Big]$. $\Leftrightarrow$
  $\vec{A} + k\vec{u} + l\vec{v} = \vec{B} + m\vec{w} + n\vec{z}$; hat eine Lösungsmenge mit zwei frei wählbaren Lösungsvariablen (Ebenengleichung).
- E und F schneiden sich in einer Geraden. $\Leftrightarrow$ $E \nparallel F$;

• [BTW]

- $E \cap F = \varnothing$: Beim Versuch, die Lösung zu finden, tritt ein Widerspruch auf.
- $E \cap F =$ Gerade g: Lösungsmenge mit einer frei wählbaren Variable.
- $E \cap F = E = F$: [Lösungsmenge mit zwei frei wählbaren Variablen.]

• Eine Ebene ist in Parameter-, eine in Koordinatenform gegeben.

E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$; F: $[\vec{X} = \vec{B} + m\vec{w} + n\vec{z}; \quad m, n \in \mathbb{R};]$ 31.03.2006

Einsetzen von x_1, x_2, x_3 aus der Gleichung von F in die Gleichung von E ergibt eine Gleichung $(*)$ für m und n.

- E und F [sind] identisch. $\Leftrightarrow$ m und n sind frei wählbar bezüglich $(*)$.
- E und F sind echt parallel. $\Leftrightarrow$ $(*)$ ist nicht lösbar.
- E und F schneiden sich [in einer Gerade]. $\Leftrightarrow$ Die Lösungsmenge hat eine frei wählbare Variable; $m = m(n); n = n(m)$ [XXX IMHO ist diese Notation mathematisch unsinnig – m bzw. n können nicht eine Funktion (von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$) und eine reelle Zahl zugleich sein.]

03.04.2006

• [Beide Ebenen sind in Koordinatenform gegeben.]

$$\left.\begin{array}{l} E\colon ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0; \\ F\colon \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta = 0; \end{array}\right\} \text{Gleichungssystem für } x_1, x_2, x_3$$

- [E und F sind identisch. $\Leftrightarrow$ Gleichung von E ist ein Vielfaches von der von F.]
- [E und F sind echt parallel. $\Leftrightarrow$ Die Koeffizienten von E sind Vielfache von denen von F, aber $d \neq \delta$.]

– [E und F schneiden sich in einer Geraden. $\Leftrightarrow$ Die Koeffizienten von E sind nicht Vielfache von denen von F.]

21.10.2006

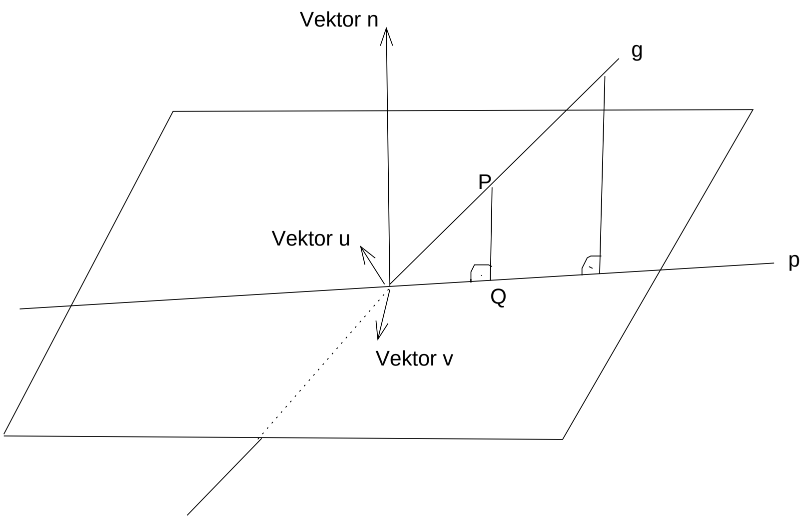
3.2.3 [Winkel zwischen Ebene und Gerade/Normal(en)form einer Ebene

$\angle(E, g) = \angle(p, g)$;

$\vec{u}$, $\vec{v}$: Richtungsvektoren von E

$\vec{n} \perp E$;

$\vec{n} \cdot \vec{u} = \vec{n} \cdot \vec{v} = 0$;]



$X \in E; \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{AX} = 0;$

$\vec{n} \cdot \left(\vec{X} - \vec{A}\right) = 0;$ (vektorielle Normalform einer Ebene)

$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right] = n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 \underbrace{-(n_1a_1 + n_2a_2 + n_3a_3)}_{n_0} = n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_0 = 0;$ (skalare Normalform/Koordinatenform einer Ebene)

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AX} > 0; \rightarrow \vec{X}$ liegt bezüglich $\vec{n}$ im oberen (positiven) Halbraum 06.12.2006

„na langsam wird halt doch sichtbar, dass die Mathematik eine Universalwissenschaft ist“ 09.12.2006

[Hesse-Normierungen]

– 1. Hesse-Normierung für Ursprung $\notin E$

Ursprung im unteren Halbraum, d.h. $\vec{n}\vec{A} > 0$.

Senkrechte Projektion von $\overrightarrow{AX}$ auf die Richtung von $\vec{n}$ ergibt den Abstand von X zur Ebene.

$d(X,E) = \left|\overrightarrow{AX}\right| \underbrace{\left|\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}\right|}_{1} \cdot \cos \underbrace{\angle\left(\vec{n}, \overrightarrow{AX}\right)}_{\measuredangle\left(\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}, \overrightarrow{AX}\right)} = \overrightarrow{AX} \cdot \vec{n}^0 = \vec{n}^0 \cdot \left(\vec{X} - \vec{A}\right) > 0$ für X im oberen Halbraum. 11.12.2006

$$d(X,E) = \left| \overbrace{\underbrace{\vec{n}_0}_{\text{HESSEvektor}} \cdot \overrightarrow{AX}}^{\text{HESSEterm (HT)}} \right|;$$

– 2. Hesse-Normierung

Der Normalenvektor soll die Länge 1 haben.

$HT(X) = 0; \Leftrightarrow X \in E;$

$HT(X) < 0; \Leftrightarrow X$ und Ursprung liegen im gleichen Halbraum

HESSEnormalform einer Ebene (HNF)

$HT(X) = \vec{n}_0 \cdot \left(\vec{X} - \vec{A}\right) = \vec{n}_0\vec{X} - \vec{n}_0\vec{A} = 0$ mit $|\vec{n}_0| = 1$ und $\vec{n}_0 \cdot \vec{A} > 0;$

– Umschreiben der Normalform in die HESSEnormalform

[Normalform:] $\vec{n}\vec{X} - \vec{n}\vec{A} = 0;$

[HESSEnormalform:] $\dfrac{\vec{n}\vec{X} - \vec{n}\vec{A}}{|\vec{n}| \cdot \operatorname{sgn} \vec{n}\vec{A}} = 0;$ 20.03.2006

3.3 Der Gauß-Algorithmus

$$\begin{array}{rrr|l} 10 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 3 & 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|l} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 10 & 1 & -2 & 2 \\ 4 & 4 & 3 & 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|l} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -19 & -22 & -28 \\ 4 & 4 & 3 & 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|l} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -19 & -22 & -28 \\ 0 & -4 & -5 & -7 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|l} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -5 & -7 \\ 0 & -19 & -22 & -28 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|l} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{5}{4} & \frac{7}{4} \\ 0 & -19 & -22 & -28 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|l} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{5}{4} & \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & \frac{7}{4} & \frac{21}{4} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|l} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{5}{4} & \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}$$

$x_1 = 3 - 2x_2 - 2x_3 = 1;$

$x_2 = \frac{7}{4} - \frac{5}{4}x_3 = -2;$

$x_3 = 3;$ 22.03.2006

3.4 Determinanten

3.4.1 3x3-Determinanten

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \underbrace{+}_{(-1)^{1+1}} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \underbrace{-}_{(-1)^{2+1}} a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \underbrace{+}_{(-1)^{3+1}} a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix};$$

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & = & b_1; \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & = & b_2; \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & = & b_3; \end{array}$$

[Dieses Gleichungssystem] hat genau eine Lösung. $\Leftrightarrow$

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0;$ (Regel von Cramer)

Speziell: $b_1 = b_2 = b_3 = 0;$

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0; \Leftrightarrow$ [das System] hat nur die Lösung $(0, 0, 0)$.

Folgerung: $\vec{a} = \left(\begin{smallmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{smallmatrix}\right)$, $\vec{b} = \left(\begin{smallmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{smallmatrix}\right)$, $\vec{c} = \left(\begin{smallmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{smallmatrix}\right)$ sind komplanar. $\Leftrightarrow$

$\lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b} + \lambda_3\vec{c} = 0; \quad \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \neq 0; \Leftrightarrow$

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0;$

Anwendung[en]

- [Umrechnung der] Parameterform [einer] Ebene [in die] Koordinatenform

  [E: $\vec{X} = \vec{A} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$;

  $\left(\begin{smallmatrix} x_1-a_1 \\ x_2-a_2 \\ x_3-a_3 \end{smallmatrix}\right)$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ sind komplanar.

  $\begin{vmatrix} x_1 - a_1 & u_1 & v_1 \\ x_2 - a_2 & u_2 & v_2 \\ x_3 - a_3 & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0$ ist dann die Koordinatenform.]

- [Umrechnung der] Koordinatenform [einer] Ebene [in die] Parameterform

a) $x_2 = \lambda; \quad x_3 = \mu;$
$x_1 =$ [Auflösung der Koordinatenform nach x_1];
$\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot\cdot \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \cdot\cdot \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \cdot\cdot \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$

b) Bestimme $A, B, C \in E$, die nicht auf einer Geraden liegen.

02.05.2006

3.5 Vektoren

3.5.1 Lineare Abhängigkeit

Die Vektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_n$ ($n \in \mathbb{N}$) heißen linear unabhängig. $\Leftrightarrow$

Aus $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \cdots + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0};$

folgt: $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0;$

(D.h. mit $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ... $\vec{a}_n$ lässt sich nur die triviale Nullsumme bilden.)

[Speziell für] $n = 2$: $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ [ist] linear unabhängig. $\Leftrightarrow$ $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ nicht kollinear.

[Ist bereits ein Nullvektor in einer Menge, die man auf lineare Abhängigkeit überprüft, so ist die Menge linear abhängig. (Vgl. mit Multiplikation mit 0!)]

3.5.2 Basis eines Vektorraums [siehe B. S. 126]

$\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, ..., $\vec{b}_n$ sei Basis von V und $v \in V$.

Dann existiert ein eindeutiges n-Tupel $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ [die Koordinaten] mit:

$\vec{v} = v_1 \vec{b}_1 + v_2 \vec{b}_2 + \cdots v_n \vec{b}_n;$ [wobei die $v_i \vec{b}_i$ Komponenten sind.]

[Beweis der Koordinateneindeutigkeit]

Annahme: Es existiert ein weiteres n-Tupel $(v_1', v_2', \ldots, v_n')$ mit dieser Eigenschaft.

$\vec{v} = v_1' \vec{b}_1 + v_2' \vec{b}_2 + \cdots v_n' \vec{b}_n;$

$\vec{0} = (v_1 - v_1') \vec{b}_1 + (v_2 - v_2') \vec{b}_2 + \cdots (v_n - v_n') \vec{b}_n;$

Aufgrund der linearen Unabhängigkeit von $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ folgt: $v_i - v_i' = 0$, also $v_i = v_i'$.

02.10.2006

3.5.3 Das Skalarprodukt

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \binom{a_1}{a_2} \cdot \binom{b_1}{b_2} := a_1 b_1 + a_2 b_2;$

Zwei Vektoren [die beide nicht der Nullvektor sind] stehen genau dann aufeinander senkrecht, wenn ihr Skalarprodukt 0 ist.

Wie lässt sich aus den Koordinaten zweier Vektoren der Winkel zwischen ihnen berechnen?

$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\varphi;$

$\left|\vec{a} - \vec{b}\right|^2 = |\vec{a}|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 - 2\,|\vec{a}| \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\varphi;$

$\left(\vec{a} - \vec{b}\right)^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\,|\vec{a}| \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\varphi;$

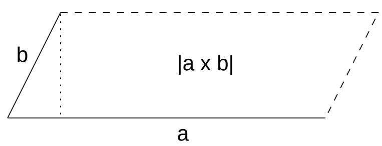
$\vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\,|\vec{a}| \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\varphi;$

$\frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|} = \cos\varphi;$ 10.11.2006

3.5.4 Vektorprodukt

- Definition: vgl. B. S. 238
- Was ist $\vec{a} \times \vec{b}$, wenn $\vec{a}$ und $\vec{b}$ kollinear sind?

  [Kollinearität zweier Vektoren, die beide nicht der Nullvektor sind $\Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$;]
- Geometrische Eigenschaften: vgl. B. S. 240



  $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \sin\angle(\vec{a}, \vec{b});$
- Rechenregeln:
  - $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a};$

- $\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$;
- $\lambda \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \lambda\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \lambda\vec{b}$;

- Spatvolumen: $\left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}\right| = \left|\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)\right|$;

  [Für $|\vec{n}| = 1$ gilt: $\vec{a} \cdot \vec{n} = |\vec{a}| \underbrace{|\vec{n}|}_{1} \cdot \cos \angle(\vec{a}, \vec{n}) = |\vec{a}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{n}) = \vec{n}_{\vec{a}}$;]

16.10.2006

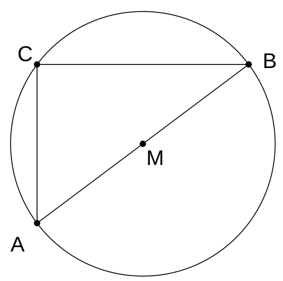
3.6 Kreise

3.6.1 Satz des Thales

„na du musst nur ´ne längere Zeit als Photon leben, dann wird´s dir schon klar werden. . . “

„glaub mir, ich spreche aus Erfahrung“

„Du setzt dich aufs Fahrrad, fährst so schnell, dass es dunkel wird, und schaust dann auf den Tacho“



Für ein Dreieck ABC sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:

(1)
Der Innenwinkel bei C ist $90°$.

(2)
C liegt auf dem Kreis über $[AB]$.

Beweis:

M sei der Mittelpunkt von $[AB]$.

$$\begin{aligned}
& & (1) \quad & \Leftrightarrow \\
\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} &= 0; & & \Leftrightarrow \\
\left(\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MA}\right) \cdot \left(\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MB}\right) &= 0; & & \Leftrightarrow \\
\left(\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MA}\right) \cdot \left(\overrightarrow{CM} - \overrightarrow{MA}\right) &= 0; & & \Leftrightarrow \\
\overrightarrow{CM}^2 - \overrightarrow{MA}^2 &= 0; & & \Leftrightarrow \\
\overrightarrow{CM}^2 &= \overrightarrow{MA}^2; & & \Leftrightarrow \\
\left|\overrightarrow{CM}\right|^2 &= \left|\overrightarrow{MA}\right|^2; & & \Leftrightarrow \\
\left|\overrightarrow{CM}\right| &= \left|\overrightarrow{MA}\right|; & & \Leftrightarrow (2)
\end{aligned}$$

14.09.2005

4 Hausaufgaben

4.1 1. Hausaufgabe

4.1.1 Analysis-Buch Seite 14, Aufgabe 1

Gib´ drei verschiedene Stammfunktionen an zu

a) $\mathrm{f}\colon x \mapsto x^5; \Rightarrow$

$\mathrm{F}\colon x \mapsto \frac{1}{6}x^6 + C;$

b) $\mathrm{f}\colon x \mapsto \sin x; \Rightarrow$

$\mathrm{F}\colon x \mapsto -\cos x + C;$

c) $\mathrm{f}\colon x \mapsto 3x^2 - 7x + 19; \Rightarrow$

$\mathrm{F}\colon x \mapsto x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 19x + C;$

d) $\mathrm{f}\colon x \mapsto 2\sin x + \cos x; \Rightarrow$

$\mathrm{F}\colon x \mapsto -2\cos x + \sin x + C;$

e) $\mathrm{f}\colon x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}; \Rightarrow$

$\mathrm{F}\colon x \mapsto 2x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C;$

f) $\mathrm{f}\colon x \mapsto 0; \Rightarrow$

$\mathrm{F}\colon x \mapsto C;$

D_{f} sei jeweils maximal gewählt.

4.1.2 Analysis-Buch Seite 14, Aufgabe 2

Berechne

a) $\int x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 + C;$

b) $\int (x^2 + 1) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 + x + C;$

c) $\int (3x^2 + 2x + 1) \, \mathrm{d}x = x^3 + x^2 + x + C;$

d) $\int (\cos x - \sin x) \, \mathrm{d}x = \sin x + \cos x + C;$

e) $\int \mathrm{d}x = x + C;$

f) $\int 0 \, \mathrm{d}x = C;$

4.1.3 Analysis-Buch Seite 14, Aufgabe 3

Bestimme diejenige Stammfunktion von f, deren Graph durch P verläuft.

a) $\mathrm{f}\colon x \mapsto \frac{1}{2}x; \quad P(-2, 4); \Rightarrow$

$\mathrm{F}_C(x_P) = y_P; \Rightarrow \frac{1}{4}x_P^2 + C = y_P; \Rightarrow C = y_P - \frac{1}{4}x_P^2 = 4 - 1 = 3; \Rightarrow$

$\mathrm{F}_3\colon x \mapsto \frac{1}{4}x^2 + 3;$

b) $\mathrm{f}\colon x \mapsto x^2 - 2x - 1; \quad P(3, -2); \Rightarrow$

$\mathrm{F}_C(x_P) = y_P; \Rightarrow \frac{1}{3}x_P^3 - x_P^2 - x_P + C = y_P; \Rightarrow C = y_P - \frac{1}{3}x_P^3 + x_P^2 + x_P = 1;$
$\Rightarrow$

$\mathrm{F}_1\colon x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - x^2 - x + 1;$

c) $\mathrm{f}\colon x \mapsto \cos x + 1; \quad P(\pi, \pi); \Rightarrow$

$\mathrm{F}_C(x_P) = y_P; \Rightarrow \sin x_P + x_P + C = y_P; \Rightarrow C = y_P - \sin x_P - x_P = \pi - 0 - \pi = 0;$

$\mathrm{F}_0\colon x \mapsto \sin x + x;$

d) $\mathrm{f}\colon x \mapsto 0; \quad P(1980, 1980); \Rightarrow$

$\mathrm{F}_{1980}\colon x \mapsto 1980;$

17.09.2005

4.2 2. Hausaufgabe

4.2.1 Analysis-Buch Seite 14, Aufgabe 4

Berechne

a) $\int \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \int |x|\,\mathrm{d}x = \mathrm{F}_C(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + C & \text{für } x > 0; \\ C & \text{für } x = 0; \\ -\frac{1}{2}x^2 + C & \text{für } x < 0; \end{cases}$

Diffbarkeit für $x > 0$ und $x < 0$ gesichert, Nachweis des Falles für $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0+} \mathrm{F}'(x) = \lim\limits_{x\to 0-} \mathrm{F}'(x) = 0 = \mathrm{f}(0); \\ \mathrm{f} \text{ stetig bei } 0; \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Ermitteltes } \mathrm{F}_C \text{ ok}$$

b) $\int \operatorname{sgn} x\,\mathrm{d}x = \begin{cases} x + C_1 & \text{für } x > 0; \\ -x + C_2 & \text{für } x < 0; \end{cases} \quad x \neq 0;$

4.2.2 Analysis-Buch Seite 14, Aufgabe 5

$\mathrm{f}\colon x \mapsto \begin{cases} x & \text{für } x \leq 0; \\ x^2 & \text{für } x > 0; \end{cases}$

Berechne $\int \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x$.

$\int \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{F}_C(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + C & \text{für } x \leq 0; \\ \frac{1}{3}x^3 + C & \text{für } x > 0; \end{cases}$

Überprüfung des Falles für $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0-} \mathrm{F}'(x) = \lim\limits_{x\to 0+} \mathrm{F}'(x) = \mathrm{f}(0); \\ \mathrm{F}_C \text{ stetig bei } 0; \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Ermitteltes } \mathrm{F}_C \text{ ok}$$

4.2.3 Analysis-Buch Seite 14, Aufgabe 6

Gegeben sind die Funktionen a big g, bestimme die Scharen der zugehörigen Stammfunktionen A_c bis G_c.

$\mathrm{a}(x) = 6 - \frac{1}{24}x^2; \quad \Rightarrow \mathrm{A}_c(x) = 6x - \frac{1}{72}x^3 + C;$

$\mathrm{b}(x) = x^3 - 3x - 2; \quad \Rightarrow \mathrm{B}_c(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 - 2x + C;$

$\mathrm{c}(x) = -x^3 + 3x^2 - 2; \quad \Rightarrow \mathrm{C}_c(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 - 2x + C;$

$\mathrm{d}(x) = x^4 - 6x^2 + 5; \quad \Rightarrow \mathrm{D}_c(x) = \frac{1}{5}x^5 - 2x^3 + 5x + C;$ 19.09.2005

$\mathrm{e}(x) = \frac{1}{9}x^4 - \frac{8}{9}x^3 + 2x^2; \quad \Rightarrow \mathrm{E}_c(x) = \frac{1}{45}x^5 - \frac{2}{9}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + C;$

$\mathrm{f}(x) = \frac{1}{40}x^5 - \frac{1}{8}x^4; \quad \Rightarrow \mathrm{F}_c(x) = \frac{1}{240}x^6 - \frac{1}{40}x^5 + C;$

$\mathrm{g}(x) = -\frac{1}{16}x^6 + \frac{3}{8}x^4; \quad \Rightarrow \mathrm{G}_c(x) = -\frac{1}{112}x^7 + \frac{3}{40}x^5 + C;$

4.3 3. Hausaufgabe

4.3.1 Analysis-Buch Seite 14, Aufgabe 7

Gegeben sind die Funktionen h_a bis n_a; Bestimme die Scharen der zugehörigen Stammfunktionen H_a bis N_a.

$\mathrm{h}_a(x) = \frac{1}{2}x\left(x - a\right)^2; \quad \Rightarrow \mathrm{H}_a(x) = \frac{1}{36}x^3 - \frac{1}{18}ax^3 + \frac{1}{24}ax^2 + C;$

$\mathrm{i}_a(x) = \frac{2}{3a^2}x^3 - \frac{2}{a}x^2; \quad \Rightarrow \mathrm{I}_a(x) = \frac{1}{6a^2}x^4 - \frac{2}{3a}x^3 + C;$

$\mathrm{j}_s(x) = \frac{1}{6s}x^3 - x^2 + \frac{3}{2}sx; \quad \Rightarrow \mathrm{J}_s(x) = \frac{1}{24s}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{4}sx^2 + C;$

$\mathrm{k}_t(x) = \frac{1}{81}x^2\left(3x^2 - tx + 3t\right); \quad \Rightarrow \mathrm{K}_t(x) = \frac{1}{135}x^5 - \frac{1}{324}tx^4 + \frac{1}{81}tx^3 + C;$

$\mathrm{l}_k(x) = \frac{1}{2}x\left[x^2 - 2kx + k^2 - 4\right]; \quad \Rightarrow \mathrm{L}_k(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{9}kx^3 + \frac{1}{4}k^2x^2 - x^2 + C;$

$\mathrm{m}_k(x) = \frac{x}{729}\left(8k^3x^2 - 216k^2x + 1215k + 729\right); \quad \Rightarrow \mathrm{M}_k(x) = \frac{2}{729}k^3x^4 - \frac{8}{81}k^2x^3 + \frac{5}{6}kx^2 + \frac{1}{2}x^2 + C;$

$\mathrm{n}_a(x) = \frac{1}{8}x\left(x^2 - 3ax + 3a^2x - 12\right); \quad \Rightarrow \mathrm{N}_a(x) = \frac{1}{32}x^4 - \frac{1}{8}ax^3 + \frac{1}{8}a^2x^3 - \frac{3}{4}x^2 + C;$

4.3.2 Analysis-Buch Seite 15, Aufgabe 8

Berechne

a) $\int (ax + a)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}ax^2 + ax + C;$

b) $\int (ax + a)\,\mathrm{d}a = \frac{1}{2}xa^2 + \frac{1}{2}a^2 + C;$

c) $\int (ax + a)\,\mathrm{d}t = (ax + a)\,t + C;$

20.09.2005

4.4 4. Hausaufgabe

4.4.1 Analysis-Buch Seite 15, Aufgabe 9

Zeige die Richtigkeit von

a) $\int (x^2 - x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + C;$

$\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + C\right)' = x^2 - x;$

b) $\int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C;$

$\left(\frac{2}{3}x\sqrt{x} + C\right)' = \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C\right)' = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x};$

c) $\int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{x} + C;$

$\left(-\frac{1}{x} + C\right)' = \frac{1}{2}x^2;$

d) $\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + C;$

$\left[\frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + C\right]' = \frac{1}{2}(1 - \cos x \cos x + \sin x \sin x) = \frac{1}{2}\left(1 - 1 + \sin^2 x + \sin^2 x\right) = \sin^2 x;$

e) $\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x) + C;$

$\left[\frac{1}{2}(x + \sin x \cos x) + C\right]' = \frac{1}{2}(1 + \cos x \cos x - \sin x \sin x) = \frac{1}{2}(1 - 1 + \cos^2 x + \cos^2 x) = \cos^2 x;$

f) $\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = -\sqrt{a^2 - x^2} + C;$

$$\left(-\sqrt{a^2 - x^2} + C\right)' = -\frac{1}{2\sqrt{a^2 - x^2}}(0 - 2x) = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}};$$

26.09.2005

4.5 5. Hausaufgabe

4.5.1 Analysis-Buch Seite 15, Aufgabe 10

$\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + C_1;$

$\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}(\sin x - \cos x)^2 + C_2;$

Welcher Zusammenhang besteht zwischen C_1 und C_2?

$\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}(\sin x - \cos x)^2 + C_2 - \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) - C_1 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\sin x \cos x + C_2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin x \cos x - C_1 = \frac{1}{4} - C_1 + C_2;$

4.5.2 Analysis-Buch Seite 15, Aufgabe 11

Gib alle Stammfunktionen von f an mit

a) $\mathrm{f}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x < 1; \\ 1 & \text{für } 1 < x; \end{cases}$

$\int \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{F}_c(x) = \begin{cases} 1 + C_1 & \text{für } 0 \leq x < 1; \\ x + C_2 & \text{für } 1 < x; \end{cases}$

(Nachweis der Differenzierbarkeit von F_c an der Stelle 1 unnötig, da $1 \notin D_\mathrm{f}$)

b) $\mathrm{f}(x) = x + \operatorname{sgn} x; \quad D_\mathrm{f} = \mathbb{R} \setminus \{0\}\,;$

$\int \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - x + C_1 & \text{für } x < 0; \\ \frac{1}{2}x^2 + x + C_2 & \text{für } x > 0; \end{cases}$

4.5.3 Analysis-Buch Seite 15, Aufgabe 12

Zeige, dass F und G Stammfunktionen der gleichen Funktion sind:
$\mathrm{F}(x) = \sqrt{x+1};$
$\mathrm{G}(x) = \frac{x}{1+\sqrt{x+1}};$
$D_\mathrm{F} = D_\mathrm{G} = \left]-1, \infty\right[\,;$
Wie heißt die Konstante, durch die sich F und G unterscheiden?
$\mathrm{F}'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}};$

$$\mathrm{G}'(x) = \frac{\left(1+\sqrt{x+1}\right) - x\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{1 + 2\sqrt{x+1} + x + 1} = \frac{2\sqrt{x+1} + x + 2}{2\sqrt{x+1}\left(2\sqrt{x+1} + x + 2\right)} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}};$$

$\Rightarrow \mathrm{F}'(x) = \mathrm{G}'(x);$

$$\mathrm{F}(x) - \mathrm{G}(x) = \sqrt{x+1} - \frac{x}{1+\sqrt{x+1}} = \frac{x + \sqrt{x+1} - x + 1}{1+\sqrt{x+1}} = 1;$$ 03.10.2005

4.6 6. Hausaufgabe

4.6.1 Analysis-Buch Seite 36, Aufgabe 14

Berechne Ober- und Untersummen für eine Unterteilung in 2, 4 und 8 Streifen für die Fläche

- $F := \{(x,y)|0 \leq x \leq 4 \wedge 0 \leq y \leq x\}$;
  $\mathrm{f}(x) = x$;
  $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{4}{n} \cdot \mathrm{f}\left(\frac{4}{n}i\right)$;
  $s_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{4}{n} \cdot \mathrm{f}\left(\frac{4}{n}(i-1)\right)$;
  $\Rightarrow S_2 = 12; \quad S_4 = 10; \quad S_8 = 9;$
  $\Rightarrow s_2 = 4; \quad s_4 = 6; \quad s_8 = 7;$
- $G := \left\{(x,y)|1 \leq x \leq 2 \wedge 0 \leq y \leq \frac{1}{2}x + 1\right\}$;
  $\mathrm{f}(x) = \frac{1}{2}x + 1$;
  $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \mathrm{f}\left(1 + \frac{i}{n}\right)$;
  $s_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \mathrm{f}\left(1 + \frac{i-1}{n}\right)$;

05.10.2005

4.7 7. Hausaufgabe

4.7.1 Analysis-Buch Seite 35, Aufgabe 6

$\mathrm{f}(x) := -x^2 + 4x - 3; \quad D_{\mathrm{f}} = [1,3]$;

Gib die Flächenfunktion $\mathrm{A}_{\frac{3}{3}}$ an und berechne damit die Flächen

a) $\left\{(x,y)|\frac{3}{2} \leq x \leq 2 \wedge 0 \leq y \leq \mathrm{f}(x)\right\}$

$$A = \int\limits_{\frac{3}{2}}^{2} \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{11}{24};$$

b) $\left\{(x,y)|\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{2} \wedge 0 \leq y \leq \mathrm{f}(x)\right\}$

$$A = \int\limits_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{11}{12};$$

c) $\left\{(x,y)|\frac{3}{2} \leq x \leq 3 \wedge 0 \leq y \leq \mathrm{f}(x)\right\}$

$$A = \int\limits_{\frac{3}{2}}^{3} \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{9}{8};$$

4.7.2 Analysis-Buch Seite 35, Aufgabe 7

$\mathrm{f}(x) := -x^2 + 4x - 3; \quad D_\mathrm{f} = [1,3]\,;$

Berechne die Flächenfunktionen

a) $\mathrm{A}_1(b) = \int\limits_1^b \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3} - \frac{b^3-6b^2+9b}{3};$

b) $\mathrm{A}_2(b) = \int\limits_2^b \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3} - \frac{b^3-6b^2+9b}{3};$

c) $\mathrm{A}_{\frac{3}{2}}(b) = \int\limits_{\frac{3}{2}}^b \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{5}{24} - \frac{b^3-6b^2+9b}{3};$

4.7.3 Analysis-Buch Seite 36, Aufgabe 8

$\mathrm{f}(x) := -x^2 + 4x - 3; \quad D_\mathrm{f} = [1,3]\,;$

Berechne folgende Flächen (vgl. Aufgabe 7!)

a) $\{(x,y)|1 \leq x \leq 2 \land 0 \leq y \leq \mathrm{f}(x)\}$

$$A = \int\limits_1^2 \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3};$$

b) $\{(x,y)|2 \leq x \leq 3 \land 0 \leq y \leq \mathrm{f}(x)\}$

$$A = \int\limits_2^3 \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3};$$

c) $\left\{(x,y)|\frac{5}{2} \leq x \leq 3 \land 0 \leq y \leq \mathrm{f}(x)\right\}$

$$A = \int\limits_{\frac{5}{2}}^3 \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{5}{24};$$

d) $\{(x,y)|2{,}9 \leq x \leq 2{,}9 \land 0 \leq y \leq \mathrm{f}(x)\}$

$$A = \int\limits_{2{,}9}^{2{,}9} \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = 0;$$

08.10.2005

4.8 8. Hausaufgabe

4.8.1 Analysis-Buch Seite 36, Aufgabe 17a

Berechne mit Hilfe der Streifenmetnode den Flächeninhalt von
$F := \{(x,y)\,|\,0 \leq x \leq 1 \land 0 \leq y \leq 1 - x^2\}\,;$
$[\sum\limits_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}; \quad \sum\limits_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};]$
$\mathrm{f}(x) = 1 - x^2;$

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{n}\mathrm{f}\left(\tfrac{i-1}{n}\right) = \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[1 - \tfrac{i^2-2i+1}{n^2}\right] = \tfrac{n\cdot 1}{n} + \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} -\tfrac{i^2-2i+1}{n^2} = \\
&= 1 - \tfrac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}\left[i^2 - 2i + 1\right] = 1 - \tfrac{1}{n^3}\left(\sum_{i=1}^{n} i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} i + n\right) = \\
&= 1 - \tfrac{1}{n^3}\left[\tfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + n\,(n+1) + n\right] = 1 - \tfrac{2n^2+9n+13}{6n^2};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_n &= \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{n}\mathrm{f}\left(\tfrac{i}{n}\right) = \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[1 - \tfrac{i^2}{n^2}\right] = \tfrac{n\cdot 1}{n} - \tfrac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \\
&= 1 - \tfrac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = 1 - \tfrac{2n^2+n+2n+1}{6n^2} = 1 - \tfrac{2n^2+3n+1}{6n^2};
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}; \\ \lim\limits_{n\to\infty} s_n = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}; \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \tfrac{2}{3} =: A;$$ 11.10.2005

4.9 9. Hausaufgabe

4.9.1 Analysis-Buch Seite 36, Aufgabe 16

$\mathrm{f}\colon x \mapsto 4 - x; \quad D_{\mathrm{f}} = [0,4]\,;$

Berechne die Ober- und Untersumme für eine Einteilung in vier Streifen für die Fläche $F = \{(x,y)\,|\,0 \leq x \leq 4 \land 0 \leq y \leq \mathrm{f}(x)\}$. Beachte die Monotonie von G_{f}!

$S_n = \frac{4}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{f}\left(4\frac{i-1}{n}\right);$

$s_n = \frac{4}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{f}\left(4\frac{i}{n}\right);$

$\Rightarrow S_4 = 10; \quad s_4 = 6;$

4.9.2 Analysis-Buch Seite 36, Aufgabe 19

Schreibe A_k als Integralfunktion $x \mapsto \int_k^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t$ mit geeigneter Integrandenfunktion f.

a) $\mathrm{A}_0(x) = x;$

$$\mathrm{A}_k(x) = \int\limits_k^x 1\,\mathrm{d}t;$$

b) $\mathrm{A}_0(x) = 2x + x^2;$

$$\mathrm{A}_k(x) = \int\limits_k^x (2+2t)\,\mathrm{d}t;$$

c) $\mathrm{A}_0(x) = \sin x;$

$$\mathrm{A}_k(x) = \int\limits_k^x \cos t\,\mathrm{d}t;$$

d) $\mathrm{A}_1(x) = 1 - x;$

$$\mathrm{A}_k(x) = \int\limits_k^x -1\,\mathrm{d}t;$$

e) $\mathrm{A}_1(x) = x^2 - 1;$

$$\mathrm{A}_k(x) = \int\limits_k^x 2t\,\mathrm{d}t;$$

f) $\mathrm{A}_{-1}(x) = -x^2 + 1;$

$$\mathrm{A}_k(x) = \int\limits_k^x -2t\,\mathrm{d}t;$$

12.10.2005

4.10 10. Hausaufgabe

4.10.1 Analysis-Buch Seite 37, Aufgabe 33

$\mathrm{f}_a(x) := x^3 - ax; \quad D_{\mathrm{f}_a} = \mathbb{R}; \quad a \geq 0;$

a) Diskutiere die Kurvenschar (Nullstellen, Extrema, Wendepunkte) und zeichne die Graphen von f_3 und f_0.

$\mathrm{f}_a(x) = x^3 - ax = x\left(x + \sqrt{a}\right)\left(x - \sqrt{a}\right);$

$\Rightarrow N_1(0,0); \quad N_2(-\sqrt{a}, 0); \quad N_3(\sqrt{a}, 0);$

$\mathrm{f}_a'(x) = 3x^2 - a = 3\left(x + \sqrt{\tfrac{a}{3}}\right)\left(x - \sqrt{\tfrac{a}{3}}\right);$

$$\Rightarrow \begin{cases} P_{\mathrm{HOP}}\left(-\sqrt{\frac{a}{3}}, -\left(\frac{a}{3}\right)^{\frac{3}{2}} + a\sqrt{\frac{a}{3}}\right), \quad P_{\mathrm{TIP}}\left(\sqrt{\frac{a}{3}}, \left(\frac{a}{3}\right)^{\frac{3}{2}} - a\sqrt{\frac{a}{3}}\right) & \text{für } a \neq 0; \\ P_{\mathrm{TEP}}(0,0) & \text{für } a = 0; \end{cases}$$

$\mathrm{f}_a''(x) = 6x;$

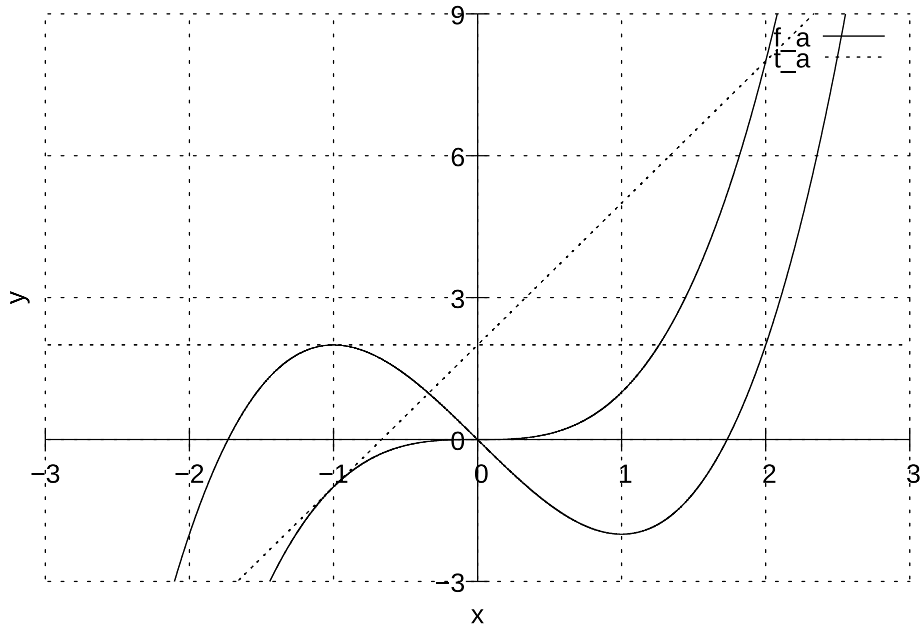
$\Rightarrow P_{\mathrm{WEP}}(0,0);$

b) t_a sei die Tangente an G_{f_a} im Punkt $B(-1, b)$. Berechne den Inhalt des Flächenstücks zwischen t_a und G_{f_a} für $a = 3$, $a = 0$ und allgemein.

$\Rightarrow \dfrac{\mathrm{t}_a(x) - \mathrm{f}_a(-1)}{x+1} = \mathrm{f}_a'(-1) = 3 - a; \Rightarrow \mathrm{t}_a(x) = x\,(3-a) + 2;$

$\mathrm{t}_a(d) = \mathrm{f}_a(d); \Rightarrow 0 = d^3 - 3d - 2 = (d-2)\,(d+1)^2\,;$

$A = \int\limits_{-1}^{2} \mathrm{t}_a(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{-1}^{2} \mathrm{f}_a(x)\,\mathrm{d}x = \ldots = \frac{27}{4};$



17.10.2005

„Einer vons uns beiden ist doof"

„Gehen können so viel wie sie wollen *rausdrück*" 18.10.2005

Elementargeometrische Lösung von b) für $a = 3$:

$A = 1\cdot 2 - \int\limits_{-1}^{0} \mathrm{f}_3(x)\,\mathrm{d}x + 2\cdot 2 - \int\limits_{\sqrt{3}}^{2} \mathrm{f}_3(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{\sqrt{3}} -\mathrm{f}_3(x)\,\mathrm{d}x = 2 - \frac{5}{4} + 4 - \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{27}{4};$ 17.10.2005

4.11 11. Hausaufgabe

4.11.1 Analysis-Buch Seite 36, Aufgabe 11

$\mathrm{A}_k\colon x \mapsto x + 1; \quad D_{\mathrm{A}_k} = [-1, \infty[\,;$

A_k ist eine Flächenfunktion. Welche Randfunktion f begrenzt die betrachtete Fläche? Welchen Wert hat k? Skizze!

$\mathrm{f}(x) = \mathrm{A}_k'(x) = 1;$

$\mathrm{A}_k(x) = \int\limits_k^x \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(k) = x + 1 - k - 1 = x - k = \mathrm{A}_k(x) = x + 1; \Rightarrow$
$k = -1;$

(alternativ: $\mathrm{A}_k(k) = 0; \Rightarrow k = -1;$)

4.11.2 Analysis-Buch Seite 36, Aufgabe 12

$\mathrm{f}\colon x \mapsto 2x + 1; \quad D_\mathrm{f} = \left[-\frac{1}{2}, \infty\right[;$

Gib drei verschiedene Flächenfunktionen an, bei denen f eine Randfunktion ist. Gib jeweils auch k an.

$\mathrm{A}_k(x) = \int\limits_k^x \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \left[x^2 + x\right]_k^x = x^2 + x - k^2 - k; \quad k \in D_\mathrm{f};$ 18.10.2005

4.12 12. Hausaufgabe

4.12.1 Analysis-Buch Seite 36, Aufgabe 20

Berechne die beiden ersten Ableitungen folgender Integralfunktionen

a) $\mathrm{a}(x) := \int\limits_0^x t\,\mathrm{d}t; \Rightarrow \mathrm{a}''(x) = 1;$

b) $\mathrm{b}(x) := \int\limits_1^x t\,\mathrm{d}t; \Rightarrow \mathrm{b}''(x) = 1;$

c) $\mathrm{c}(x) := \int\limits_0^x (t^2 - t + 1)\,\mathrm{d}t; \Rightarrow \mathrm{c}''(x) = 2x - 1;$

d) $\mathrm{d}(x) := \int\limits_0^x \sin t\,\mathrm{d}t; \Rightarrow \mathrm{d}''(x) = \cos x;$

e) $\mathrm{e}(x) := \int\limits_0^x \sqrt{t}\,\mathrm{d}t; \Rightarrow \mathrm{e}''(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}};$

f) $\mathrm{f}(x) := \int\limits_{1054}^x (t^3 - 1)\cos t\,\mathrm{d}t; \Rightarrow \mathrm{f}''(x) = -3x^2 \sin x + \sin x;$

4.12.2 Analysis-Buch Seite 36, Aufgabe 22

Berechne und deute geometrisch

a) $\int\limits_0^2 x \,\mathrm{d}x = 2;$

b) $\int\limits_0^2 (x+1) \,\mathrm{d}x = 4;$

c) $\int\limits_0^2 (2-x) \,\mathrm{d}x = 2;$

d) $\int\limits_0^2 (3-x) \,\mathrm{d}x = 4;$

4.12.3 Analysis-Buch Seite 37, Aufgabe 24

Berechne

a) $\int\limits_0^1 (x^2+x) \,\mathrm{d}x = \frac{5}{6};$

b) $\int\limits_1^2 (x^2+x) \,\mathrm{d}x = \frac{23}{6};$

c) $\int\limits_0^2 (x^2+x) \,\mathrm{d}x = \frac{14}{3};$

4.12.4 Analysis-Buch Seite 37, Aufgabe 25

Berechne die Fläche, die von der Parabel mit der Gleichung $y = 1 - x^2$ und der x-Achse begrenzt wird.

$\int\limits_{-1}^1 (1-x^2) \,\mathrm{d}x = \frac{4}{3};$ 19.10.2005

4.13 13. Hausaufgabe

4.13.1 Analysis-Buch Seite 37, Aufgabe 27

Gib eine Integralfunktion zur Integrandenfunktion $\mathrm{f}\colon x \mapsto x^2; \quad D_\mathrm{f} = \mathbb{R}$ an, die

a) an der Stelle 1 den Funktionswert 0

b) an der Stelle a den Funktionswert b hat.

$\varphi\colon x \mapsto \varphi(x) = \int\limits_k^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}k^3;$

$\varphi(a) = \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{3}k^3 = b; \Rightarrow k = \sqrt[3]{a^3 - 3b};$

$\Rightarrow \int\limits_{\sqrt[3]{a^3-3b}}^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t;$

$\Rightarrow \int\limits_{\sqrt[3]{1^3-3\cdot 0}}^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_1^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t;$

4.13.2 Analysis-Buch Seite 37, Aufgabe 28c

Berechne die Fläche zwischen der x-Achse und G_f im Bereich von $x = a$ bis $x = b$.

$\mathrm{f}(x) := -x^2 + x; \quad a = -1; b = 0;$

$\int\limits_a^b |\mathrm{f}(x)|\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^0 -\mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{5}{6};$

4.13.3 Analysis-Buch Seite 37, Aufgabe 29

Berechne die Fläche zwischen G_f und der x-Achse für

a) $\mathrm{f}\colon x \mapsto 2 - x - x^2;$

$\mathrm{f}(x) = 0; \Rightarrow x_1 = -2; \quad x_2 = 1;$

$\Rightarrow \int\limits_{-2}^1 \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{9}{2};$

b) $\mathrm{f}\colon x \mapsto x^2\,(x+2) = x^3 + 2x^2;$

$$\mathrm{f}(x) = 0; \Rightarrow x_1 = -2; \quad x_2 = 0;$$

$$\Rightarrow \int\limits_{-2}^{0} -\mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{4}{3};$$

4.13.4 Analysis-Buch Seite 37, Aufgabe 31

Berechne

a) $\int\limits_{0}^{1} (x - x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6};$

b) $\int\limits_{2}^{3} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{19}{3};$

c) $\int\limits_{2}^{3} t^2\,\mathrm{d}t = \frac{19}{3};$

d) $\int\limits_{-2}^{+2} v^2\,\mathrm{d}v = \frac{16}{3};$

e) $\int\limits_{0}^{b} (ax - x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}ab^2 - \frac{1}{3}b^3;$

f) $\int\limits_{0}^{b} (ax - x^2)\,\mathrm{d}a = \frac{1}{2}b^2x - bx^2;$

g) $\int\limits_{0}^{b} (ax - x^2)\,\mathrm{d}t = b\,(ax - x^2)\,;$

21.10.2005

4.14 14. Hausaufgabe

4.14.1 Analysis-Buch Seite 37, Aufgabe 32

$$\mathrm{f}(x) := \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & \text{für } x \in [0,3]\,; \\ -x + 5 & \text{für } x \in \,]3,4]\,; \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathrm{F}(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x & \text{für } x \in [0,3]\,; \\ \frac{15}{4} & \text{für } x = 3; \\ -\frac{1}{2}x^2 + 5x - \frac{27}{4} & \text{für } x \in \,]3,4]\,; \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{F} \text{ stetig in } D_{\mathrm{f}}; \\ \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3-} \mathrm{F}'(x) = 2 \\ \lim\limits_{x\to 3+} \mathrm{F}'(x) = 2 \end{array}\right\} = \mathrm{F}'(3) = \mathrm{f}(x); \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{F}' = \mathrm{f}';$$

Berechne

a) $\int\limits_0^3 \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{F}(3) - \mathrm{F}(0) = \frac{15}{4};$

b) $\int\limits_3^4 \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{F}(4) - \mathrm{F}(3) = \frac{3}{2};$

c) $\int\limits_0^4 \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{F}(4) - \mathrm{F}(0) = \int\limits_0^3 \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_3^4 \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{F}(3) - \mathrm{F}(0) + \mathrm{F}(4) - \mathrm{F}(3) = \mathrm{F}(4) - \mathrm{F}(0) = \frac{21}{4};$

4.14.2 Analysis-Buch Seite 37, Aufgabe 34

$\mathrm{f}(x) := \sqrt{4 - x^2}; \quad D_\mathrm{f} = [-2, 2]\,;$

a) Zeige, dass für $(x_0, y_0) \in G_\mathrm{f}$ gilt: $x_0^2 + y_0^2 = 4;$

$x_0^2 + y_0^2 = x_0^2 + \mathrm{f}(x_0) = x_0^2 + 4 - x_0^2 = 4;$

Was folgt daraus für die Form von G_f?

f beschreibt einen Halbkreis mit Radius $r = \sqrt{4} = 2.$

b) Berechne mit Holfe geometrischer Überlegungen

- $\int\limits_{-2}^{+2} \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi r^2}{2} = 2\pi;$
- $\int\limits_{0}^{+2} \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi r^2}{4} = \pi;$
- $\int\limits_{0}^{1} \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = r^2\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \mathrm{f}(1) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{\mathrm{f}(1)}{1}\right) r^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}}{2} r^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2};$
- $\int\limits_{1}^{2} \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{+2} \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{0}^{1} \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2};$

4.14.3 Analysis-Buch Seite 37, Aufgabe 35

Berechne $\int\limits_0^2 \sqrt{9 - x^2}\,\mathrm{d}x$, indem du den Kreis $x^2 + y^2 = 9$ betrachtest.

$r = \sqrt{9} = 3;$

$\int\limits_0^2 \sqrt{9 - x^2}\,\mathrm{d}x = r^2\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \mathrm{f}(2) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{\mathrm{f}(2)}{2}\right) r^2 + \sqrt{5} \approx 5{,}52;$ 24.10.2005

4.15 15. Hausaufgabe

4.15.1 Analysis-Buch Seite 37, Aufgabe 36

Berechne folgende Integrale durch geometrische Überlegungen

a) $\int\limits_0^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2 = 2;$

b) $\int\limits_1^4 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(1+4\right)3 = \frac{15}{2};$

c) $\int\limits_{-3}^5 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 5 - \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3 = 8;$

d) $\int\limits_0^2 \left(x+1\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(1+3\right)2 = 4;$

e) $\int\limits_1^4 \left(5-x\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(4+1\right)3 = \frac{15}{2};$

f) $\int\limits_2^{\frac{5}{2}} \left(\frac{1}{2}x+3\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(4+\frac{17}{4}\right)\frac{1}{2} = \frac{33}{16};$

4.15.2 Analysis-Buch Seite 38, Aufgabe 41

Ein Körper bewegt sich mit der Geschwindigkeit $v(t) = t^2\cdot\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3}$. Wie groß ist seine mittlere Geschwindigkeit $\overline{v}$ während der ersten Sekunde, während der ersten zwei Sekunden, während der ersten zehn Sekunden und während der zweiten Sekunde?

$\overline{v}_{a,b} = \frac{\int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t}{b-a} = \frac{\frac{b^3}{3}-\frac{a^3}{3}}{b-a};$

$\Rightarrow \overline{v}_{0,1} = \frac{1}{3}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}};$

$\Rightarrow \overline{v}_{0,2} = \frac{4}{3}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}};$

$\Rightarrow \overline{v}_{0,10} = \frac{100}{3}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}};$

$\Rightarrow \overline{v}_{1,2} = \frac{7}{3}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}};$ 25.10.2005

4.16 16. Hausaufgabe

4.16.1 Analysis-Buch Seite 72, Aufgabe 68

$\mathrm{f}_a(x) = \frac{1}{4}\left(ax-5\right)^2; \quad D_{\mathrm{f}_a} = \mathbb{R}; \quad a \in \mathbb{R};$

Jede Scharkurve schließt mit den Randgeraden des Streifens $0 \leq x \leq 5$ und der x-Achse eine Fläche ein. Bestimme a so, dass der Inhalt am kleinsten ist (mit Nachweis des Minimums).

$\forall x \in D_{\mathrm{f}_a} : \mathrm{f}_a(x) \geq 0;$

$\Rightarrow \mathrm{A}(a) = \int\limits_0^5 \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\left[\frac{a^2}{3}x^3 - 5ax^2 + 25x\right]_0^5 = \frac{1}{4}\left(\frac{a^2}{3}125 - 125a + 125\right);$

$\Rightarrow \mathrm{A}'(a) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\mathrm{A}(a) = \frac{1}{4}\left(\frac{250}{3}a - 125\right);$

$\Rightarrow \mathrm{A}'(a_0) = 0; \Rightarrow a_0 = \frac{3}{2};$ (VZW von A' bei $\frac{3}{2}$ von $-$ nach $+$)

4.16.2 Analysis-Buch Seite 72, Aufgabe 70

$\mathrm{f}_a(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + a; \quad D_{\mathrm{f}} = \mathbb{R}; \quad a \in \mathbb{R};$

Bestimme a so, dass G_{f_a} durch $(3, -\frac{7}{3})$ geht. Berechne für dieses a den Inhalt des Flächenstücks im 1. und 4. Quadranten, das die Gerade $\mathrm{g}(x) = \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$ und G_{f_a} umschließen.

$\mathrm{f}_{a_0}(3) = -\frac{7}{3}; \Rightarrow a_0 = \frac{2}{3};$

$\mathrm{f}_{a_0}(x) = \mathrm{g}(x); \Rightarrow x_1 = -4; \quad x_2 = 0; \quad x_3 = 4;$

$\int\limits_0^4 \mathrm{g}(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^4 \mathrm{f}_{a_0}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{64}{3};$ 26.10.2005

4.17 17. Hausaufgabe

4.17.1 Analysis-Buch Seite 72, Aufgabe 62

$\mathrm{g}(x) = ax^2 + bx + c; \quad D_{\mathrm{g}} = \mathbb{R}; \quad a, b, c \in \mathbb{R};$

$\mathrm{G}(x) = \int\limits_0^x \mathrm{g}(t)\,\mathrm{d}t;$

Der Graph der Integralfunktion G hat bei 1 eine waagrechte Tangente und bei $\frac{1}{2}$ einen Wendepunkt, in dem die Tangente parallel ist zur Geraden $y = -\frac{1}{4}x + 4711$. Ermittle die Funktionsterme von G und g.

I.	$\mathrm{g}(1) = 0; \Rightarrow a + b + c = 0;$	$\Rightarrow c = -b - a;$
II.	$\mathrm{g}'(\frac{1}{2}) = 0; \Rightarrow a + b = 0;$	$\Rightarrow b = -a; \Rightarrow c = a - a = 0;$
III.	$\mathrm{g}(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}; \Rightarrow \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + c = -\frac{1}{4};$	$\Rightarrow a = 1; \Rightarrow b = -a = -1;$

$\Rightarrow \mathrm{g}(x) = x^2 - x;$

$\Rightarrow \mathrm{G}(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2;$

Nachweis des Wendepunktes von G_{G} an der Stelle $\frac{1}{2}$:

VZW von g' bei $\frac{1}{2}$ von $-$ nach $+$; 02.11.2005

4.18 18. Hausaufgabe

4.18.1 Analysis-Buch Seite 70, Aufgabe 33

Gegeben sind die Funktionen

$\mathrm{p}\colon x \mapsto \mathrm{p}(x) := -\frac{1}{2}(x-3)^2 + \frac{9}{2}; \quad D_{\mathrm{p}} = \mathbb{R};$

$\mathrm{g}_a\colon x \mapsto \mathrm{g}_a(x) := ax; \quad D_{\mathrm{g}_a} = \mathbb{R}; \quad a \in \mathbb{R};$

a) Berechne den Inhalt A der Fläche, die von der Parabel und der x-Achse eingeschlossen ist.

$\mathrm{p}(x) = 0; \Rightarrow -\frac{1}{2}x^2 + 3x = 0;$

$\Rightarrow x_1 = 0; \quad -\frac{1}{2}x_2 = -3; \Rightarrow x_2 = 6;$

$\Rightarrow \mathrm{p}(x) = -\frac{1}{2}x(x-6);$

$\Rightarrow$ VZW von $-$ nach $+$ bei 0 und von $+$ nach $-$ bei 6;

$\Rightarrow A = \int\limits_0^6 \mathrm{p}(x)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_0^6 = 18;$

b) Berechne die Koordinaten der Punkte P und Q, in denen sich G_{p} und G_{g_a} schneiden.

$\mathrm{p}(x) = \mathrm{g}_a(x); \Rightarrow -\frac{1}{2}x^2 + 3x = ax;$

$\Rightarrow x_3 = 0; \quad -\frac{1}{2}x_4^2 + (3-a) = 0; \Rightarrow x_4 = 6 - 2a;$

$\Rightarrow P(0,0); \quad Q(6-2a, 6a-2a^2);$

c) Berechne den Inhalt $B(a)$ der Fläche, die zwischen G_p und G_{g_a} liegt.

$$\begin{aligned}\mathrm{B}(a) \quad := \quad & \left|\int\limits_0^{6-2a} \mathrm{p}(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^{6-2a} \mathrm{g}_a(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\left[-\tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{3}{2}x^2\right]_0^{6-2a} - \left[\tfrac{a}{2}x^2\right]_0^{6-2a}\right| = \\ & \left|-\tfrac{1}{6}(6-2a)^3 + \tfrac{3}{2}(6-2a)^2 - \tfrac{a}{2}(6-2a)^2\right| = (6-2a)^2\left|-1 + \tfrac{1}{3}a + \tfrac{3}{2} - \tfrac{a}{2}\right| = \\ & \left|\tfrac{1}{12}(6-2a)^3\right| = \tfrac{2}{3}\left|3-a\right|^3;\end{aligned}$$

d) Für welchen Wert von a liegt zwischen G_p und G_{g_a} keine Fläche? Welche besondere Lage hat dann G_p zu G_{g_a}?

$\mathrm{B}(a) = 0; \Rightarrow 3 - a = 0; \Rightarrow a = 3;$

G_{g_a} ist dann Tangente von G_p an der Stelle 0. (Beweis: $\mathrm{g}_3'(0) = \mathrm{p}'(0)$;)

e) Eine Gerade durch den Ursprung geht durch den Scheitel der Parabel; diese Gerade zerlegt die Fläche A von a) in zwei Teilflächen. Berechne das Verlältnis: größere Teilfläche durch kleinere Teilfläche.

$\mathrm{p}'(x_5) = 0; \Rightarrow x_5 = 3; \quad \mathrm{p}(3) = 9;$

$\mathrm{u}(x) := \frac{\mathrm{p}(3)}{6}x = \frac{3}{2}x;$

$$\Rightarrow \frac{A - \left(\int\limits_0^3 \mathrm{p}(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^3 \mathrm{u}(x)\,\mathrm{d}x\right)}{\int\limits_0^3 \mathrm{p}(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^3 \mathrm{u}(x)\,\mathrm{d}x} = \frac{A}{9 - \frac{27}{4}} - 1 = 7;$$

f) Für welchen Wert von a ist $\mathrm{B}(a)$ achtmal so groß wie die Fläche zwischen der Parabel und der x-Achse?

$\mathrm{B}(a) = 8A; \Rightarrow \frac{2}{3}\left|3-a\right|^3 = 8A; \Rightarrow (3-a)^3 = \pm 12A; \Rightarrow a = 3 - \sqrt[3]{\pm 12A}$
„=“ $3 - \sqrt[3]{\pm 216}$ „=“ $3 - \pm 2\cdot 3; \Rightarrow a_1 = -3; \quad a_2 = 9;$

g) $\int\limits_c^x \mathrm{p}(t)\,\mathrm{d}t =: \mathrm{I}_c(x);$

Berechne die Integralfunktion I_c von p.

$$\mathrm{I}_c(x) = \int\limits_c^x \mathrm{p}(t)\,\mathrm{d}t = \left[-\tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{3}{2}x^2\right]_c^x = \tfrac{1}{6}\left(-x^3 + 9x^2 + c^3 - 9c^2\right);$$

h) Für welche Werte von c ist I_c symmetrisch zum Koordinatensystem?

$\mathrm{I}_c(x) = \mathrm{I}_c(-x); \Rightarrow -1 = 0;$

$\mathrm{I}_c(x) = -\mathrm{I}_c(-x);$ $\Rightarrow$ (Keine von x unabhängige Aussage)

$\Rightarrow$ Es gibt kein $c \in \mathbb{R}$, für welches I_c symmetrisch zum Koordinatensystem ist;

i) Für welche Werte von c geht I_c durch den Ursprung?

$\mathrm{I}_c(0) = 0; \Rightarrow -x^3 + 9x^2 + c^3 - 9c^2 = 0;$

$\Rightarrow c_1 = 0; \quad c_2 - 9 = 0; \Rightarrow c_2 = 9;$

4.18.2 Analysis-Buch Seite 72, Aufgabe 61

$\mathrm{f}_a(x) := -\frac{4}{a^2}\,(8-a)\,(x^2 - ax)\,; \quad D_{\mathrm{f}_a} = \mathbb{R}; \quad a \neq 0;$

a) Bestimme den Flächeninhalt $\mathrm{A}(a)$ der Fläche zwischen G_{f_a} und der x-Achse.

$\mathrm{f}_a(x) = 0; \Rightarrow x^2 - ax = 0;$

$\Rightarrow x_1 = 0; \quad x_2 - a = 0; \Rightarrow x_2 = a;$

$\Rightarrow \mathrm{f}_a(x) = -\frac{4}{a^2}\,(8-a)\cdot x\,(x-a)\,;$

$$\mathrm{A}(a) = \left|\int\limits_0^a \mathrm{f}_a(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|-\tfrac{4}{a^2}\,(8-a)\left[\tfrac{x^3}{3} - \tfrac{a}{2}x^2\right]_0^a\right| = \frac{2}{3}\Big|(8-a)\,a\Big|;$$

b) Für welche a ist der Inhalt der Fläche $\mathrm{A}(a)$ gleich 8?

$\mathrm{A}(a) = 8; \Rightarrow \frac{2}{3}\,(8-a)\,a = \pm_1 8; \Rightarrow (8-a)\,a = \pm_1 12; \Rightarrow -a^2 + 8a \mp_1 12 = 0;$

$$\Rightarrow a_{1,2,3,4} = \frac{-8 \pm_2 \sqrt{64 + 4\cdot \mp_1 12}}{-2} = \frac{-8 \pm_2 4\sqrt{4 \mp_1 3}}{-2} = 4 \mp_2 2\sqrt{4 \mp_1 3};$$

$\Rightarrow a_1 = 2; \quad a_2 = 6;$
$\Rightarrow a_3 = 4 + 2\sqrt{7}; \quad a_4 = 4 - 2\sqrt{7};$

(Kontrolle durch Einsetzen in Anfangsgleichung beweist Korrektheit.)

Es gibt aber kein globales Maximum, da $\mathrm{A}(a) \to \infty$ für $a \to \pm\infty$.

c) Bestimme a so, dass $\mathrm{A}(a)$ möglichst groß wird. Gib den maximalen Flächeninhalt an.

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\mathrm{A}(a) = \mathrm{sgn}\big(\frac{2}{3}\,(8-a)\,a\big)\cdot \frac{2}{3}\,(8-2a) = 0;$ (für $a \neq 0$)

$\Rightarrow 8 = 2a_5; \Rightarrow a_5 = 4;$ (VZW gegeben)

$\mathrm{A}(4) = \frac{32}{3};$

d) $\mathrm{F}_4(x) := \int\limits_4^x \mathrm{f}_4(t)\,\mathrm{d}t;$

Bestimme den Term $\mathrm{F}_4(x)$ und alle Nullstellen von F_4.

$\mathrm{F}_4(x) = \int\limits_4^x \mathrm{f}_4(t)\,\mathrm{d}t \int\limits_4^x \mathrm{f}_4(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - \frac{32}{3};$

Nullstellen: $\mathrm{F}_4(x) = 0; \Rightarrow x_3 = -2; \quad x_4 = 4;$

e) Berechne die Hoch-, Tief- und Wendepunkte von $\mathrm{G}_{\mathrm{F}_4}$.

$\mathrm{f}_4(x) = -x\,(x-4)\,;$

$\Rightarrow$ VZW von f_4 von $-$ nach $+$ bei 0 und von $+$ nach $-$ bei a;

$\Rightarrow P_{\mathrm{HOP}}(4, 0);$

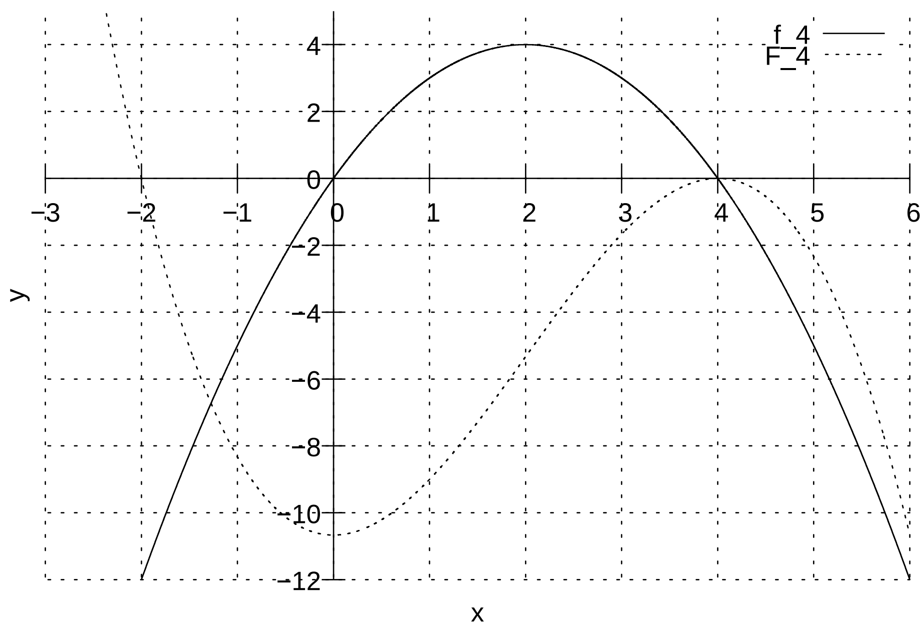
$\Rightarrow P_{\mathrm{TEP}}\left(0, -\frac{32}{3}\right)\,;$

$\mathrm{f}_4'(x) = 4 - 2x = -2\,(x-2)\,;$

$\Rightarrow$ VZW von f_4' von $+$ nach $-$ bei 2;

$\Rightarrow P_{\mathrm{WEP}}\left(2, -\frac{16}{3}\right)\,;$

f) Skizziere G_{f_4} und G_{F_4} in ein und demselben Koordinatensystem.



07.11.2005

„Und das kann man zweimal unterstreichen, wenn das einen befriedigt“

„[Jeder ist] defizitär“

„Mei´ Doofheit hat halt keine Grenzen“ 11.11.2005

4.19 19. Hausaufgabe

4.19.1 Altes Stochastik-Buch Seite 50, Aufgabe 7

Vier Politiker sollen nebeneinander auf einem Gruppenbild für die Presse fotografiert werden, können sich aber über die Anordnung nicht einigen. Man beschließt, alle Anordnungen aufzunehmen, die Bilder in eine Urne zu legen und daraus das Bild für die Presse zu ziehen.

Wie viele Bilder müssen gemacht werden?

$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24;$

4.19.2 Altes Stochastik-Buch Seite 50, Aufgabe 11

Auf einer Speisekarte stehen 3 Vorspeisen, 4 Hauptspeisen und 6 Nachspeisen. Wie viele verschiedene Menüs mit Vor-, Haupt- und Nachspeise lassen sich daraus zusammenstellen?

$3 \cdot 4 \cdot 6 = 72;$

4.19.3 Altes Stochastik-Buch Seite 50, Aufgabe 19

Wie viele 6-stellige Zahlen gibt es, die die Eins einmal, die Zwei zweimal und die Drei dreimal enthalten?

$6 \cdot 10 \cdot 1 = 60;$

(Beliebige Wahl bei Verteilung der Eins (6 Möglichkeiten); Eingeschränkte Wahl bei Verteilung der Zweien ($1{+}2{+}3{+}4 = 10$ Möglichkeiten); Keine Wahl bei Verteilung der Dreien (0 Möglichkeiten))

(Alternativ: Beliebige Wahl bei Verteilung der Dreien ($1+3+6+10 = 20$ Möglichkeiten); Eingeschränkte Wahl bei Verteilung der Zweien ($1 + 2 = 3$ Möglichkeiten); Keine Wahl bei Verteilung der Eins (0 Möglichkeiten)) 14.11.2005

4.20 20. Hausaufgabe

4.20.1 Aufgabe 4) der 1. Klausur

Siehe Verbesserung der 1. Klausur. 15.11.2005

4.21 21. Hausaufgabe

4.21.1 Differenzen zwischen Folgegliedern

$a_n = 3 \cdot 1{,}8^n;$

n	a_n	Differenz (gerundet)	Differenz der Differenz (gerundet)	Differenz der Differenz der Differenz (gerundet)
0	3	2	1	1
1	5	4	3	2
2	9	7	6	4
3	17	13	11	8
4	31	25	20	16
5	56	45	36	29
6	102	81	65	52
7	183	146	117	94
8	330	264	211	169
9	595	476	380	304
10	1071	856	685	548
11	1928	1542	1233	987
12	3470	2776	2221	1776
13	6246	4997	3998	
14	11244	8995		
15	20239			

$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n = 3 \cdot 1{,}8^{n+1} - 3 \cdot 1{,}8^n = 3 \cdot (1{,}8 - 1) \cdot 1{,}8^n = 2{,}4 \cdot 1{,}8^n;$

$\Delta^2 a_n = \Delta(\Delta a_n) = 2{,}4 \cdot 1{,}8^{n+1} - 2{,}4 \cdot 1{,}8^n = 2{,}4 \cdot (1{,}8 - 1)\, 1{,}8^n = 1{,}92 \cdot 1{,}8^n;$

$\Delta^k a_n = \Delta(\Delta(\cdots a_n)\cdots) = 3 \cdot 0{,}8^k \cdot 1{,}8^n;$

$\Rightarrow \Delta^k a_n \stackrel{!}{=} 0; \Rightarrow 3 \cdot 0{,}8^k \cdot 1{,}8^n \stackrel{!}{=} 0;$

$\Rightarrow$ Es gibt kein $k \in \mathbb{N}$, für das $\Delta^k a_n$ 0 wäre.

4.21.2 Differenzen zwischen Folgegliedern

$c_n = n^3;$

$\Delta c_n = c_{n+1} - c_n = (n+1)^3 - n^3 = \cdots = n^3 + 3n^2 + 2n + 1;$

$\Delta^2 c_n = \Delta\left(\Delta c_n\right) = (n+1)^3 + 3\,(n+1)^2 + 2\,(n+1) + 1 - n^3 - 3n^2 - 2n - 1 = \cdots = 3n^2 + 9n + 6;$

$\Delta^3 c_n = \Delta\left(\Delta\left(\Delta c_n\right)\right) = 3\,(n+1)^2 + 9\,(n+1) + 6 - 3n^2 - 9n - 6 = \cdots = 6n + 12;$

$\Delta^4 c_n = \Delta\left(\Delta\left(\Delta\left(\Delta c_n\right)\right)\right) = 6\,(n+1) + 12 - 6n - 12 = 6;$

4.21.3 Augensummen bei Würfelwürfen

Wurf von n Würfeln
$s \in \{n, n+1, \ldots, 6n-1, 6n\}\,;$

Wurf von 10^9 Würfeln
$s \in \{10^9, 10^9+1, \ldots, 6\cdot 10^9 - 1, 6\cdot 10^9\}\,;$

Wurf von 10^6 Würfeln
$s \in \{10^6, 10^6+1, \ldots, 6\cdot 10^6 - 1, 6\cdot 10^6\}\,;$

Wurf von 10^3 Würfeln
$s \in \{1000, 1001, \ldots, 5999, 6000\}\,;$

Wurf von 10^2 Würfeln
$s \in \{100, 101, \ldots, 599, 600\}\,;$

Wurf von 10^1 Würfeln
$s \in \{10, 11, \ldots, 59, 60\}\,;$

Wurf von 10^0 Würfeln
$s \in \{1, 2, \ldots, 5, 6\}\,;$

16.11.2005

4.21.4 Exzerpt von Kapitel 1 des Stochastik-Buchs („Zufallsexperimente“)

- Experimente können **determiniert** oder **zufällig** sein.
- Determinierte Experimente lassen sich beliebig oft wiederholen; ihr Ausgang unterscheidet sich nie.

- Der Ausgang zufälliger Experimente ist nicht vorhersagbar; der Ausgang kann sich unterscheiden.
- Experimente werden auch dann als „zufällig“ bezeichnet, wenn sie theoretisch zwar determiniert wären, aber so viele Variablen im Spiel sind, dass eine genaue Vorhersage in der Praxis unmöglich wird.

17.11.2005

4.21.5 Wertetabelle der Funktionen F_k und F_l der Aufgabe 5 der 1. Klausur

x	$\mathrm{F}_k(x)$	$\mathrm{F}_l(x)$
a	$\mathrm{F}_k(0) + A = \frac{1}{2}A$	$\mathrm{F}_l(0) + A = -\frac{1}{2}A$
0	$-A + \frac{1}{2}A = -\frac{1}{2}A$	$-2A + \frac{1}{2}A = -\frac{3}{2}A$
	$-A$	$\mathrm{F}_l(k) - A = -2A$
k	0	$\mathrm{F}_l(l) - A = -A$
l	$\mathrm{F}_k(k) + A = A$	0
	$\mathrm{F}_k(l) - A = 0$	$-A$
b	$\frac{3}{2}A$	$-A + \frac{3}{2}A = \frac{1}{2}A$

19.11.2005

[Vielzahl von undeterminierten Systemen → sehr scharfes System]

„Das Wesen der Mathematik ist weder logisch noch unlogisch, sie ist a-logisch.“

„[die entscheidensten Fragen haben keine Antwort]“

„bloß wir beten dem in der Schule immer wieder [. . .]“ 19.11.2005

4.22 22. Hausaufgabe

4.22.1 Allgemeine Differenzenbildung von n^2 und n^3

$\Delta^1 n^2 = (n+1)^2 - n^2 = 2n + 1;$

$\Delta^2 n^2 = 2(n+1) + 1 - 2n - 1 = 2;$

$\Delta^3 n^3 = 2 - 2 = 0;$

(Für n^3 siehe 21. Hausaufgabe.)

4.22.2 Unterschiedlich grobe Ergebnisräume für das Sockenbeispiel

$\Omega_1 = \{\text{Socke}\}\,;$

$\Omega_2 = \{\text{linke Socke}, \text{rechte Socke}\}\,;$

$\Omega_3 = \{(1,1),(1,2),\ldots,(7,6),(7,7)\}\,;$

4.22.3 Unterschiedlich grobe Ergebnisräume für den Wurf zweier Würfel

$\Omega_1 = \{\{\text{gerade}, \text{gerade}\}, \{\text{ungerade}, \text{gerade}\}, \{\text{ungerade}, \text{ungerade}\}\}\,;$

$\Omega_2 = \{2,3,\ldots,11,12\}\,;$

$\Omega_3 = \{(1,1),(1,2),\ldots(6,5),(6,6)\}\,;$

4.22.4 Exzerpt der Kapitel 2.1–2.4 des Stochastik-Buchs

- Ein **Ergebnisraum** Ω ist eine Menge an Ergebnissen ω_i.

  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}\,;$

- Lässt sich ein Ergebnisraum Ω_1 auf einen anderen Ergebnisraum, Ω_2, abbilden und gilt $|\Omega_1| > |\Omega_2|$, so ist Ω_1 eine **Verfeinerung** von Ω_2.

  Umgekehrt ist Ω_2 eine **Vergröberung** von Ω_1.

- Kann ein Teilergebnis eines mehrstufigen Versuchs in mehreren Versuchsstufen vorkommen, so wird **mit Zurücklegen** gezogen. Anderfalls spricht man von Ziehen **ohne Zurücklegen**.

- Durch Zerlegung eines Zufallsexperiments in Teilexperimente, kombiniert mit der Darstellung von **Pfaden**, erleichtert die Bestimmung der **Mächtigkeit** $|\Omega|$ eines Ergebnisraums Ω.

21.11.2005

„zwei Hände klatschen so [...Demo. . .] und eine Hand halb so laut“

„Mich interessiert jetzt wann die Stunde aus ist [und das bringt und auch/trotzdem nicht weiter]“

[Zielmenge = Wertemenge; $\Leftrightarrow$ surjektiv;]

[($\forall x_1, x_2 \in D$: $\mathrm{f}(x_1) = \mathrm{f}(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$;) $\Leftrightarrow$ injektiv;]

[surjektiv $\wedge$ injektiv; $\Leftrightarrow$ bijektiv;] 21.11.2005

4.23 23. Hausaufgabe

4.23.1 Stochastik-Buch Seite 20, Aufgabe 1

Warum ist beim Würfelwurf mit den Augenzahlen 1 bis 6 die Menge $\{1,2,3,4,5,6,\text{gerade Augenzahl}\}$ kein Ergebnisraum?

Weil einigen Versuchsergebnissen (2, 4 und 6) mehrere Elemente aus der Menge zugeordnet werden können (2, 4 oder 6 oder gerade Augenzahl).

4.23.2 Stochastik-Buch Seite 20, Aufgabe 2

Eine Urne enthält drei gleichartige Kugeln mit den Nummern 1, 2, 3. Diese drei Kugeln werden nacheinander rein zufällig herausgegriffen. Geben Sie einen geeigneten Ergebnisraum an und bestimmen Sie davon die Mächtigkeit mit dem Zählprinzip.

$\Omega = \{(1,2,3),(1,3,2),\ldots\}$;

$|\Omega| = 3\cdot 2\cdot 1 = 6$;

4.23.3 Stochastik-Buch Seite 20, Aufgabe 3

Zwei Personen A und B tragen einen Tenniswettkampf aus. Sieger ist, wer als Erster zwei Sätze gewonnen hat. Wie lautet ein geeigneter Ergebnisraum?

$\Omega = \{\{A,A\},\{A,B\},\{B,B\}\}$;

4.23.4 Stochastik-Buch Seite 20, Aufgabe 4

Bei einer Auswahl von Familien mit drei Kindern werden im Auftrag eines Insituts für Verhaltensforschung die Kinder nach dem Geschlecht in der Reihenfolge des Alters registriert. Konstruieren Sie einen geeigneten Ergebnisraum.

$\Omega = \{(\mathrm{m},\mathrm{m},\mathrm{m}),(\mathrm{m},\mathrm{m},\mathrm{w}),\ldots,(\mathrm{w},\mathrm{w},\mathrm{w})\}$;

4.23.5 Stochastik-Buch Seite 20, Aufgabe 5

Eine Urne enthält drei weiße und zwei schwarze Kugeln. Es werden drei Kugeln zufällig herausgegriffen, und zwar

a) gleichzeitig. Konsturieren Sie passende Ergebnisräume.

$\Omega = \{\{\mathrm{w}, \mathrm{w}, \mathrm{w}\}, \{\mathrm{w}, \mathrm{w}, \mathrm{s}\}, \{\mathrm{w}, \mathrm{s}, \mathrm{s}\}\};$

b) nacheinander, ohne die einzelnen Kugeln zurückzulegen.

$\Omega = \{(\mathrm{w}, \mathrm{w}, \mathrm{w}), (\mathrm{w}, \mathrm{w}, \mathrm{s}), (\mathrm{w}, \mathrm{s}, \mathrm{w}), \ldots\};$

c) nacheinander, jedoch nach Zurücklegen der jeweils gezogenen Kugel.

$\Omega = \{(\mathrm{w}, \mathrm{w}, \mathrm{w}), (\mathrm{w}, \mathrm{w}, \mathrm{s}), \ldots, (\mathrm{s}, \mathrm{s}, \mathrm{s})\};$

„offene Fragestellung ist in“ 22.11.2005

4.24 24. Hausaufgabe

4.24.1 Stochastik-Buch Seite 21, Aufgabe 6

Ein Würfel wird so lange geworfen, bis zum ersten Mal 6 erscheint, aber höchstens drei Mal. Geben Sie einen geeigneten Ergebnisraum an.

$\Omega = \{(6), (1, 6), (2, 6), \ldots, (1, 1, 6), (1, 2, 6), \ldots (1, 1, 1), (1, 1, 2), \ldots, (5, 5, 5)\};$

4.24.2 Stochastik-Buch Seite 21, Aufgabe 7

Eine Münze und ein Würfel werden gleichzeitig geworfen. Geben Sie einen Ergebnisraum an. Wie viele Elemente enthält er?

$\Omega = \{\{\mathrm{z}, 1\}, \{\mathrm{z}, 2\}, \ldots, \{\mathrm{z}, 6\}, \{\mathrm{k}, 1\}, \{\mathrm{k}, 2\}, \ldots, \{\mathrm{k}, 6\}\};$

$|\Omega| = 6 \cdot 2 = 12;$

4.24.3 Stochastik-Buch Seite 21, Aufgabe 8

Eine Münze und ein Würfel werden nacheinander geworfen. Gesucht sind ein geeigneter Ergebnisraum und dessen Mächtigkeit.

$\Omega = \{\{\mathrm{z}, 1\}, \{\mathrm{z}, 2\}, \ldots, \{\mathrm{z}, 6\}, \{\mathrm{k}, 1\}, \{\mathrm{k}, 2\}, \ldots, \{\mathrm{k}, 6\}\};$

$|\Omega| = 6 \cdot 2 = 12;$

4.24.4 Stochastik-Buch Seite 21, Aufgabe 9

In einer Urne befinden sich fünf von 1 bis 5 nummerierte Kugeln.

a) Es werden zwei Kugeln gleichzeitig geogen. Geben Sie einen Ergebnisraum an. Welche Mächtigkeit hat er?

$\Omega = \{\{1,2\},\{1,3\},\ldots,\{5,4\}\}$;

$|\Omega| = 5 \cdot 4 : 2 = 10$;

b) Es werden drei Kugeln gleichzeitig geogen. Wie lautet jetzt der Ergebnisraum?

$\Omega = \{\{1,2,3\},\{1,2,4\},\ldots,\{5,4,3\}\}$;

Vergleichen Sie seine Mächtigkeit mit der von a).

$|\Omega| = 5 \cdot 4 \cdot 3 : 3! = 10$;

Wie lässt sich das Ergebnis anschaulich begründen?

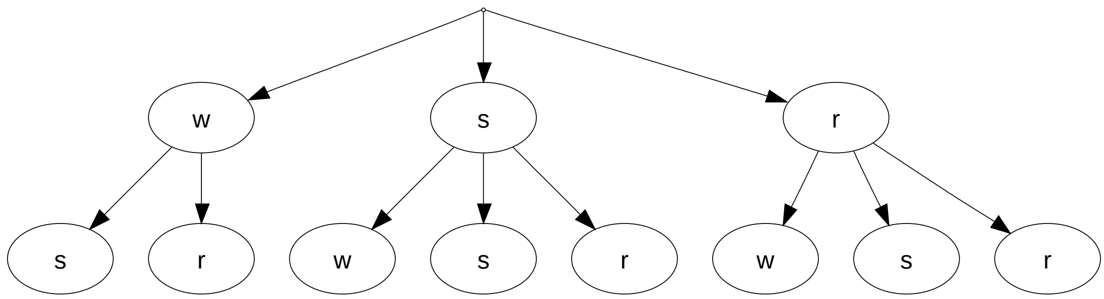
4.24.5 Stochastik-Buch Seite 21, Aufgabe 10

In einer Urne befindne sich eine weiße, zwei schwarze und drei rote Kugeln. Es werden zwei Kugeln gezogen

a) nacheinander ohne Zurücklegen.

$\Omega = \{(\mathrm{w},\mathrm{s}),(\mathrm{w},\mathrm{r}),(\mathrm{s},\mathrm{w}),(\mathrm{s},\mathrm{s}),(\mathrm{s},\mathrm{r}),(\mathrm{r},\mathrm{w}),(\mathrm{r},\mathrm{s}),(\mathrm{r},\mathrm{r})\}$;

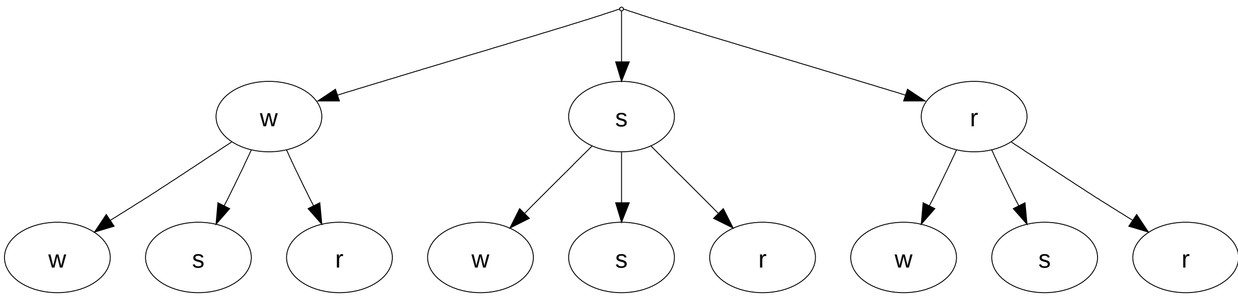
$|\Omega| = 8$;



b) mit Zurücklegen der Kugel nach jedem Zug.

$\Omega = \{(\mathrm{w},\mathrm{w}),\ldots,(\mathrm{r},\mathrm{r})\}$;

$|\Omega| = 3 \cdot 3 = 9$;



23.11.2005

4.25 25. Hausaufgabe

4.25.1 Stochastik-Buch Seite 21, Aufgabe 11

Beim Kinderspiel „Knobeln“, bei dem zwei Spieler gleichzeitig eine Hand öffnen, kommt es darauf an, dieselbe Anzahl von Fingern zu zeigen wie der andere. Stellen Sie den Ergebnisraum dieses Spiels dar und berechnen Sie seine Mächtigkeit.

$\Omega = \left\{(1,1),(1,2),\ldots,(5,5)\right\};$

$|\Omega| = 5 \cdot 5 = 25;$

4.25.2 Stochastik-Buch Seite 21, Aufgabe 12

Beim Spiel „Papier-Schere-Stein“ müssen zwei Spieler auf ein Signal entweder die offene Hand (Papier), zwei Finger (Schere) oder die Faust (Stein) zeigen, wobei der jeweilige Sieger nach festen Regeln ermittelt wird: Die Schere schneidet das Papier, das Papier wickelt den Steick ein, der Steich macht die Schere stumpf. Es gewinnt Schere gegen Papier, Papier gegen Stein, Stein gegen Schere.

Stellen Sie den Ergebnisraum dar und geben Sie seine Mächtigkeit an.

$\Omega = \left\{(\text{Papier},\text{Papier}),(\text{Papier},\text{Schere}),\ldots\right\};$

$|\Omega| = 3 \cdot 3 = 9;$

4.25.3 Stochastik-Buch Seite 21, Aufgabe 13

Zum n-maligen Münzwurf mit den Seiten Kopf und Zahl und zum n-maligen Würfelwurf mit den Augenzahlen 1 bis 6 sollen die Mächtigkeiten angegeben werden.

$|\Omega_{n,\text{Münz}}| = 2^n;$

$|\Omega_{n,\text{Würfel}}| = 6^n;$

4.25.4 Stochastik-Buch Seite 21, Aufgabe 14

Ein Arzt hat an einem Vormittag drei Patienten zu operieren. Die Reihenfolge sei zufällig.

Wie viele Möglichkeiten gibt es?

$|\Omega_3| = 3! = 6;$

Wie viele Möglichkeiten gibt es bei vier Patienten?

$|\Omega_4| = 4! = 24;$

4.25.5 Stochastik-Buch Seite 21, Aufgabe 15

Drei nicht unterscheidbare Kugeln sollen zufällig auf drei Zellen mit den Nummern 1, 2, 3 verteilt werden, wobei eine Zelle bis zu drei Kugeln aufnehmen kann. Sind beispielsweise zwei Kugeln in der ersten Zelle und eine in der dritten, so drücken wir das Ergebnis aus in der Form $\{1,1,3\}$. Entsprechend stellt man die anderen Verteilungen dar.

a) Stellen Sie die möglichen Ergebnisse dar.

$\Omega = \{\{1,1,1\},\{1,1,2\},\{1,1,3\},\{1,2,3\},\{2,2,1\},\{2,2,2\},\{2,2,3\},\{3,3,1\},\{3,3,2\},\{3,3,$

b) Man kann die Verteilungen auch durch die Höchstzahl der Kugeln in einer der drei Zellen beschreiben. Stellen Sie den vergröberten Ergebnisraum dar.

$\Omega' = \{1,2,3\}\,;$

c) Kennzeichnen Sie die Abbildung des Ergebnisraums zu a) auf den Ergebnisraum zu b) durch ein Pfeildiagramm.

$\mathrm{f} : \omega \mapsto \max\{V_{\Omega'}(1), V_{\Omega'}(2), V_{\Omega'}(3)\}\,;$

d) Wie sieht das Pfeildiagramm aus, wenn die Verteilungen durch die kleinste Zahl von Kugeln in irgendeiner Zelle gekennzeichnet werden und wie lautet jetzt der Ergebnisraum?

$\mathrm{g} : \omega \mapsto \min \left\{ V_{\Omega'}(1), V_{\Omega'}(2), V_{\Omega'}(3) \right\};$

25.11.2005

„Der Dominik ist da, und der Dominik ist da, und der Ralph ist da, und der Dominik ist da – also ist der Raum voll, die anderen müssen raus“ 25.11.2005

4.26 26. Hausaufgabe

4.26.1 Stochastik-Buch Seite 22, Aufgabe 16

Fünf weiße Kugeln mit den Nummern 1 bis 5 und vier rote Kugeln mit den Bezeichnungen a, b, c, d sollen auf alle möglichen Arten so in einer Reihe angeordnet werden, dass die Farben wechseln. Auf wie viele Arten kann dies geschehen?

Hinweis: Überlegen Sie, auf wie viele Arten die Plätze in der speziellen Anordnung besetzbar sind.

$|\Omega| = 5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 5! \cdot 4! = 2880;$

4.26.2 Stochastik-Buch Seite 22, Aufgabe 17

Ein Autokennzeichen besteht neben dem Städtesymbol aus einem oder zwei Buchstaben sowie aus einer ein- bis vierzifferigen von Null verschiedenen Zahl. Wie viele verschiedene Kennzeichen können so in dieser Stadt ausgegeben werden, wenn 26 Buchstaben zur Wahl stehen?

$|\Omega| = 26 \cdot 27 \cdot 9999 = 7\,019\,298;$

4.26.3 Stochastik-Buch Seite 87, Aufgabe 1

Berechen Sie die Anzahl der 2-Tupel aus $\{1, 2, 3\}$ und stellen Sie diese dar.

$|M| = 3^2 = 9;$

$M = \left\{ (a, b) \mid a, b \in \{1, 2, 3\} \right\};$

4.26.4 Stochastik-Buch Seite 87, Aufgabe 2

a) Berechnen Sie die Anzahl der 3-Tupel aus $\{1, 2, 3, 4\}$.

$4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3 = 64;$

b) Berechnen Sie die Anzahl der 3-Tupel aus $\{1, 2, 3, 4\}$, die mit 3 beginnen.

$1 \cdot 4 \cdot 4 = 16;$

4.26.5 Stochastik-Buch Seite 87, Aufgabe 3

Geben Sie die Anzahl der fünfzifferigen Zahlen an, die mit den Ziffern 1 und 9 bzw. 0,1,9 geschrieben werden können.

$|\Omega_1| = 2^5 = 32;$

$|\Omega_2| = 3^5 = 243;$

4.26.6 Stochastik-Buch Seite 87, Aufgabe 4

Das genetische Alphabet besteht aus den vier Buchstaben:

$A =$ Adenin, $C =$ Cytosin, $G =$ Guanin, $T =$ Thymin.

Eine Sequenz von jeweils drei dieser Buchstaben (Reihenfolge wesentlich) auf einem Strang der Doppelhelix der DNS ist der Code für die Synthetisierung einer speziellen Arminosäure. Dabei kann in einer derartigen Sequenz ein Buchstabe auch mehrmals auftreten. Wie viele Sequenzen sind möglich?

$4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3 = 64;$

4.26.7 Exzerpt der Kapitel 7.1–7.3 des Stochastik-Buchs

- Unter einem k-Tupel aus einer n-Menge versteht man einen k-Tupel, bei dem jede der k Stellen mit einem Element der Menge besetzt werden kann.
- Die Anzahl der k-Tupel aus einer n-Menge ist n^k.
- Unter einer n-Permutation aus einer n-Menge versteht man ein n-Tupel mit n verschiedenen Elementen aus der Menge.
- Die Anzahl der Permutationen aus einer n-Menge ist $n!$.

28.11.2005

4.27 27. Hausaufgabe

4.27.1 Stochastik-Buch Seite 87, Aufgabe 5

Die Zeichen des Morsealphabets – benannt nach dem amerikanischen Erfinder Samuel Morse (1791–1872) – sind aus zwei Elementen, Punkt und Strich zusammengesetzt, wobei ein Zeichen aus höchstens fünf Elementen besteht. Wie viele Zeichen können so gebildet werden? (Berechnen Sie jeweils die Anzahl der k-elementigen Zeichen für $k = 1, 2, 3, 4, 5$ und die Summe.)

$2+2\cdot2+2\cdot2\cdot2+2\cdot2\cdot2\cdot2+2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2 = 2+4+8+16+32 = 63-1 = 62;$ 29.11.2005

4.28 28. Hausaufgabe

4.28.1 Stochastik-Buch Seite 87, Aufgabe 6

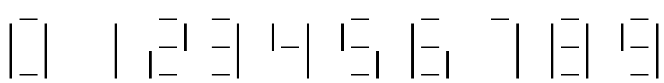
Der französische Offizier Ch. Barbier (1767–1841) und der blinde Lehrer L. Braille (1809–1852) sind die Erfinder der Blindenschrift. Die Buchstaben und Zeichen bestehen aus Punkten, die an sechs möglichen Stellen in dickeres Papier geprägt sind und somit ertastet werden können. Wie viele verschiedene Symbole kann man auf diese Weise erzeugen?

$2^6 = 64;$

4.28.2 Stochastik-Buch Seite 88, Aufgabe 7

Die Ziffern 0 bis 9 lassen sich elektronisch durch sogenanntes Sieben-Segmentanzeigen von a bis g darstellen.

a) Stellen Sie die Ziffern dar.



b) Wie viele Symbole sind so darstellbar, wenn der Fall, dass kein Segment ausgeleuchtet ist, nicht als Zeichen gewertet wird?

$2^7 - 1 = 127;$

4.28.3 Stochastik-Buch Seite 88, Aufgabe 8

Bei einer Parade stellen sich 11 Lipizzaner-Schimmelhengste mit ihren Reitern in Reihe auf.

a) Auf wie viele Arten können die Pferde in der Reihe stehen?

$11! = 39\,916\,800;$

b) Das Pferd des Hauptmanns soll immer in der Mitte stehen. Wie viele Anordnungen sind jetzt möglich?

$10! = 3\,628\,800;$

Wie viele Anordnungen sind möglich, wenn nur die Pferde auf der linken bzw. rechten Seite des Hauptmanns ihre Plätze wechseln können?

$5! = 120;$

4.28.4 Stochastik-Buch Seite 88, Aufgabe 9

Wie viele Permutationen der Ziffern $1{,}2{,}3{,}4{,}5{,}6{,}7{,}8$ beginnen a) mit 5, b) mit $1{,}2{,}3$, c) mit $8{,}6{,}4{,}2$?

a) $7! = 5040;$

b) $5! = 120;$

c) $4! = 24;$

4.28.5 Exzerpt von Kapitel 7.6 des Stochastik-Buchs

- Die Anzahl der k-Teilmengen aus einer n-Menge ist $\binom{n}{k}$.
- $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}; \quad n \in \mathbb{N}; k \in \{0, 1, \ldots, n\};$
- Binomische Formel: $\displaystyle(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k; \quad n \in \mathbb{N};$

30.11.2005

4.29 29. Hausaufgabe

4.29.1 Stochastik-Buch Seite 95, Aufgabe 24 [in der Schule gemacht]

Auf wie viele Arten lassen sich 15 nummerierte Kugeln so auf vier Fächer verteilen, dass das erste Fach 4, das zweite 5, das dritte und vierte je 3 Kugeln enthält? (Lösung mit Binomialkoeffizienten.)

$\binom{15}{4}\binom{11}{5}\binom{6}{3}\binom{3}{3} = 12\,612\,000;$

4.29.2 Stochastik-Buch Seite 95, Aufgabe 25 [in der Schule gemacht]

Ein Skatspiel wird ausgeteilt. Drei Spieler A,B,C bekommen je 10 Karten, 2 Karten kommen in den Skat.

a) Auf wie viele Arten können die Karten ausgeteilt werden?

$\binom{32}{10}\binom{22}{10}\binom{12}{10}\binom{2}{2} \approx 2{,}8 \cdot 10^{15};$

b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, bei denen A zwei Buben und B und C jeweils einen Buben bekommen? (Lösung mit Binomialkoeffizienten.)

$\binom{28}{8}\binom{20}{9}\binom{11}{9}\binom{2}{2} \cdot \binom{4}{2}\binom{2}{1}\binom{1}{1} \approx 3{,}5 \cdot 10^{14};$

4.29.3 Stochastik-Buch Seite 96, Aufgabe 27 [in der Schule gemacht]

Es sei $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

a) Bilden Sie alle 2-Tupel aus A.

$\Omega = \left\{(a, b) \mid a, b \in A\right\};$

$|\Omega| = 4^2 = 16;$

b) Bilden Sie alle 2-Permutationen aus A.

$\Omega = \left\{(a, b) \mid a, b \in A \wedge a \neq b\right\};$

$|\Omega| = 4 \cdot 3 = 12;$

c) Bilden Sie alle 2-Teilmengen aus A.

$\Omega = \left\{ \{a, b\} \;\middle|\; \{a, b\} \subset A \right\};$

$|\Omega| = \binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6;$

d) Bilden Sie alle 2-Kombinationen aus A.

$\Omega = \left\{ \{_{\mathrm{M}} a, b\} \;\middle|\; a, b \in A \right\};$

$|\Omega| = \binom{4+2-1}{2} = 10;$

4.29.4 Stochastik-Buch Seite 96, Aufgabe 30 [in der Schule gemacht]

Dominosteine haben die Form doppelter Quadrate. Jedes Quadrat trägt eine Augenzahl von 0 bis 6. Wie viele Steine gibt es?

$\binom{7}{2} + 7 = \frac{7^2+7}{2} = 28;$ 01.12.2005

4.29.5 Exzerpt der Kapitel 7.4–7.5 und 7.7–7.8 des Stochastik-Buchs

- Eine k-Permutation aus einer n-Menge mit Wiederholung ist ein k-Tupel, dessen Komponenten mit Elementen aus der Menge besetzt werden. Dabei ist Wiederholung zulässig, also ist $k > n$.

  Die Anzahl dieser Permutationen errechnet sich durch Bildung des Quotienten aus $k!$ und den „ausgleichenden Faktoren“ (die selbst auch Fakultäten sind).

- Eine k-Permutation aus einer n-Menge ohne Wiederholung ist ein k-Tupel, bei dem jede Komponente mit einem anderen Element aus der Menge besetzt werden muss, also ist $k \leq n$.

  Die Anzahl dieser Permutationen ist $\frac{n!}{(n-k)!}$.

- Eine k-Kombination aus einer n-Menge ist eine Multimenge, deren Gesamtzahl an Elementen (kommt also beispielsweise ein Element doppelt vor, zählt es auch zweifach) gleich k ist. Die Multimenge wird mit Elementen aus der n-Menge besetzt, wobei Wiederholungen zugelassen sind.

  Die Anzahl dieser Kombinationen ist $\binom{n+k-1}{k}$.

02.12.2005

4.30 30. Hausaufgabe

4.30.1 Exzerpt der Kapitel 3.1–3.3 des Stochastik-Buchs

- Jede Teilmenge eines Ergebnisraums ist ein Ereignis.

  Ein Ereignis gilt genau dann als eingetroffen, wenn das Ereignis ein eingetroffenes Ergebnis enthält.

  Die Menge aller Ereignisse heißt Ereignisraum $\mathcal{P}$.

- Die leere Menge $\varnothing$ ist ebenfalls eine Teilmenge des Ergebnisraums, sie ist also ebenfalls ein Ereignis. Dieses Ereignis kann aber natürlichen im Modell nicht auftreten (es ist das unmögliche Ereignis).

- Der Ergebnisraum selbst ist auch eine Teilmenge von sich, er ist also auch ein Ereignis. Es tritt immer ein, es ist das sichere Ereignis.

- Ereignisse, die nur aus einem Ergebnis bestehen (z.B. $\{\omega\}$) heißen Elementarereignisse. $\omega \neq \{\omega\}$;

- Sind A und B Ereignisse und gilt $A \subset B$, so tritt Ereignis B „automatisch“ auch ein, wenn Ereignis A eintritt.

- Zwei Ereignisse A und B sind gleich, wenn gilt: $A \subset B \wedge B \subset A$;

- Zwei Ereignisse A und B heißen unvereinbar, wenn gilt: $A \cap B = \varnothing$;

  Mehr als oder genau zwei Ereignisse heißen paarweise unvereinbar, wenn jeweils zwei von ihnen unvereinbar sind.

- Eine Menge von paarweise unvereinbaren Ereignissen A_1, A_2, ... heißt Zerlegung von A wenn gilt: $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \ldots$;

4.30.2 Stochastik-Buch Seite 29, Aufgabe 1

Beim Würfeln interessiere die geworfene Augenzahl. Dabei seien folgende Ereignisse festgehalten:

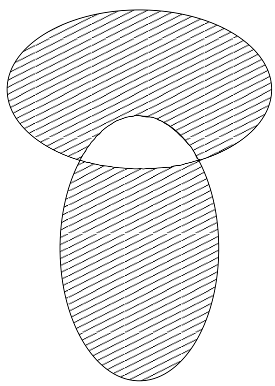
$A = \{2, 4\}\,; \quad B = \{2, 6\}\,; \quad C = \{2, 4, 6\}\,;$

a) Bilden Sie

- $\overline{A} = \{1,3,5,6\}$;
- $\overline{B} = \{1,3,4,5\}$;
- $\overline{C} = \{1,3,5\}$;
- $A \cap B = \{2\}$;
- $\overline{A} \cap B = \{6\}$;
- $A \cap \overline{B} = \{4\}$;
- $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1,3,5\}$;
- $A \cup B = \{2,4,6\}$;
- $\overline{A} \cup B = \{1,2,3,5,6\}$;
- $A \cup \overline{B} = \{1,2,3,4,5\}$;
- $\overline{A} \cup \overline{B} = \{1,3,4,5,6\}$;

b) Interpretieren Sie das Ereignis $\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)$ und stellen Sie es im Venn-Diagramm und als Menge dar.

$\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right) = \left\{x \in \Omega \;\middle|\; (x \in A \vee x \in B) \wedge \overline{x \in A \wedge x \in B}\right\} = \{4,6\}$;



05.12.2005

4.31 31. Hausaufgabe

4.31.1 Stochastik-Buch Seite 29, Aufgabe 2

Drei Ereignisse seien beim zweifachen Münzwurf mit $\Omega = \{\text{KK}, \text{KZ}, \text{ZK}, \text{ZZ}\}$ gegeben durch A: „Mit dem 1. Wurf K“, B: „Mit dem 2. Wurf K“, C: „Genau mit einem Wurf K“.

Zeigen Sie, dass jedes der drei Ereignisse A,B,C genau dann eintritt, wenn von den beiden anderen genau eines eintritt.

- $A = \{\text{KK}, \text{KZ}\}$;
- $B = \{\text{KK}, \text{ZK}\}$;
- $C = \{\text{KZ}, \text{ZK}\}$;

- $\forall \omega \in \Omega : \omega \in A \Leftrightarrow (\omega \in B \vee \omega \in C) \wedge \overline{\omega \in (B \cup C)}$;
- $\forall \omega \in \Omega : \omega \in B \Leftrightarrow (\omega \in A \vee \omega \in C) \wedge \overline{\omega \in (A \cup C)}$;
- $\forall \omega \in \Omega : \omega \in C \Leftrightarrow (\omega \in A \vee \omega \in B) \wedge \overline{\omega \in (A \cup B)}$;

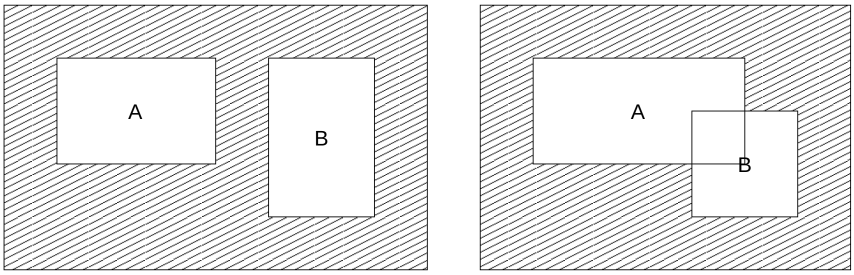
XXX was soll ich hier noch zeigen? Alle möglichen Ergebnisse durchgehen?
$A = \left(\overline{B} \cap C\right) \cup \left(B \cap \overline{C}\right)$;

4.31.2 Stochastik-Buch Seite 29, Aufgabe 3

Aufgabe 12 in Abschnitt 2 behandelt das Spiel „Papier–Schere–Stein“. Stellen Sie folgende Ergebnisse dar:

- A: „Der 1. Spieler gewinnt“
  $A = \{(\text{Schere}, \text{Papier}), (\text{Papier}, \text{Stein}), (\text{Stein}, \text{Schere})\}$;
- B: „Der 2. Spieler gewinnt“
  $B = \{(\text{Papier}, \text{Schere}), (\text{Stein}, \text{Papier}), (\text{Schere}, \text{Stein})\}$;
- C: „Einer der beiden Spieler gewinnt“
  $C = A \cup B = \left\{(x, y) \;\middle|\; x, y \in \{\text{Schere}, \text{Papier}, \text{Stein}\} \wedge x \neq y\right\}$;
- D: „Kein Spieler gewinnt“
  $D = \Omega \setminus C = \Omega \setminus (A \cup B) = \left\{(x, x) \;\middle|\; x \in \{\text{Schere}, \text{Papier}, \text{Stein}\}\right\}$;

4.31.3 Gesetze von de Morgan



06.12.2005

„Die [Schüler des Kurses ohne die Mädchen] interessieren mich aus irgendeinem Grund überhaupt nicht.“ [aber aus dem Kontext gerissen; diente zur Erklärung von Ereignissen] 06.12.2005

4.32 32. Hausaufgabe

4.32.1 Stochastik-Buch Seite 29, Aufgabe 5

A, B und C symbolisieren drei Ereignisse. Drücken Sie die folgenden Aussagen symbolisch aus:

a) Alle drei Ereignisse treten ein.

$$M_{\mathrm{a}} = A \cap B \cap C;$$

b) Keines der drei Ereignisse tritt ein.

$$M_{\mathrm{b}} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C};$$

c) Genau eines der drei Ereignisse tritt ein.

$$M_{\mathrm{c}} = \left(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B \cap \overline{C}\right) \cup \left(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C\right);$$

d) Mindestens eines der drei Ereignisse tritt ein.

$$M_{\mathrm{d}} = A \cup B \cup C;$$

e) Höchstens eines der drei Ereignisse tritt ein.

$$M_{\mathrm{e}} = M_{\mathrm{b}} \cup M_{\mathrm{c}};$$

f) Genau zwei der drei Ereignisse treten ein.

$$M_{\mathrm{f}} = \left(A \cap B \cap \overline{C}\right) \cup \left(A \cap \overline{B} \cap C\right) \cup \left(\overline{A} \cap B \cap C\right);$$

g) Mindestens zwei der drei Ereignisse treten ein.

$M_{\mathrm{g}} = M_{\mathrm{f}} \cup M_{\mathrm{a}};$

h) Höchstens zwei der drei Ereignisse treten ein.

$M_{\mathrm{h}} = M_{\mathrm{b}} \cup M_{\mathrm{c}} \cup M_{\mathrm{f}} = M_{\mathrm{e}} \cup M_{\mathrm{f}};$

i) Nur die Ereignisse B und C treten ein.

$M_{\mathrm{i}} = \overline{A} \cap B \cap C;$

k) Nur das Ereignis C tritt ein.

$M_{\mathrm{k}} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap C;$

09.12.2005

„Physik ist sowieso eine Chaotendisziplin, im positiven Sinne“ 09.12.2005

4.33 33. Hausaufgabe

4.33.1 Stochastik-Buch Seite 29, Aufgabe 4

A und B seien zwei Ereignisse. Drücken Sie folgende Aussagen symbolisch aus:

a) Beide Ereignisse treten ein.

$A \cap B$

b) Höchstens eines von beiden Ereignissen tritt ein.

$\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right) \cup \left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)$

c) Keines von beiden Ereignissen tritt ein.

$\overline{A} \cap \overline{B}$

d) Mindestens eines von beiden Ereignissen tritt ein.

$A \cup B$

e) Genau eines von beiden Ereignissen tritt ein.

$\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)$

4.33.2 Stochastik-Buch Seite 30, Aufgabe 6

In einem Kraftwerk wird die Haverie einer Anlage von drei unabhängig voneinander arbeitenden Kontrollsignalen angezeigt. Diese unterliegen einer gewissen Störanfälligkeit. S_i sei das Ereignis: „Das i-te Signal funktioniert“ ($i = 1, 2, 3$). Drücken Sie die folgenden Ereignisse durch die S_i aus:

- A: „Alle drei Signale funktionieren“
  $A = S_1 \cap S_2 \cap S_3$;
- B: „Kein Signal funktioniert“
  $B = \overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \overline{S_3}$;
- C: „Mindestens ein Signal funktioniert“
  $C = S_1 \cup S_2 \cup S_3$;
- D: „Genau zwei von drei Signalen funktionieren“
  $D = \left(S_1 \cap S_2 \cap \overline{S_3}\right) \cup \left(S_1 \cap \overline{S_2} \cap S_3\right) \cup \left(\overline{S_1} \cap S_2 \cap S_3\right)$;
- E: „Mindestens zwei der drei Signale funktionieren“
  $E = (S_1 \cap S_2) \cup (S_1 \cap S_3) \cup (S_2 \cap S_3)$;
- F: „Genau ein Signal funktioniert“
  $F = \left(S_1 \cap \overline{S_2} \cap \overline{S_3}\right) \cup \left(\overline{S_1} \cap S_2 \cap \overline{S_3}\right) \cup \left(\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap S_3\right)$;

4.33.3 Exzerpt der Kapitel 5.1–5.3 des Stochastik-Buchs

- Der Anteil der für ein Ereignis günstiger Fälle an den insgesamt möglichen Fällen ist nach der Anteilsregel die Chance für das Eintreten des Ereignisses.
- Die Laplace-Wahrscheinlichkeit $P(A)$ eines Ereignisses A ist $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.
- Dabei muss Ω endlich sein und jedes Elementarergebnis muss die gleiche Wahrscheinlichkeit besitzen. Experimente, denen man Ergebnisräume zuordnet, die diese Eigenschaften erfüllen, heißen Laplace-Experimente.

Ω beschreibt ein Laplace-Experiment $\Rightarrow$

- $\forall A \subset \Omega : P(A) \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$;
- $P(\varnothing) = 0$;
- $P(\Omega) = 1$;
- $\forall A \subset \Omega : P(A) + P(\overline{A}) = 1$;
- $\forall A \subset \Omega : \left\{ \begin{matrix} A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots A_n; \\ A_i \cap A_j = \varnothing; \quad i, j = 1, 2, \ldots, n; i \neq j; \end{matrix} \right\} \Rightarrow$
  $P(A) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$;

13.12.2005

4.34 35. Hausaufgabe

4.34.1 Stochastik-Buch Seite 103, Aufgabe 35

a) Eine Münze wird 4 Mal geworfen.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Symbol Zahl genau k Mal oben liegt.

$p(k) = \frac{\binom{4}{k}}{2^4}$;

b) Eine Münze wird n Mal geworfen.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Symbol Zahl genau k Mal oben liegt.

$p(k) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$;

4.34.2 Stochastik-Buch Seite 104, Aufgabe 36

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Roulette-Kugel 37 Mal hintereinander im gleichen [bestimmten] Feld landet?

$\left(\frac{1}{37}\right)^{37}$

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Roulette-Kugel 37 Mal hintereinander in verschiedenen Feldern landet?

$\frac{37!}{37^{37}}$

4.34.3 Exzerpt von Kapitel 5.4 des Stochastik-Buchs

- Da die in der 33. Hausaufgabe beschriebenen Gesetze nur für Laplace-Experimente gelten, muss man beim Aufstellen des Ergebnisraums vorsichtig sein.
- Beispiel: Wurf zweier Münzen

  $\Omega = \{\{0,0\},\{1,1\},\{0,1\}\}$;

  Dieser Ergebnisraum beschreibt **kein** Laplace-Experiment.

  $\Omega' = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$;

  Die Elementarereignisse von Ω' hingegen haben sehr wohl alle die gleiche Wahrscheinlichkeit, namentlich $\frac{1}{4}$.

  Das Elementarereignis $\{\{0,1\}\}$ aus Ω hat also die Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.
- Über die Frage, ob ein Ergebnisraum ein Laplace-Experiment beschreibt oder nicht, kann die Mathematik meistens keine Antwort geben; stattdessen muss der „Intuition"/Erfahrung „vertraut" werden.

14.12.2005

4.35 36. Hausaufgabe

4.35.1 Stochastik-Buch Seite 104, Aufgabe 37

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln

a) Augensumme 7 oder 11,

b) eine gerade Augensumme und

c) eine ungerade Augensumme zu werfen.

$\Omega = \{1,2,\ldots,6\}^2$; (Laplace)

$\Rightarrow |\Omega| = 6^2 = 36;$

a) $E_7 = \{(a,b) \mid (a,b) \in \Omega \wedge a+b=7\}$;

$a+b=7; \Rightarrow a = 7-b;$

$1 \leq 7-b \leq 6; \Rightarrow b \in \{1,2,3,4,5,6\}$;

$\Rightarrow P(E_7) = \frac{|E_7|}{|\Omega|} = \frac{1}{6};$

$E_{11} = \{(a,b) \mid (a,b) \in \Omega \wedge a+b=11\}$;

$a+b=11; \Rightarrow a = 11-b;$

$1 \leq 11-b \leq 6; \Rightarrow b \in \{5,6\}$;

$\Rightarrow P(E_{11}) = \frac{|E_{11}|}{|\Omega|} = \frac{1}{18};$

b) $E_{\text{gerade}} = \{(a,b) \mid (a,b) \in \Omega \wedge (a+b) \bmod 2 = 0\}$;

$\Rightarrow P(E_{\text{gerade}}) = \frac{|E_{\text{gerade}}|}{|\Omega|} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2};$

c) $E_{\text{ungerade}} = \{(a,b) \mid (a,b) \in \Omega \wedge (a+b) \bmod 2 \neq 0\}$;

$\Rightarrow P(E_{\text{ungerade}}) = \frac{|E_{\text{ungerade}}|}{|\Omega|} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2};$

4.35.2 Stochastik-Buch Seite 104, Aufgabe 39

Ein Würfel wird dreimal geworfen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

- A_1: „Augenzahl 6 nur beim 1. Wurf“
  $P(A_1) = \frac{1}{6}\frac{5}{6}\frac{5}{6} = \frac{25}{216};$
- A_2: „Augenzahl 6 bei genau einem Wurf“
  $P(A_2) = 3P(A_1) = \frac{25}{72};$
- A_3: „Augenzahl 6 nur beim 1. und 3. Wurf“
  $P(A_3) = \frac{1}{6}\frac{5}{6}\frac{1}{6} = \frac{5}{216};$
- A_4: „Augenzahl 6 bei genau zwei Würfen“
  $P(A_4) = 3P(A_3) = \frac{5}{72};$
- A_5: „Augenzahl 6 bei mindestens einem Wurf“
  $P(A_5) = \frac{|A_5|}{36^3} = \frac{3 \cdot \left(5^2+5\right)+1}{6^3} = \frac{91}{216};$

- A_6: „Augenzahl 6 bei mindestens zwei Würfen“
  $P(A_6) = \frac{|A_6|}{36^3} = \frac{3 \cdot (1 \cdot 1 \cdot 5)+1}{6^3} = \frac{2}{27};$

19.12.2005

4.36 37. Hausaufgabe

4.36.1 Stochastik-Buch Seite 104, Aufgabe 40

Mit welcher Wahrscheinlichkeit wirft man mit drei Würfeln einen Zweier-Pasch, d.h. genau zwei gleiche Augenzahlen?

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^3$; (Laplace)

$A_1 = \left\{ (a, b, c) \bigm| (a, b, c) \in \Omega \wedge [(a = b \wedge a \neq c) \vee (a = c \wedge a \neq b) \vee (b = c \wedge b \neq a)] \right\};$

$\Rightarrow |A_1| = (6 \cdot 1 \cdot 5) \cdot 3 = 90;$

$\Rightarrow P(A_1) = \frac{|A_1|}{|\Omega|} = \frac{5}{12};$

Mit welcher Wahrscheinlichkeit wirft man mindestens zwei gleiche Augenzahlen?

$A_2 = \left\{ (a, b, c) \bigm| (a, b, c) \in \Omega \wedge (a = b \vee a = c \vee b = c) \right\};$

$\Rightarrow |A_2| = |A_1| + 6 = (6 \cdot 1 \cdot 5) \cdot 3 + 6 = 96;$

$\Rightarrow P(A_2) = \frac{|A_2|}{|\Omega|} = \frac{4}{9};$

20.12.2005

4.37 38. Hausaufgabe

4.37.1 Stochastik-Buch Seite 106, Aufgabe 45

Ein Kartenspiel bestehe aus 32 Karten. Es wird gut durchgemischt. Jeder der 4 Spieler erhält gleich viele Karten. Man berechne die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

[Prinzipiell Aufgabe so unlösbar, da erstens nicht klar ist, dass alle Karten aufgeteilt werden und zweitens über den Kartentyp keine Aussage getroffen wurde. . .]

$$\Omega = \left\{ (a, b, c, d) \;\middle|\; \begin{array}{ll} & a, b, c, d \subset \{7, 8, 9, 10, \mathrm{B}, \mathrm{D}, \mathrm{K}, \mathrm{A}\} \times \{\heartsuit, \diamondsuit, \spadesuit, \clubsuit\} \\ \wedge & |a| = |b| = |c| = |d| = 8 \\ \wedge & \forall x \in \{a, b, c, d\} \colon \ \forall y \in \{a, b, c, d\} \setminus \{x\} \colon \ x \cap y = \varnothing; \end{array} \right\};$$

(Laplace)

- A: „Jeder Spieler bekommt ein Ass“

  $$P(A) = \frac{4! \cdot 1 \cdot \binom{28}{7}\binom{21}{7}\binom{14}{7}\binom{7}{7}}{\binom{32}{8}\binom{24}{8}\binom{16}{8}\binom{8}{8}} = \frac{512}{4495};$$

- B: „Ein bestimmter Spieler bekommt lauter Herz“

  $$P(B) = \frac{\binom{8}{8} \cdot \binom{24}{8}\binom{16}{8}\binom{8}{8}}{\binom{32}{8}\binom{24}{8}\binom{16}{8}\binom{8}{8}} = \frac{1}{\binom{32}{8}} = \frac{1}{10518300};$$

- C: „Ein beliebiger Spieler bekommt lauter Herz“

  $$P(C) = 4P(B) = \frac{1}{2629575};$$

4.37.2 Stochastik-Buch Seite 106, Aufgabe 46

Beim Skatspiel bekommen drei Spieler je 10 Karten, zwei Karten liegen im Skat. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass

a) die erste verteilte Karte ein Unter ist.

$P(A) = \frac{4}{32};$

b) die ersten beiden verteilten Karten Unter sind.

$P(B) = \frac{4}{32}\frac{3}{31};$

c) Eichel- und Grün-Unter im Skat liegen.

$P(C) = \frac{1}{32}\frac{1}{31} \cdot 2 = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{32}{2}};$

d) der erste Spieler alle Unter und Asse erhält.

$P(D) = \frac{\binom{8}{8} \cdot \binom{24}{2}}{\binom{32}{10}};$

e) ein Spieler alle Unter und alle Asse erhält.

$P(E) = 3P(D);$

4.37.3 Exzerpt von Kapitel 5.5 des Stochastik-Buchs

- Bei der Aufstellung eines Ergebnisraums, der die Laplace-Annahme erfüllen soll, ist besondere Vorsicht geboten.
- Beispielsweise ist beim Werfen zweier unterscheidbarer „Laplace"-Würfel $\{1,2,3,4,5,6\}^2$ ein Laplace-Raum, $\left\{\{_\mathrm{M} a, b\} \mid a, b \in \{1,2,3,4,5,6\}\right\}$ jedoch nicht.
- Daher sollte man immer die Tabelle im Hinterkopf haben, die wir aufgestellt haben.

26.12.2005

4.38 39. Hausaufgabe

4.38.1 Stochastik-Buch Seite 104, Aufgabe 41

Ein Würfel wird viermal geworfen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^4$; (Laplace)

- A_1: „Es erscheint genau dreimal Augenzahl 1, einmal Augenzahl 2"

  $P(A_1) = \frac{|A_1|}{|\Omega|} = \frac{4}{6^4} = \frac{1}{324};$

- A_2: „Es erscheint genau dreimal Augenzahl 1"

  $P(A_2) = \frac{|A_2|}{|\Omega|} = 5P(A_1) = \frac{4\cdot 5}{6^4} = \frac{5}{324};$

- A_3: „Es erscheint genau dreimal die gleiche Augenzahl"

  $P(A_3) = \frac{|A_3|}{|\Omega|} = 6P(A_3) = \frac{4\cdot 5\cdot 6}{6^4} = \frac{5}{54};$

- A_4: „Es erscheint beim 1. Wurf Augenzahl 1, beim 2. und 3. Wurf Augenzahl 2, beim 4. Wurf Augenzahl 3"

  $P(A_4) = \frac{|A_4|}{|\Omega|} = \frac{1}{1296};$

- A_5: „Es erscheint genau einmal Augenzahl 1, zweimal Augenzahl 2, einmal Augenzahl 3"

  $P(A_5) = \frac{|A_5|}{|\Omega|} = \frac{6\cdot 2}{1296} = \frac{1}{108};$

- A_6: „Die Augensumme ist höchstens 22“
  $P(A_6) = \frac{|A_6|}{|\Omega|} = \frac{6^4-1-4\cdot 1}{1296} = \frac{1291}{1296}$;
- A_7: „Alle vier Augenzahlen sind verschieden“
  $P(A_7) = \frac{|A_7|}{|\Omega|} = \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{1296} = \frac{5}{18}$;
- A_8: „Mindestens zwei Augenzahlen sind gleich“
  $P(A_8) = \dfrac{|A_8|}{|\Omega|} = \frac{6\cdot(6\cdot 1\cdot 5\cdot 4)+4\cdot(6\cdot 1\cdot 1\cdot 5)+1\cdot(6\cdot 1\cdot 1\cdot 1)+\frac{6}{2}\cdot(6\cdot 1\cdot 5\cdot 1)}{1296} = \frac{13}{18}$;
- A_9: „Genau ein Zweier-Pasch wird geworfen“
  $P(A_9) = \frac{|A_9|}{|\Omega|} = \frac{6\cdot(6\cdot 1\cdot 5\cdot 4)}{1296} = \frac{5}{9}$;
- A_{10}: „Zwei verschiedene Zweier-Pasche werden geworfen“
  $P(A_{10}) = \frac{|A_{10}|}{|\Omega|} = \frac{\frac{6}{2}\cdot(6\cdot 1\cdot 5\cdot 1)}{1296} = \frac{5}{72}$;

4.38.2 Stochastik-Buch Seite 112, Aufgabe 51

Eine Urne enthält elf gleichartige Kugeln, von denen vier schwarz und sieben weiß sind. Der Urne werden fünf Kugeln

a) auf einmal,

b) nacheinander mit Zurücklegen

entnommen. Berechnen Sie in beiden Fällen die Wahrscheinlichkeit, zwei schwarze und drei weiße Kugeln zu ziehen.

a) $\Omega = \left\{ M \;\middle|\; |M| = 5 \wedge M \subset \{1, 2, 3, \ldots, 10, 11\} \right\}$; (Laplace)
$|\Omega| = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 : 5! = \binom{11}{5} = 462$;
(Nummern 1 bis 4 $\leftarrow$ schwarze Kugeln, Nummern 5 bis 11 $\leftarrow$ weiße Kugeln)
$|A| = \binom{4}{2}\binom{7}{3} = 210$;
$\Rightarrow P(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|} = \dfrac{\binom{4}{2} \cdot \binom{11-4}{5-2}}{\binom{11}{5}} = \frac{5}{11}$;

b) $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, 10, 11\}^5$; (Laplace)

$|\Omega| = 11^5 = 161\,051;$

(Nummern 1 bis $4 \leftarrow$ schwarze Kugeln, Nummern 5 bis $11 \leftarrow$ weiße Kugeln) 29.12.2005

$|A| = (4 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7) \cdot \binom{5}{2};$

$\Rightarrow P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{4}{11}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{4}{11}\right)^3 = \frac{54880}{161051};$

4.38.3 [Buch Seite 112, Aufgabe 53

In einem Lotterietopf befinden sich 100 Lose, von denen nur fünf gewinnen. Jemand kauft zehn Lose. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit

a) kein Gewinnlos,

b) genau ein Gewinnlos,

c) genau zwei Gewinnlose oder

d) höchstens zwei Gewinnlose

zu ziehen?

a) $P(A) = \frac{\binom{5}{0}\binom{100-5}{5-0}}{\binom{100}{5}} \approx 0{,}77;$

b) $P(B) = \frac{\binom{5}{1}\binom{100-5}{5-1}}{\binom{100}{5}} \approx 0{,}21;$

c) $P(C) = \frac{\binom{5}{2}\binom{100-5}{5-2}}{\binom{100}{5}} \approx 0{,}018;$

d) $A \cap B = A \cap C = B \cap C = \varnothing;$

$\Rightarrow P(D) = P(A) + P(B) + P(C) \approx 1{,}0;$

(Lösungen falsch; es werden zehn Kugeln gezogen!)]

4.38.4 [Buch Seite 112, Aufgabe 54

Eine Lotterie besteht aus 1000 Losen und ist mit 50 Treffern ausgestattet. Jemand kauft fünf Lose. Welche Wahrscheinlichkeit hat er, mindestens einen Treffer zu machen?

$$P(A) = \frac{\binom{50}{1}\binom{950}{5-1} + \binom{50}{2}\binom{950}{5-2} + \binom{50}{3}\binom{950}{5-3} + \binom{50}{5}\binom{950}{5-5} + \binom{50}{5}\binom{950}{5-5}}{\binom{1000}{5}} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{5} \binom{50}{k}\binom{950}{5-k}}{\binom{1000}{5}};$$

$\Rightarrow P(A) = \frac{186\,974\,260\,001}{825\,029\,125\,020} \approx 0{,}23;$]

4.38.5 Stochastik-Buch Seite 112, Aufgabe 56

Ein Laplace-Würfel wird fünfmal geworfen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, genau zweimal eine Sechs zu werfen.

$$P(A) = \frac{(1 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) \cdot \binom{5}{2}}{6^5} = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right)^3 = \frac{625}{3888};$$

4.38.6 Stochastik-Buch Seite 112, Aufgabe 57

In einer Urne liegen zwei schwarze und drei weiße gleichartige Kugeln. Vier Kugeln werden mit Zurücklegen gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden höchstens zwei schwarze Kugeln gezogen?

$$P(A) = \frac{\binom{4}{0}(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) + \binom{4}{1}(2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) + \binom{4}{2}(2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3)}{5^4} = \frac{513}{625};$$ 09.01.2006

4.39 40. Hausaufgabe

4.39.1 Stochastik-Buch Seite 112, Aufgabe 52

In einer Warenlieferung von 50 gleichartigen Teilen sei der Ausschuss $10\,\%$. Es werden 10 Teile ohne Zurücklegen entnommen. Die Zahl der Ausschussstücke in der Probe sei X. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit

a) für $X = 0$.

$$P_1 = \frac{\binom{5}{0}\binom{50-5}{10-0}}{\binom{50}{10}} \approx 31{,}1\,\%;$$

b) für $X \leq 1$.

$$P_2 = P_1 + \frac{\binom{5}{1}\binom{50-5}{10-1}}{\binom{50}{10}} \approx 74{,}2\,\%;$$

c) für $X > 1$.

$$P_3 = 1 - P_2 \approx 25{,}8\,\%;$$

26.12.2005

4.39.2 Stochastik-Buch Seite 112, Aufgabe 55

Eine Laplace-Münze wird zehnmal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, genau fünfmal Zahl zu erhalten?

$$P(A) = \frac{1^5 1^5 \binom{10}{5}}{2^{10}} = \tfrac{63}{256} \approx 24{,}6\,\%;$$

14.01.2006

4.40 41. Hausaufgabe

4.40.1 Exzerpt von Kapitel 4.2.2 des Stochastik-Buchs

- Die relative Häufigkeit $h_n(A)$ des Ereignisses A bei n-maliger Durchführung des Experiments ergibt sich zu $h_n(A) = \sum\limits_{\omega \in A} h_n(\{\omega\})$.
- Damit gilt:

  $0 \leq h_n(A) \leq 1$; („Zähler immer kleinergleich Nenner")
- $h_n(\varnothing) = 0$;
- $h_n(\Omega) = 1$;
- $A \cap B = \varnothing; \Rightarrow h_n(A \cup B) = h_n(A) + h_n(B)$;
- $h_n(\overline{A}) = 1 - h_n(A)$; (wegen $A \cap \overline{A} = \varnothing$)
- $A, B \subset \Omega; \Rightarrow h_n(A \cup B) = h_n(A) + h_n(B) - h_n(A \cap B)$;

4.40.2 Exzerpt von Kapitel 4.5 des Stochastik-Buchs

- Frequentistischer Wahrscheinlichkeitsbegriff: $P(A) := \lim\limits_{n\to\infty} h_n(A)$;
- Empirische Gesetz der großen Zahlen: $h_n(A)$ stabilisiert sich bei bestimmten Ereignissen A für genügend große n.

16.01.2006

4.41 42. Hausaufgabe

4.41.1 Stochastik-Buch Seite 37, Aufgabe 3

50 % der Beschäftigten einer Baufirma rauchen Zigaretten, 35 % Pfeife und 30 % rauchen beides. Sonst wird nichts geraucht.

	Z	$\overline{\text{Z}}$	
P	30 %	5 %	35 %
$\overline{\text{P}}$	20 %	45 %	65 %
	50 %	50 %	100 %

a) Wie groß ist der Prozentsatz derer, die Zigratten oder Pfeife oder beides rauchen?

55 %

b) Wie groß ist der Prozentsatz derer, die entweder Zigratten oder Pfeife rauchen?

25 %

c) Wie groß ist der Prozentsatz der Nichtraucher?

45 %

d) Wie groß ist der Prozentsatz derer, die nicht beides rauchen?

70 %

4.41.2 Stochastik-Buch Seite 37, Aufgabe 4

Von 100 Personen sprechen 60 Englisch, 70 Französisch. Jede Person spricht wenigstens eine dieser Sprachen.

	E	$\overline{\text{E}}$	
F	30	40	70
$\overline{\text{F}}$	30	0	30
	60	40	100

a) Wie groß ist der prozentuale Anteil der Personen, die Englisch und Französisch sprechen?

30 %

b) Wie groß ist der prozentuale Anteil der nur Englisch bzw. Französisch sprechenden Personen?

$40\,\% + 30\,\% = 70\,\%$;

4.41.3 Stochastik-Buch Seite 37, Aufgabe 5

1989 bezeichneten sich $28\,\%$ der Bundesbürger im Alter von 15 und mehr Jahren als Raucher. Der Männeranteil in der Bevölkerung war $47\,\%$, der Anteil der weiblichen Nichtraucher $42\,\%$. Diese Zahlen sind in folgender Vierfeldertafel enthalten. Setzen Sie die übrigen Werte in die Felder ein.

	M	$\overline{\text{M}}$	
R	$17\,\%$	$11\,\%$	$28\,\%$
$\overline{\text{R}}$	$30\,\%$	$42\,\%$	$72\,\%$
	$47\,\%$	$53\,\%$	$100\,\%$

18.01.2006

4.42 43. Hausaufgabe

4.42.1 Stochastik-Buch Seite 123, Aufgabe 10

Aus einem Kartenspiel mit 32 Karten, das vier Könige enthält, wird in n aufeinander folgenden Zügen ohne Zurücklegen zufällig je eine Karte gezogen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

1. „Beim ersten Zug wird ein König gezogen“

   $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 32\}$; (Laplace)

   1,2,3,4 sind Könige.

   $P = P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{4\}) = \frac{4}{32} = 12{,}5\,\%$;

2. **a)** „In zwei aufeinander folgenden Zügen wird je ein König gezogen“

   $P = \frac{4}{32}\frac{3}{31} \approx 1{,}2\,\%$;

   b) „In zwei aufeinander folgenden Zügen wird beim zweiten Zug ein König gezogen“

   $P = \frac{28}{32}\frac{4}{31} + \frac{4}{32}\frac{3}{31} = 12{,}5\,\%$;

3. **a)** „In drei aufeinander folgenden Zügen wird je ein König gezogen“
   $P = \frac{4}{32}\frac{3}{31}\frac{2}{30} \approx 0{,}1\,\%$;

   b) „In drei aufeinander folgenden Zügen wird beim dritten Zug ein König gezogen“
   $$P = \underbrace{\frac{28}{32}\frac{27}{31}\frac{4}{30}}_{0,0,1} + \underbrace{\frac{28}{32}\frac{4}{31}\frac{3}{30}}_{0,1,1} + \underbrace{\frac{4}{32}\frac{28}{31}\frac{3}{30}}_{1,0,1} + \underbrace{\frac{4}{32}\frac{3}{31}\frac{2}{30}}_{1,1,1} = 12{,}5\,\%;$$

4. **a)** „In vier aufeinander folgenden Zügen wird je ein König gezogen“
   $P = \frac{4}{32}\frac{3}{31}\frac{2}{30}\frac{1}{29} \approx 2{,}7 \cdot 10^{-3}$;

   b) „In vier aufeinander folgenden Zügen wird beim vierten Zug ein König gezogen“
   $$\begin{aligned} P &= \underbrace{\frac{28}{32}\frac{27}{31}\frac{26}{30}\frac{4}{29}}_{0,0,0,1} + \underbrace{\frac{28}{32}\frac{27}{31}\frac{4}{30}\frac{3}{29}}_{0,0,1,1} + \underbrace{\frac{28}{32}\frac{4}{31}\frac{27}{30}\frac{3}{29}}_{0,1,0,1} + \underbrace{\frac{28}{32}\frac{4}{31}\frac{3}{30}\frac{2}{29}}_{0,1,1,1} + \\ &+ \underbrace{\frac{4}{32}\frac{28}{31}\frac{27}{30}\frac{3}{29}}_{1,0,0,1} + \underbrace{\frac{4}{32}\frac{28}{31}\frac{3}{30}\frac{2}{29}}_{1,0,1,1} + \underbrace{\frac{4}{32}\frac{3}{31}\frac{28}{30}\frac{2}{29}}_{1,1,0,1} + \underbrace{\frac{4}{32}\frac{3}{31}\frac{2}{30}\frac{1}{29}}_{1,1,1,1} = \\ &= 12{,}5\,\%; \end{aligned}$$

5. [„In fünf aufeinander folgenden Zügen wird beim fünften Zug ein König gezogen“

$$\begin{aligned}
P &= \underbrace{\frac{28}{32}\frac{27}{31}\frac{26}{30}\frac{25}{29}\frac{4}{28}}_{0,0,0,0,1} + \underbrace{\frac{28}{32}\frac{27}{31}\frac{26}{30}\frac{4}{29}\frac{3}{28}}_{0,0,0,1,1} + \underbrace{\frac{28}{32}\frac{27}{31}\frac{4}{30}\frac{26}{29}\frac{3}{28}}_{0,0,1,0,1} + \underbrace{\frac{28}{32}\frac{27}{31}\frac{4}{30}\frac{3}{29}\frac{2}{28}}_{0,0,1,1,1} + \\
&+ \underbrace{\frac{28}{32}\frac{4}{31}\frac{27}{30}\frac{26}{29}\frac{3}{28}}_{0,1,0,0,1} + \underbrace{\frac{28}{32}\frac{4}{31}\frac{27}{30}\frac{3}{29}\frac{2}{28}}_{0,1,0,1,1} + \underbrace{\frac{28}{32}\frac{4}{31}\frac{3}{30}\frac{27}{29}\frac{2}{28}}_{0,1,1,0,1} + \underbrace{\frac{28}{32}\frac{4}{31}\frac{3}{30}\frac{2}{29}\frac{1}{28}}_{0,1,1,1,1} + \\
&+ \underbrace{\frac{4}{32}\frac{28}{31}\frac{27}{30}\frac{26}{29}\frac{3}{28}}_{1,0,0,0,1} + \underbrace{\frac{4}{32}\frac{28}{31}\frac{27}{30}\frac{3}{29}\frac{2}{28}}_{1,0,0,1,1} + \underbrace{\frac{4}{32}\frac{28}{31}\frac{3}{30}\frac{27}{29}\frac{2}{28}}_{1,0,1,0,1} + \underbrace{\frac{4}{32}\frac{28}{31}\frac{3}{30}\frac{2}{29}\frac{1}{28}}_{1,0,1,1,1} + \\
&+ \underbrace{\frac{4}{32}\frac{3}{31}\frac{28}{30}\frac{27}{29}\frac{2}{28}}_{1,1,0,0,1} + \underbrace{\frac{4}{32}\frac{3}{31}\frac{28}{30}\frac{2}{29}\frac{1}{28}}_{1,1,0,1,1} + \underbrace{\frac{4}{32}\frac{3}{31}\frac{2}{30}\frac{28}{29}\frac{1}{28}}_{1,1,1,0,1} + \underbrace{\frac{4}{32}\frac{3}{31}\frac{2}{30}\frac{1}{29}\frac{0}{28}}_{1,1,1,1,\text{„}1\text{“}} = \\
&= 12{,}5\,\%;]
\end{aligned}$$

4.42.2 Stochastik-Buch Seite 123, Aufgabe 11

Werkstücke einer Produktion werden kontrolliert auf richtigen Durchmesser (A) und richtige Dicke (B). Von 1000 Werkstücken waren bei 10 sowohl Durchmesser als aus Dicke falsch, bei 970 war der Durchmesser richtig, bei 950 war die Dicke richtig.

a) Wie groß ist die Anzahl der Werkstücke mit richtigem Durchmesser und richtiger Dicke?

	A	$\overline{\mathbf{A}}$	
B	930	20	950
$\overline{\mathbf{B}}$	40	10	50
	970	30	1000

930

b) Ein Werkstück wird zufällig herausgegriffen. Berechnen Sie

- $P(A) = \frac{970}{1000} = 97\,\%$;
- $P(\overline{A} \cap B) = \frac{20}{1000} = 2\,\%$;
- $P_{\overline{B}}(A) = \frac{40}{50} = 80\,\%$;
- $P_{A\cup B}(A\cap B) = \frac{P((A\cup B)\cap(A\cap B))}{P(A\cup B)} = \frac{P(A\cap B)}{P(A)+P(B)-P(A\cap B)} = \frac{930}{970+950-930} = \frac{930}{1000-10} \approx 93{,}9\,\%$;

22.01.2006

4.43 44. Hausaufgabe

4.43.1 Stochastik-Buch Seite 121, Aufgabe 2

Eine pharmazeutische Firma möchte ein neues Schlafmittel auf den Markt bringen. Ein Testverfahren soll über die Zulassung entscheiden. Folgende Eigenschaften seien definiert:

- H_0: „Das Schlafmittel ruft keinerlei Schädigung bei Schwangerschaften hervor“
- H_1: „Das Schlafmittel schädigt bei Schwangerschaft“
- T_0: „Das Schlafmittel wird zugelassen“
- T_1: „Das Schlafmittel wird nicht zugelassen“

Bei der Entscheidung über die Zulassung können folgende Fehler auftreten:

- Fehler 1. Art: Das Schlafmittel wird nicht zugelassen, obwohl es harmlos ist.
- Fehler 2. Art: Das Schlafmittel ruft Schädigungen hervor, aufgrund des Testergebnisses nimmt man aber keine Schädigung an.

a) Drücken Sie die bedingten Wahrscheinlichkeiten für beide Fehlerarten symbolisch aus.

- $P(\text{Fehler 1. Art}) = P_{H_0}(T_1)$;
- $P(\text{Fehler 2. Art}) = P_{H_1}(T_0)$;

b) Denken Sie an die Contergan-Affäre. Welchen von beiden Fehlern wird man eher in Kauf nehmen?

Den Fehler 1. Art.

4.43.2 Stochastik-Buch Seite 121, Aufgabe 3

Eine politische Partei möchte unmittelbar vor der Wahl wissen, ob ihr Kandidat bereits mit einer absoluten Mehrheit rechnen kann oder ob noch eine Intensivierung des Wahlkampes erforderlich ist. Die Entscheidung soll durch eine repräsentative Umfrage unter den Stimmberechtigten entschieden werden. Es sei

- H_0: „Der Kandidat hat noch keine absolute Mehrheit“
- H_1: „Der Kandidat hat bereits die absolute Mehrheit“
- T_0: „Die Partei entscheidet sich aufgrund des Testergebnisses für H_0“
- T_1: „Die Partei entscheidet sich aufgrund des Testergebnisses für H_1“

Drücken Sie die folgenden bedingten Wahrscheinlichkeiten symbolisch aus:

a) Die Wahrscheinlichkeit, irrtümlich davon auszugehen, dass keine Intensivierung des Wahlkampfes mehr nötig ist.

$P_{\mathrm{a}} = P_{H_0}(T_1);$

b) Die Wahrscheinlichkeit, zu Recht davon auszugehen, dass keine Intensivierung des Wahlkampfes mehr nötig ist.

$P_{\mathrm{b}} = P_{H_1}(T_1);$

c) Die Wahrscheinlichkeit, dass noch keine absolute Mehrheit vorliegt, obwohl das Testergebnis dafür spricht.

$P_{\mathrm{c}} = P_{T_1}(H_0);$

d) Die Wahrscheinlichkeit, dass bereits eine absolute Mehrheit besteht, obwohl das Testergebnis dagegen spricht.

$P_{\mathrm{d}} = P_{T_0}(H_1);$

23.01.2006

4.44 45. Hausaufgabe

4.44.1 Stochastik-Buch Seite 122, Aufgabe 5

Bei einer Untersuchung seien folgende Ereignisse gegeben:

- D: „Patient ist an Diabetes erkrankt“
- M: „Patient ist männlich“, W: „Patient ist weiblich“

Benutzen Sie die folgende Tabelle, um die gesuchten Wahrscheinlichkeiten zu berechnen:

	M	W	
D	0,04	0,01	0,05
$\overline{\text{D}}$	0,56	0,39	

a) Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Patient an Diabetes erkrankt ist.

$5\,\%$

b) Die Wahrscheinlichkeit für Diabetes unter männlichen Patienten.

$4\,\%$

c) Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Patient männlich ist, wenn Diabetes vorliegt.

$\frac{4\,\%}{5\,\%} = 80\,\%;$

d) Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Patient weiblich ist, wenn Diabetes vorliegt.

$\frac{1\,\%}{5\,\%} = 20\,\%;$

e) Wie erkannt man, dass in diesem Beispiel die Diabeteserkrankung vom Geschlecht des Patienten abhängig ist?

$P_D(M) \neq P_D(W);$

4.44.2 Stochastik-Buch Seite 122, Aufgabe 8

Eine Urne enthält 16 gleichartige Kugeln, von denen 6 schwarz und 10 weiß sind. Der Urne werden 3 Kugeln nacheinander entnommen, ohne sie zurückzulegen. Es gelte die Laplace-Annahme. Man berechne unter Verwendung eines Ereignisbaums die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

- A_1: „Alle drei Kugeln sind weiß"
  $P(A_1) = \frac{10}{16}\frac{9}{15}\frac{8}{14} \approx 21{,}4\,\%;$
- A_2: „Zwei Kugeln sind weiß, eine ist schwarz"
  $$P(A_2) = \underbrace{\frac{10}{16}\frac{9}{15}\frac{6}{14}}_{w,w,s} + \underbrace{\frac{10}{16}\frac{6}{15}\frac{9}{14}}_{w,s,w} + \underbrace{\frac{6}{16}\frac{10}{15}\frac{9}{14}}_{s,w,w} \approx 48{,}2\,\%;$$
- A_3: „Eine Kugel ist weiß, zwei Kugeln sind schwarz"
  $$P(A_3) = \underbrace{\frac{10}{16}\frac{6}{15}\frac{5}{14}}_{w,s,s} + \underbrace{\frac{6}{16}\frac{10}{15}\frac{5}{14}}_{s,w,s} + \underbrace{\frac{6}{16}\frac{5}{15}\frac{10}{14}}_{s,s,w} \approx 26{,}8\,\%;$$
- A_4: „Alle Kugeln sind schwarz"
  $P(A_4) = \frac{6}{16}\frac{5}{15}\frac{4}{14} \approx 3{,}6\,\%;$

24.01.2006

4.45 46. Hausaufgabe

4.45.1 Stochastik-Buch Seite 121, Aufgabe 4

Bei einer Röntgenreihenuntersuchung bedeute

- H_0: „Die untersuchte Person ist nicht an Tbc erkrankt"
- H_1: „Die untersuchte Person ist an Tbc erkrankt"
- T_0: „Das Röntgenbild ergibt keinen Tbc-Verdacht"
- T_1: „Das Röntgenbild ergibt einen Tbc-Verdacht"

Interpretieren Sie folgende Wahrscheinlichkeiten:

- $P_{H_1}(T_0)$: Kein Verdacht trotz Erkrankung
- $P_{H_0}(T_1)$: Verdacht trotz Gesundheit
- $P_{T_0}(H_1)$: Erkrankung trotz Fehlen eines Verdachts
- $P_{T_1}(H_0)$: Gesundheit trotz Verdacht

4.45.2 Stochastik-Buch Seite 122, Aufgabe 6

Folgende Ereignisse seien definiert:

- H: „Eine Person ist HIV-infiziert“
- $\overline{H}$: „Eine Person ist nicht HIV-infiziert“
- T: „Der HIV-Test liefert ein positives Ergebnis“
- $\overline{T}$: „Der HIV-Test liefert ein negatives Ergebnis“

Die Güte des HIV-Tests lässt sich mit den Wahrscheinlichkeiten in folgender Vierfeldertafel beschreiben:

	H	$\overline{\mathbf{H}}$	
T	$0{,}999 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$	$5{,}999 \cdot 10^{-3}$
$\overline{\mathbf{T}}$	$0{,}001 \cdot 10^{-3}$	$994 \cdot 10^{-3}$	$994{,}001 \cdot 10^{-3}$
	$1{,}000 \cdot 10^{-3}$	$999 \cdot 10^{-3}$	

Berechnen Sie daraus

a) die so genannte Sensitivität $P_H(T)$ und Spezifität $P_{\overline{H}}(\overline{T})$ des Tests.

$P_H(T) = \frac{P(H \cap T)}{P(H)} = \frac{0{,}999 \cdot 10^{-3}}{1{,}000 \cdot 10^{-3}} = 99{,}9\,\%$;

$P_{\overline{H}}(\overline{T}) = \frac{P(\overline{H} \cap \overline{T})}{P(\overline{H})} = \frac{994 \cdot 10^{-3}}{999 \cdot 10^{-3}} \approx 99{,}5\,\%$;

b) die so genannten Aussagewerte $P_T(H)$ und $P_{\overline{T}}(\overline{H})$ des Tests.

$P_T(H) = \frac{P(H \cap T)}{P(T)} = \frac{0{,}999 \cdot 10^{-3}}{5{,}999 \cdot 10^{-3}} \approx 16{,}7\,\%$;

$P_{\overline{T}}(\overline{H}) = \frac{P(\overline{H} \cap \overline{T})}{P(\overline{T})} = \frac{994 \cdot 10^{-3}}{994{,}001 \cdot 10^{-3}} \approx 100\,\%$;

4.45.3 Stochastik-Buch Seite 122, Aufgabe 7

a) Berechnen Sie bei einem normalen Würfel $P_A(B)$ für

α**)**

$A = \{4\}; \quad B = \{1\};$
$\Rightarrow P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 0;$

β**)**

$A = \{1,5\}; \quad B = \{1,2,3,4,6\};$
$\Rightarrow P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{2} = 50\,\%;$

γ**)**

$A = \{2,4,5\}; \quad B = \{1,2,3,4\};$
$\Rightarrow P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{2}{3} \approx 66{,}7\,\%;$

δ**)**

$A = \{2,3,4,5\}; \quad B = \{2,3,4\};$
$\Rightarrow P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{3}{4} = 75\,\%;$

ε**)**

$A = \{1,3,6\}; \quad B = \{1,2,3,4,5,6\};$
$\Rightarrow P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{3}{3} = 1;$

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem Wurf mit zwei Würfeln das Maximum der Augenzahlen gleich 5 ist unter der Bedingung, dass das Minimum der Augenzahlen höchstens 3 ist.

$A = \big\{(a,b) \bigm| (a < b \wedge a \leq 3) \vee (b < a \wedge b \leq 3) \vee a = b = 3\big\};$
$\Rightarrow |A| = 27;$

$B = \big\{(a,b) \bigm| (a > b \wedge a = 5) \vee (b > a \wedge b = 5) \vee a = b = 5\big\};$
$\Rightarrow |B| = 1 \cdot 4 + 4 \cdot 1 + 1 = 9;$

$\Rightarrow P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{6}{27} \approx 22{,}2\,\%;$

4.45.4 Stochastik-Buch Seite 122, Aufgabe 9

Aus einer Urne, die eine rote, fünf weiße und zwei schwarze Kugeln enthält, werden nacheinander drei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Es gelte die Laplace-Annahme. Man berechne unter Verwendung eines Ergebnisbaums die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

- A: „Die beim ersten Zug entnommene Kugel ist schwarz“
  $P(A) = \underbrace{\frac{2}{8}\frac{6}{7}\frac{5}{6}}_{1,0,0} + \underbrace{\frac{2}{8}\frac{6}{7}\frac{1}{6}}_{1,0,1} + \underbrace{\frac{2}{8}\frac{1}{7}\frac{6}{6}}_{1,1,0} = \frac{1}{8 \cdot 7 \cdot 6} \cdot (2 \cdot 6) \cdot (7) = 25\,\%;$
- B: „Die beim zweiten Zug entnommene Kugel ist schwarz“
  $P(B) = \underbrace{\frac{6}{8}\frac{2}{7}\frac{5}{6}}_{0,1,0} + \underbrace{\frac{6}{8}\frac{2}{7}\frac{1}{6}}_{0,1,1} + \underbrace{\frac{2}{8}\frac{1}{7}\frac{6}{6}}_{1,1,0} = \frac{1}{8 \cdot 7 \cdot 6} \cdot (2 \cdot 6) \cdot (7) = 25\,\%;$
- C: „Die beim dritten Zug entnommene Kugel ist schwarz“
  $P(C) = \underbrace{\frac{6}{8}\frac{5}{7}\frac{2}{6}}_{0,0,1} + \underbrace{\frac{6}{8}\frac{2}{7}\frac{1}{6}}_{0,1,1} + \underbrace{\frac{2}{8}\frac{6}{7}\frac{1}{6}}_{1,0,1} = \frac{1}{8 \cdot 7 \cdot 6} \cdot (2 \cdot 6) \cdot (7) = 25\,\%;$

26.01.2006

4.46 47. Hausaufgabe

4.46.1 Stochastik-Buch Seite 130, Aufgabe 16

Zur Früherkennung einer Stoffwechselkrankheit bei Säuglingen wird eine neue Untersuchungsmethode entwickelt. Mit ihr wird die Krankheit in $80\,\%$ der Fälle zuverlässig erkannt, während der Anteil der irrtümlich als krank eingestuften Säuglinge bei $2\,\%$ liegt. Durchschnittlich tritt die Krankheit bei $1{,}0 \cdot 10^5$ Geburten hundertmal auf.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein untersuchter Säugling tatsächlich erkrankt ist, obwohl die Untersuchung keinen zuverlässigen Hinweis darauf ergeben hat?

$P_{H_1}(T_1) = 80\,\%; \quad P_{H_0}(T_1) = 2\,\%;$

$P(H_1) = \frac{100}{1{,}0 \cdot 10^5};$

$P_{T_0}(H_1) = \frac{P(H_1)P_{H_1}(T_0)}{P(H_1)P_{H_1}(T_0) + P(H_0)P_{H_0}(T_0)} = \frac{P(H_1)\big(1-P_{H_1}(T_1)\big)}{P(H_1)\big(1-P_{H_1}(T_1)\big) + (1-P(H_1))\big(1-P_{H_0}(T_1)\big)} \approx 2{,}0 \cdot 10^{-4};$

4.46.2 Stochastik-Buch Seite 131, Aufgabe 20

Bei einer Übertragung der Zeichen „Punkt“ und „Strich“ in einem Fernmeldesystem werden durch Störungen im Mittel $5\,\%$ der gesendeten Punkte als Striche und $3\,\%$ der gesendeten Striche als Punkte empfangen. Das Verhältnis von gesendeten Punkten zu gesendeten Strichen ist $\frac{3}{5}$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das richtige Zeichen empfangen wurde, falls a) Punkt, b) Strich empfangen wurde?

$P_{H_\circ}(T_-) = 5\,\%$;

$P_{H_-}(T_\circ) = 3\,\%$;

$\frac{P(H_\circ)}{P(H_-)} = \frac{3}{5}$; $\Rightarrow P(H_\circ) = \frac{3}{8}$;

a) $P_{T_\circ}(H_\circ) = \frac{P(H_\circ)P_{H_\circ}(T_\circ)}{P(H_\circ)P_{H_\circ}(T_\circ)+P(H_-)P_{H_-}(T_\circ)} = 95\,\%$;

b) $P_{T_-}(H_-) = \frac{P(H_-)P_{H_-}(T_-)}{P(H_-)P_{H_-}(T_-)+P(H_\circ)P_{H_\circ}(T_-)} = 97\,\%$;

28.01.2006

4.47 48. Hausaufgabe

4.47.1 Stochastik-Buch Seite 130, Aufgabe 15

a) Um die Güte eines Tests zur Untersuchung von Neurotikern zu prüfen, werden 100 Versuchspersonen, von denen 10 neurotisch sind, getestet. Von den gesunden Versuchspersonen erbrachte der Test bei $20\,\%$ den Hinweis auf Neurotizismus, von den Neurotikern bei $90\,\%$.

Zeigen Sie: Die Wahrscheinlichkeit beträgt $33{,}3\,\%$, dass eine Person tatsächlich neurotisch ist, wenn der Test auf die Krankheit hingewiesen hat.

$P(N) = 10\,\%$;

$P_N(T) = 90\,\%$; $\quad P_{\overline{N}}(T) = 20\,\%$;

$\Rightarrow P_T(N) = \frac{P(N)P_N(T)}{P(N)P_N(T)+P(\overline{N})P_{\overline{N}}(T)} \approx 33{,}3\,\%$;

b) Nach Überarbeitung des Tests wird unter den genannten Bedingungen (100 Versuchspersonen, 10 davon neurotisch) mit anderen Versuchspersonen ein neuer Versuch unternommen. Man erhält nun bei den Gesunden nur noch in $10\,\%$ und bei den Kranken in $95\,\%$ der Fälle Hinweis auf Neorotizismus.

Zeigen Sie: Die Wirksamkeit des verbesserten Tests ist gegenüber der ursprünglichen Fassung von $33{,}3\,\%$ auf $51{,}4\,\%$ gestiegen.

$P(N) = 10\,\%;$

$P_N(T) = 95\,\%; \quad P_{\overline{N}}(T) = 10\,\%;$

$\Rightarrow P_T(N) = \frac{P(N)P_N(T)}{P(N)P_N(T)+P(\overline{N})P_{\overline{N}}(T)} \approx 51{,}4\,\%;$

4.47.2 Stochastik-Buch Seite 131, Aufgabe 19

An einem Ort sei an einem Fünftel aller Tage schlechtes Wetter; an den übrigen Tagen sei es gut. Es habe sich herausgestellt, dass am Vorabend eines Tages mit gutem Wetter die Wettervorhersage mit $70\,\%$ Wahrscheinlichkeit gut, mit $20\,\%$ Wahrscheinlichkeit wechselhaft und im Übrigen schlecht lautet. Ein Schlechtwettertag sei mit $60\,\%$ zutreffend angekündigt, mit $30\,\%$ als wechselhaft und sonst als gut vorausgesagt.

a) Verwenden Sie für das Wetter die Bezeichnungen W_g und W_s, für die Vorhersage V_g, V_s und V_w.

$P(W_\mathrm{s}) = 20\,\%; \quad P(W_\mathrm{g}) = 80\,\%;$

$P_{W_\mathrm{g}}(V_\mathrm{g}) = 70\,\%; \quad P_{W_\mathrm{g}}(V_\mathrm{w}) = 20\,\%; \quad P_{W_\mathrm{g}}(V_\mathrm{s}) = 10\,\%;$

$P_{V_\mathrm{s}}(W_\mathrm{g}) = 60\,\%; \quad P_{V_\mathrm{w}}(W_\mathrm{s}) = 30\,\%; \quad P_{V_\mathrm{g}}(W_\mathrm{s}) = 10\,\%;$

b) Heute abend wird gutes (schlechtes) Wetter angesagt. Wie zuverlässig ist diese Vorhersage?

$P_{V_\mathrm{g}}(W_\mathrm{g}) = 1 - P_{V_\mathrm{g}}(W_\mathrm{s}) = 90\,\%;$

$P_{V_\mathrm{s}}(W_\mathrm{s}) = 60\,\%;$

(XXX TEILWEISE (?) FALSCH)

30.01.2006

4.48 49. Hausaufgabe

4.48.1 Beweis der Unabhängigkeit von A und $\overline{B}$ unter der Voraussetzung der Unabhängigkeit von A und B

Voraussetzung: $P(A \cap B) = P(A)P(B) = P(A)P_A(B); \Rightarrow P_A(B) = P(B);$

Vermutung: $P(A \cap \overline{B}) = P(A)P(\overline{B}) = P(A)\,(1 - P(B))\,;$

Beweis: $P(A \cap \overline{B}) = P(A)P_A(\overline{B}) = P(A)\,(1 - P_A(B)) = P(A)\,(1 - P(B))\,;$

4.48.2 Stochastik-Buch Seite 146, Aufgabe 6

A und B seien zwei unabhängige Ereignisse $P(A) = \frac{3}{4}$, $P(B) = \frac{2}{3}$. Man berechne die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse, die durch folgende Aussagen beschrieben werden:

a) „Keines der beiden Ereignisse tritt ein“

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B}) = \frac{1}{12}$;

b) „Genau eines der beiden Ereignisse tritt ein“

$P\big[\big(A \cap \overline{B}\big) \cup \big(\overline{A} \cap B\big)\big] = P(A)P(\overline{B}) + P(\overline{A})P(B) = \frac{5}{12}$;

c) „Beide Ereignisse treten ein“

$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{2}$;

d) „Mindestens eines von beiden Ereignissen tritt ein“

$P\big[\big(A \cap \overline{B}\big) \cup \big(\overline{A} \cap B\big)\big] + P(A \cap B) - P(A \cap B) = \frac{5}{12}$; (XXX: $\frac{11}{12}$?)

e) „Höchstens eines von beiden Ereignissen tritt ein“

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) + P\big[\big(A \cap \overline{B}\big) \cup \big(\overline{A} \cap B\big)\big] = P(\overline{A})P(\overline{B}) + \ldots = \frac{1}{2}$;

4.48.3 Stochastik-Buch Seite 147, Aufgabe 9

Sei $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ der Ergebnisraum des Laplace-Experiments „Werfen eines Würfels“. Es sei

- A: „Augenzahl größer 4“
- B: „Augenzahl gerade“
- C: „Augenzahl kleinergleich 3“
- D: „Augenzahl größergleich 4“
- E: „Augenzahl kleinergleich 5“
- F: „Augenzahl kleinergleich 4“

Zeigen Sie:

a) A und B sind vereinbar und unabhängig.

$A = \{5, 6\}; \quad B = \{2, 4, 6\};$

$A \cap B = \{6\} \neq \varnothing;$

$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{2} = P(B);$

b) C und D sind unvereinbar und abhängig.

$C = \{1, 2, 3\}; \quad D = \{4, 5, 6\};$

$C \cap D = \varnothing;$

$P_C(D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = 0 \neq P(D);$

c) E und F sind vereinbar und abhängig.

$E = \{1, 2, 3, 4, 5\}; \quad F = \{1, 2, 3, 4\};$

$E \cap F = \{1, 2, 3, 4\} \neq \varnothing;$

$P_E(F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = 1 \neq P(F);$

31.01.2006

4.49 50. Hausaufgabe

4.49.1 Stochastik-Buch Seite 130, Aufgabe 12

Drei völlig gleichartige Kästchen A,B,C besitzen je zwei Schublädchen a und b. A enthält in jedem Laden eine Goldmünze, B in einem eine Goldmünze, im anderen eine Silbermünze und C in beiden eine Silbermünze.

Man wählt ein Kästchen zufällig aus, öffnet eines der beiden Lädchen und findet darin eine Goldmünze. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, im anderen Lädchen eine Silbermünze zu finden?

$G = \{A_a, A_b, B_a\}; \quad S = \{B_a\};$

$\Rightarrow P_G(S) = \frac{P(G \cap S)}{P(G)} = \frac{1}{3};$

4.49.2 Stochastik-Buch Seite 130, Aufgabe 13

Eine Urne A enthält neun Kugeln mit den Nummern 1 bis 9, eine Urne B enthält fünf Kugeln mit den Nummern 1 bis 5. Alle Kugeln seien sonst gleichartig. Eine Urne wird zufällig ausgewählt und eine Kugel blindlings daraus gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt die Kugel aus der Urne A, vorausgesetzt, die gezogene Nummer ist gerade?

$K_A = \{1_A, 2_A, 3_A, \ldots, 9_A\}; \quad G = \{2_A, 4_A, 6_A, 8_A, 2_B, 4_B\};$

$\Rightarrow P_G(K_A) = \frac{P(G \cap K_A)}{P(G)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$; (XXX: $53\,\%$?) 02.02.2006

4.50 51. Hausaufgabe

4.50.1 Stochastik-Buch Seite 146, Aufgabe 2

Es sei $0 < P(A) < 1$.

a) Begründen Sie anschaulich, warum A abhängig von sich selbst ist.

Ist A eingetreten, so wissen wir, dass A eingetreten ist; also ist $P_A(A) = 1$.

b) Weisen Sie dies mathematisch nach.

Beweis durch Widerspruch.

Annahmen:

- $0 < P(A) < 1$;
- $P(A \cap A) = P(A)P(A)$;

$P(A \cap A) = P(A) = P(A)P(A)$;

Division durch $P(A)$ mit $P(A) \neq 0$ bringt:

$1 = P(A)$;

Dieser Fall wurde von der Angabe ausgeschlossen. Also ist A abhängig von sich selbst.

4.50.2 Stochastik-Buch Seite 146, Aufgabe 3

Zeigen Sie rechnerisch:

a) Sei $A = \varnothing$ oder $A = \Omega$. Dann sind für alle $B \subseteq \Omega$ die Ereignisse A und B unabhängig. Suchen Sie eine anschauliche Begründung.

- $A = \varnothing$;
  $\forall B \subseteq \Omega \colon 0 = P(A) = P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0P(B) = 0;$
  A ist das unmögliche Ereignis. Die Frage nach der bedingten Wahrscheinlichkeit unter der Bedingung $\varnothing$ ist nicht sinnvoll, da die Bedingung niemals eintreten kann.
- $A = \Omega$;
  $\forall B \subseteq \Omega \colon P(B) = P(A \cap B) = P(A)P(B) = 1P(B) = P(B);$
  A ist das sichere Ereignis. Sein Eintreten gibt keine Information über das Eintreten anderer Ereignisse, da es immer eintritt.

b) Sind die Ereignisse A und B unabhängig und gilt $A \subseteq B$, so folgt $P(A) = 0$ oder $P(B) = 1$.

$A \subseteq B; \Leftrightarrow A \cap B = A; \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) = P(A)P(B);$

Damit als einzige Lösungen $P(A) = 0$ (dann $0 = 0$) oder $P(B) = 1$ (dann $P(A) = P(A)$). Andere Lösungen gibt es nicht, wie die durch $P(A)$ dividierte Gleichung zeigt:

$1 = P(B);$

4.50.3 Stochastik-Buch Seite 146, Aufgabe 4

Beim Roulette sei A: „1. Dutzend“ ($\{1, 2, 3, \ldots, 12\}$) und B: „1. Querreihe“ ($\{1, 2, 3\}$).

a) Warum sind A und B notwendigerweise abhängig?

Weil das Eintreten von A Informationen über das Eintreten von B preisgibt ($B \subset A$).

b) Zeigen Sie die Abhängigkeit mit Hilfe der Definitionsgleichung.

$\frac{3}{|\Omega|} = P(A \cap B) \neq P(A)P(B) = \frac{12}{|\Omega|} \frac{3}{|\Omega|};$

c) Zeigen Sie allgemein, dass gilt: $B \subset A; \Rightarrow A$ und B abhängig für $P(A) \neq 1$ und $P(B) \neq 0$.

$\forall P(A) \neq 1, P(B) \neq 0 \colon B \subset A; \Rightarrow P(B) \neq P(A \cap B) = P(A)P(B);$

(Siehe Aufgabe 3.)

06.02.2006

4.51 52. Hausaufgabe

4.51.1 Stochastik-Buch Seite 147, Aufgabe 14

Man zeige: Schreibt man den Elementarereignissen aus $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ gleiche Wahrscheinlichkeiten zu, so sind die Ereignisse $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$, $C = \{1, 4\}$ nur paarweise unabhängig.

$\frac{1}{4} = P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{4}$;

$\frac{1}{4} = P(A \cap C) = P(A)P(C) = \frac{1}{4}$;

$\frac{1}{4} = P(B \cap C) = P(B)P(C) = \frac{1}{4}$;

$\frac{1}{4} = P(A \cap B \cap C) \neq P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{8}$;

4.51.2 Stochastik-Buch Seite 148, Aufgabe 18

Der Zusammenhang zwischen Geschlecht und Rotgrünblindheit sei durch folgende Vierfeldertafel mit Prozentwerten beschrieben. Es sei M: „männlich“, W: „weiblich“, R: „Rotgrünblindheit“, N: „normal“:

	M	**W**
R	1,87	0,21
N	49,57	48,39

Berechnen Sie $P_R(M)$, $P_R(W)$, $P_M(R)$, $P_M(N)$ und begründen Sie die Abhängigkeit.

- $P_R(M) = \frac{1{,}87}{1{,}87+0{,}21} \approx 89{,}9\,\%$;
- $P_R(W) = 1 - P_R(M) \approx 10{,}0\,\%$;
- $P_M(R) = \frac{1{,}87}{1{,}87+49{,}57} \approx 3{,}6\,\%$;
- $P_M(N) = 1 - P_M(R) \approx 96{,}3\,\%$;

4.51.3 Stochastik-Buch Seite 148, Aufgabe 19

A und B seien zwei Ereignisse mit $P(A) = 0{,}4$ und $P(B) = 0{,}5$.

a) Wie lautet die Vierfeldertafel bei Unabhängigkeit?

	A	$\overline{\text{A}}$	
B	0,2	0,3	0,5
$\overline{\text{B}}$	0,2	0,3	0,5
	0,4	0,6	1

b) Der Grad der Abhängigkeit sei gegeben durch $P_A(B) = 0{,}75$. Konstruieren Sie die Vierfeldertafel.

	A	$\overline{\text{A}}$	
B	0,3	0,2	0,5
$\overline{\text{B}}$	0,1	0,4	0,5
	0,4	0,6	1

Man kann diese Abhängigkeit im Urnenmodell dadurch realisieren, dass man eine Urne mit zwei Kugeln von vier verschiedenen Farben füllt, wobei eine Farbe das gleichzeitige Eintreten zweier Ereignisse der Vierfeldertafel bedeutet. Geben Sie den Urneninhalt mit möglichst kleiner Gesamtzahl von Kugeln an.

$\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$;

$A = \{1, 2, 3, 4\}$; $\quad B = \{1, 2, 3\} \cup \{5, 6\}$;

c) Beschreiben Sie die Vierfeldertafel, wenn A und B unvereinbar bzw. total vereinbar sind ($A \subseteq B$).

•

	A	$\overline{\text{A}}$	
B	0	0,5	0,5
$\overline{\text{B}}$	0,4	0,1	0,5
	0,4	0,6	1

•

	A	$\overline{\text{A}}$	
B	0,4	0,1	0,5
$\overline{\text{B}}$	0	0,5	0,5
	0,4	0,6	1

4.51.4 Stochastik-Buch Seite 148, Aufgabe 20

1989 bezeichneten sich $14{,}2$ Millionen Bundesbürger im Alter von 15 und mehr Jahren als Raucher. Damit beträgt der entsprechende Anteil an der Bevölkerung ca. $28\,\%$. Deutliche Abweichungen treten hinsichtlich des Geschlechts auf. So rauchten etwa $36\,\%$ aller

Männer, jedoch „nur“ $21\,\%$ aller Frauen (Ergebnis des Mikrozensus 1989). Der Anteil der Männer mit Mindestalter 15 Jahren ist nach statistischem Jahrbuch ca. $47\,\%$. Eine Person dieser Altersgruppe werde zufällig herausgegriffen. M bedeute „männlich“, W „weiblich“, R „jemand raucht“, N „jemand raucht nicht“.

a) Berechnen Sie mit diesen Angaben die Wahrscheinlichkeiten der vier Ereignispaare $(M \cap R)$, $(W \cap R)$, $(M \cap N)$, $(W \cap N)$ und tragen Sie diese Werte in eine Vierfeldertafel ein.

	M	**W**	
R	$17\,\%$	$11\,\%$	$28\,\%$
N	$30\,\%$	$42\,\%$	$72\,\%$
	$47\,\%$	$53\,\%$	$100\,\%$

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person, die raucht, männlichen bzw. weiblichen Geschlechts ist?

$P_R(M) \approx \frac{17\,\%}{28\,\%} \approx 60{,}7\,\%;$

$P_R(W) = 1 - P_R(M) \approx 39{,}3\,\%;$

c) Weisen Sie die Abhängigkeit zwischen Rauchverhalten und Geschlecht nach.

$17\,\% \approx P(M \cap R) \neq P(M)P(R) \approx 13\,\%;$

09.02.2006

4.52 53. Hausaufgabe

4.52.1 Stochastik-Buch Seite 149, Aufgabe 21

Wir betrachten das zweimalige Werfen eines fairen Würfels und die drei Ereignisse A_i für $i = 1, 2, 3$. A_1 bzw. A_2 sei das Ereignis, dass beim 1. bzw. 2. Wurf eine ungerade Augenzahl fällt; A_3 sei das Ereignis, dass die Summe der geworfenen Augenzahlen ungerade ist.

a) Zeigen Sie, dass je zwei dieser drei Ereignisse unabhängig sind.

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2;$

$A_1 = \{1, 3, 5\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}; \Rightarrow |A_1| = 3 \cdot 6 = 18;$

$A_2 = \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,3,5\}; \Rightarrow |A_2| = 6 \cdot 3 = 18;$

$A_3 = \{(a,b)|(a+b) \bmod 2 = 1\}; \Rightarrow |A_3| = 6 \cdot 3 = 18;$

$\frac{1}{4} = P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2) = \frac{1}{4};$

$\frac{1}{4} = P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3) = \frac{1}{4};$

$\frac{1}{4} = P(A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3) = \frac{1}{4};$

b) Zeigen Sie, dass die A_i abhängig sind.

$0 = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \neq P(A_1)P(A_2)P(A_3) = \frac{1}{8};$

4.52.2 Stochastik-Buch Seite 149, Aufgabe 22

Für drei Ereignisse A, B, C mit positiven Wahrscheinlichkeiten gelte

$P(A) = P_B(A) = P_C(A) = P_{B\cap C}(A);$

$P(B) = P_A(B) = P_C(B) = P_{A\cap C}(B);$

$P(C) = P_A(C) = P_B(C) = P_{A\cap B}(C);$

Zeigen Sie, dass diese drei Bedingungen mit den Multiplikationsregeln für drei unabhängige Ereignisse äquivalent sind.

$P(A) = P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}; \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B);$

$P(A) = P_C(A) = \frac{P(A\cap C)}{P(C)}; \Leftrightarrow P(A \cap C) = P(A)P(C);$

$P(B) = P_C(B) = \frac{P(B\cap C)}{P(C)}; \Leftrightarrow P(B \cap C) = P(B)P(C);$

$P(A) = P_{B\cap C}(A) = \frac{P(A\cap B\cap C)}{P(B\cap C)}; \Leftrightarrow$
$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B \cap C) = P(A)P(B)P(C);$ 11.02.2006

4.53 54. Hausaufgabe

4.53.1 Stochastik-Buch Seite 149, Aufgabe 27

In einer Massenproduktion werden Schrauben einer bestimmten Sorte hergestellt. Aus dem Sortiment wird eine Schraube zufällig herausgegriffen. Erfahrungsgemäß ist die Wahrscheinlichkeit für eine fehlerhafte Schraube $0{,}1$ und für eine fehlerhafte Schraubenmutter $0{,}05$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Schraubenkopf und Schraubenmutter zusammenpassen, wenn sie unabhängig hergestellt werden?

$(1-0{,}1)\,(1-0{,}05) = 85{,}6\,\%$;

4.53.2 Stochastik-Buch Seite 149, Aufgabe 28

Beim Zusammenbau eines Elektrogeräts werden fünf Widerstände und vier Kondensatoren verwendet. Die Ausschusswahrscheinlichkeit für die Widerstände sei $4\,\%$, für die Kondensatoren $5\,\%$. Man berechne bei geeigneten Unabhängigkeitsmaßnahmen die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A: „Mindestens ein Bauteil ist fehlerhaft".

$P(A) = 1-(1-4\,\%)^5\,(1-5\,\%)^4 \approx 33{,}6\,\%$; (XXX nicht 100 % sicher)

4.53.3 Stochastik-Buch Seite 150, Aufgabe 29

Drei Glühlampen verschiedenen Fabrikats brennen erfahrungsgemäß mit den Wahrscheinlichkeiten $w_1 = \frac{3}{4}$ bzw. $w_2 = \frac{2}{3}$ bzw. $w_3 = \frac{1}{2}$ länger als 1000 Stunden. Man berechne die Wahrscheinlichkeit, dass

a) genau zwei,

b) mindestens zwei,

c) höchstens zwei,

d) keine

mehr als 1000 Stunden brennen.

Dabei sind geeignete Unabhängigkeitsannahmen zu machen.

Welchen Ergebnisraum wird man zugrunde legen?

a) $P(A_\mathrm{a}) = P(1\cap 2\cap \overline{3}) + P(1\cap \overline{2}\cap 3) + P(\overline{1}\cap 2\cap 3) = w_1 w_2\,(1-w_3) + w_1\,(1-w_2)\,w_3 + (1-w_1)\,w_2 w_3 \approx 45{,}8\,\%$;

b) $P(A_\mathrm{b}) = P(A_\mathrm{a}) + P(1\cap 2\cap 3) = P(A_\mathrm{a}) + w_1 w_2 w_3 \approx 70{,}8\,\%$;

c) $P(A_\mathrm{c}) = 1 - P(A_\mathrm{b}) + P(A_\mathrm{a}) = 75\,\%$;

d) $P(A_\mathrm{d}) = P(\overline{1} \cap \overline{2} \cap \overline{3}) = (1 - w_1)\,(1 - w_2)\,(1 - w_3) \approx 4{,}2\,\%$;

$\Omega = \{0, 1\}^3$; 20.02.2006

4.54 55. Hausaufgabe

4.54.1 Stochastik-Buch Seite 150, Aufgabe 30

Aus einer Sterbetafel kann man ausgehend von einer großen Anzahl $N(x)$ von x-jährigen Personen die Anzahl $N(y)$ der davon im Alter von y noch lebenden Personen entnehmen. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte x-jährige Person das Alter y erreicht, ist $N(y) : N(x)$.

Die folgende Tabelle zeigt einen Auszug aus einer Sterbetafel:

Alter	Überlebende
0	100 000
30	82 577
40	79 412
50	74 152

Unter geeigneten Annahmen über die Unabhängigkeit berechne man die Wahrscheinlichkeit, dass von zwei Personen mit 30 bzw. 40 Jahren nach 10 Jahren. . .

a) . . .beide noch leben.

$\frac{N(40)}{N(30)} \cdot \frac{N(50)}{N(40)} = \frac{N(50)}{N(30)} \approx 89{,}8\,\%$;

b) . . .mindestens eine noch lebt.

$1 - \left(1 - \frac{N(40)}{N(30)}\right)\left(1 - \frac{N(50)}{N(40)}\right) \approx 99{,}7\,\%$;

c) . . .höchstens eine noch lebt.

$1 - \frac{N(40)}{N(30)} \cdot \frac{N(50)}{N(40)} \approx 10{,}2\,\%$;

d) . . .keine mehr lebt.

$\left(1 - \frac{N(40)}{N(30)}\right)\left(1 - \frac{N(50)}{N(40)}\right) \approx 0{,}3\,\%$;

e) . . .genau eine noch lebt.

$\frac{N(40)}{N(30)}\left(1 - \frac{N(50)}{N(40)}\right) + \left(1 - \frac{N(40)}{N(30)}\right)\frac{N(50)}{N(40)} \approx 9{,}9\,\%$;

4.54.2 Stochastik-Buch Seite 150, Aufgabe 31

Ein Gerät werde aus 35 Komponenten montiert. Sobald eine Komponente defekt ist, fällt das Gerät aus. Bei den Komponenten handelt es sich teils um Zulieferteile und teils um selbst hergestellte Zwischenprodukte. Die Zulieferteile haben erfahrungsgemäß einen Ausschussanteil von $1\,\%$ und die selbst hergestellten Teil von $0{,}1\,\%$. Das Gerät enthält zehn Zulieferteile. Die restlichen Komponenten werden selbst gefertigt.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, ein funktionsfähiges Gerät zu montieren?

$(1-1\,\%)^{10}\,(1-0{,}1\,\%)^{35-10} \approx 88{,}2\,\%;$

b) Wie groß ist der Anteil der Geräte, die aufgrund mindestens eines fehlerhaften Zulieferteils defekt sind?

$1-(1-1\,\%)^{10} \approx 9{,}6\,\%;$

c) Ist das Qualitätsziel „99 % fehlerfreie Geräte vor Endprüfung" zu erreichen, wenn das Qualitätsniveau der Zulieferteile auf das der selbst produzierten Teile erhöht wird?

$(1-0{,}1\,\%)^{35} \approx 96{,}6\,\% < 99\,\%;$

d) Mit welchem Ausschussanteil der Komponenten kann das Qualitätsziel erreicht werden? (Der Ausschussanteil der Zulieferteile und der selbst hergestellten Teile soll gleich groß sein.)

$(1-x)^{35} \geq 99\,\%; \Rightarrow x \geq 1-\sqrt[35]{99\,\%} \approx 0{,}029\,\%;$

4.54.3 Stochastik-Buch Seite 150, Aufgabe 32

Ein Gerät bestehe aus drei Bauteilen T_1, T_2, T_3. Es sei funktionstüchtig, wenn das Teil T_1 störungsfrei arbeitet oder die beiden Teile T_2 und T_3 zusammen.

a) Zeichnen Sie das Schaltbild.

Parallelschaltung, bestehend aus T_1 in einem Ast und einer Reihenschaltung aus T_2 und T_3 im anderen Ast.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit funktioniert das Gerät, wenn die Bauteile mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1 = 0{,}7$, $p_2 = p_3 = 0{,}8$ intakt sind?

$p_1\left(1-p_2\right)\left(1-p_3\right)+p_1\left(1-p_2\right)p_3+p_1p_2\left(1-p_3\right)+\left(1-p_1\right)p_2p_3+p_1p_2p_3 = p_1+\left(1-p_1\right)p_2p_3 = 89{,}2\,\%;$

21.02.2006

4.55 56. Hausaufgabe

4.55.1 Angabe einer bestimmten Strecke

$A(5,3,4);\quad B(-10,-3,-8);$

$$\begin{aligned}
[AB] &= \left\{\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\q_3\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\q_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\3\\4\end{pmatrix} + k\begin{pmatrix}-10-5\\-3-3\\-8-4\end{pmatrix}\text{ mit } k\in[0,1]\right\} = \\
&= \left\{\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\q_3\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\q_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-10\\-3\\-8\end{pmatrix} + k\begin{pmatrix}5-(-10)\\3-(-3)\\4-(-8)\end{pmatrix}\text{ mit } k\in[0,1]\right\} = \\
&= \left\{\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\q_3\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\q_3\end{pmatrix} = \vec{A} + k\overrightarrow{AB}\text{ mit } k\in[0,1]\right\} = \\
&= \left\{\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\q_3\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\q_3\end{pmatrix} = \vec{B} + k\overrightarrow{BA}\text{ mit } k\in[0,1]\right\};
\end{aligned}$$

25.02.2006

4.56 57. Hausaufgabe

4.56.1 Geometrie-Buch Seite 162, Aufgabe 1

Welche Lage hat $g\colon \vec{X} = \left(\begin{smallmatrix}1\\3\\-1\end{smallmatrix}\right) + \lambda\left(\begin{smallmatrix}1\\2\\2\end{smallmatrix}\right)$ zu...

- $a\colon \vec{X} = \left(\begin{smallmatrix}1\\-5\\-1\end{smallmatrix}\right) + \alpha\left(\begin{smallmatrix}1\\-2\\2\end{smallmatrix}\right);$

  $\forall r\in\mathbb{R}\colon \left(\begin{smallmatrix}1\\2\\2\end{smallmatrix}\right) \neq r\left(\begin{smallmatrix}1\\-2\\2\end{smallmatrix}\right);$

  $\Rightarrow g$ und a sind nicht parallel.

Gleichsetzen bringt keinen Widerspruch $\Rightarrow g$ und a schneiden sich in einem Punkt.

- b: $\vec{X} = \begin{pmatrix}1\\-5\\0\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$;

  $\forall r \in \mathbb{R}$: $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} \neq r \begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$;

  $\Rightarrow g$ und b sind nicht parallel.

  Gleichsetzen bringt Widerspruch $\Rightarrow g$ und b sind windschief.

- c: $\vec{X} = \begin{pmatrix}1\\-5\\0\end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix}-1\\-2\\-2\end{pmatrix}$;

  $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} = - \begin{pmatrix}-1\\-2\\-2\end{pmatrix}$;

  $\Rightarrow g$ und c sind parallel.

  $\forall r \in \mathbb{R}$: $\begin{pmatrix}1\\-5\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-8\\1\end{pmatrix} \neq r \begin{pmatrix}-1\\-2\\-2\end{pmatrix}$;

  $\Rightarrow g$ und c sind echt parallel.

- d: $\vec{X} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\-5\end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix}2\\4\\4\end{pmatrix}$;

  $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix}2\\4\\4\end{pmatrix}$;

  $\Rightarrow g$ und d sind parallel.

  $\begin{pmatrix}-1\\-1\\-5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-4\\-4\end{pmatrix} = - \begin{pmatrix}2\\4\\4\end{pmatrix}$;

  $\Rightarrow g$ und d sind identisch.

07.03.2006

4.57 58. Hausaufgabe

4.57.1 Geometrie-Buch Seite 162, Aufgabe 3

$A(-5, 4, -2)$, $B(6, -3, 4)$, $C(10, -6, 18)$, $D(0, 0, 22)$. Zeige durch Berechnung des Diagonalschnittpunkts, dass $ABCD$ ein ebenes Viereck ist.

Annahme: Diagonalen sind AC und BD, nicht AB und CD!

$AC : \vec{X} = \vec{A} + k\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}-5\\4\\-2\end{pmatrix} + k \begin{pmatrix}15\\-10\\20\end{pmatrix}$;

$BD : \vec{X} = \vec{B} + k\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix}6\\-3\\4\end{pmatrix} + k \begin{pmatrix}-6\\3\\18\end{pmatrix}$;

$\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 15 \\ -10 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 18 \end{pmatrix};$

$\Leftrightarrow k \begin{pmatrix} 15 \\ -10 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 18 \end{pmatrix};$

$15k = 11 - 6l; \Leftrightarrow k = \frac{11-6l}{15};$

$-\frac{10}{15}(11 - 6l) = -7 + 3l; \Leftrightarrow l = \frac{1}{3};$

Die Lösungen für k und l erfüllen auch die dritte Gleichung.

4.57.2 Geometrie-Buch Seite 163, Aufgabe 5

Beschreibe die möglichen lagen der Geraden v und w im Raum, die bei bestimmter Blickrichtung so ausschauen:

a) echt parallel, windschief

b) echt parallel, identisch, schneiden sich in einem Punkt

c) schneiden sich in einem Punkt, windschief

d) windschief

e) echt parallel

f) identisch

4.57.3 Geometrie-Buch Seite 163, Aufgabe 6a

Die Ortsvektoren von $A(6, 0, 3)$, $B(6, 12, 0)$ und $C(-3, 0, 6)$ spannen ein Spat auf.

M ist Kantenmittelpunkt, S ist Mittelpunkt der Deckfläche.

Berechne den Schnittpunkt T von $[AM]$ und $[OS]$.

- $[AM]$: $\vec{X} = \vec{A} + k\overrightarrow{AM}; \quad k \in [0, 1];$
  - $\vec{M} = \frac{\vec{G}+\vec{C}}{2};$
    - $\vec{G} = \vec{C} + \vec{B};$

    $\Rightarrow \vec{M} = \frac{\vec{G}+\vec{C}}{2} = \vec{C} + \frac{1}{2}\vec{B};$
- $[0S]$: $\vec{X} = 0 + k\overrightarrow{0S}; \quad k \in [0, 1];$
  - $\vec{S} = \frac{\vec{C}+\vec{F}}{2};$

* $\vec{F} = \vec{G} + \vec{A} = \vec{C} + \vec{B} + \vec{A};$

$\Rightarrow \vec{S} = \vec{C} + \frac{\vec{A}+\vec{B}}{2};$

Nun sind die Streckengleichungen bekannt. Gleichsetzen bringt:

$\vec{A} + k_T\left(\vec{C} + \frac{1}{2}\vec{B} - \vec{A}\right) = 0 + l_T\left(\vec{C} + \frac{\vec{A}+\vec{B}}{2}\right);$

Nun erweitere ich unsere Kurzschreibweisendefinition: Wird k_T als Vektor verwendet, steht k_T für $\left(\begin{smallmatrix} k_T \\ k_T \\ k_T \end{smallmatrix}\right)$, wobei die Vektorkomponenten gleich dem originalen, skaleren k_T sind.

Idee: Expandiert man die Vektorgleichung zu einem Gleichungssystem mit drei Gleichungen (je eine für jede Komponente), kommt k_T, als reelle Zahl, in jeder der Teilgleichungen vor.

Laut unserer Kurzschreibweisenvereinbarung ist es damit zulässig, folgende Ersetzung durchzuführen:

Original:
$a = \ldots;$
$b = \ldots;$
$c = \ldots;$

Ersetzung: $\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \\ c \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} \ldots \\ \ldots \\ \ldots \end{smallmatrix}\right);$

Diese Ersetzung führe ich nun auch durch – nur statt a, b und c steht jedesmal k_T.

Dies ermöglicht es mir, $\vec{A}$ von der linken auf die rechte Seite zu bringen, und – wichtiger – durch $\left(\vec{C} + \frac{1}{2}\vec{B} - \vec{A}\right)$ zu teilen!

$$k_T = \frac{l_T\left(\vec{C} + \frac{\vec{A}+\vec{B}}{2}\right) - \vec{A}}{\vec{C} + \frac{1}{2}\vec{B} - \vec{A}};$$

Die Komponenten dieses Ergebnisses müssen nun – sonst bricht unsere Kurzschreibweisenargumentation zusammen – alle den gleichen Wert aufweisen, damit wir ein skalares k_T erhalten.

Also setze ich an: 1. Komponente = 2. Komponente = 3. Komponente;

$$\frac{l_T\left(\vec{C}_1 + \frac{\vec{A}_1+\vec{B}_1}{2}\right) - \vec{A}_1}{\vec{C}_1 + \frac{1}{2}\vec{B}_1 - \vec{A}_1} = \frac{l_T\left(\vec{C}_2 + \frac{\vec{A}_2+\vec{B}_2}{2}\right) - \vec{A}_2}{\vec{C}_2 + \frac{1}{2}\vec{B}_2 - \vec{A}_2} = \frac{l_T\left(\vec{C}_3 + \frac{\vec{A}_3+\vec{B}_3}{2}\right) - \vec{A}_3}{\vec{C}_3 + \frac{1}{2}\vec{B}_3 - \vec{A}_3};$$

Überraschenderweise erhält man für l_T $\frac{2}{3}$ – aber ohne die Komponenten einsetzen zu müssen; l_T ist also unabhängig von $\vec{A}$, $\vec{B}$ und $\vec{C}$!

Mit $0 \leq l_T = \frac{2}{3} \leq 1$ kann auch k_T berechnet werden. Vektoriell ergibt sich für k_T $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, gemäß der obigen Definition ist es also zulässig von k_T nur als $\frac{2}{3}$ zu sprechen.

Mit bekanntem k_T und l_T ist es nun natürlich möglich, die Schnittspunktskoordinaten durch Einsetzen zu berechnen. Es ist nicht wichtig, in welche Gleichung man k_T bzw. l_T einsetzt – die Äquivalenz haben wir ja soeben bewiesen. Man erhält für T:

$T = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$;

(Definition der hier benutzten Vektordivision: $\frac{\vec{a}}{\vec{b}} = \frac{a_1}{b_1}$, falls $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$;) 08.03.2006

4.58 59. Hausaufgabe

4.58.1 Geometrie-Buch Seite 163, Aufgabe 6b

Die Ortsvektoren von $A(6, 0, 3)$, $B(6, 12, 0)$ und $C(-3, 0, 6)$ spannen ein Spat auf.

M ist Kantenmittelpunkt, S ist Mittelpunkt der Deckfläche.

Berechne den Schnittpunkt U von $[CT]$ und $[0D]$.

[$T = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$;]

$\vec{D} = \vec{A} + \vec{B}$;

$[CT]$: $\vec{X} = \vec{C} + k\overrightarrow{CT}$; $\quad k \in [0, 1]$;

$[0D]$: $\vec{X} = 0 + l\vec{D}$; $\quad l \in [0, 1]$;

Gleichsetzen bringt: $l = 1$; $\quad k = 3$;

Da dieser Wert für k nicht in der Definitionsmenge von k liegt, gibt es keinen Schnittpunkt. 09.03.2006

4.58.2 Geometrie-Buch Seite 164, Aufgabe 8

K und L sind Kantenmitten der vierseitigen Pyramide $ABCDE$.

a) Zeige, dass sich CK und DL schneiden, und berechne den Schnittpunkt S.

$A(6, -12, 0)$, $B(6, 0, 0)$, $C(-3, 0, 0)$, $D(-3, -12, 0)$, $E(0, 0, 6)$

$\vec{K} = \frac{\vec{A}+\vec{E}}{2} = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$; $\quad \vec{L} = \frac{\vec{B}+\vec{E}}{2} = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$;

Gleichsetzen und Auflösen bringt $k = v = \frac{2}{3}$;

Einsetzen bringt $S = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -4 \\ \frac{2}{3} \end{smallmatrix}\right)$;

b) Untersuche die Lage von AC und ES. Schnittpunkt T?

Gleichsetzen bringt Widerspruch; es gibt kein Schnittpunkt.

[XXX Falsch: $S(\frac{3}{2}, -6, 0)$;]

c) Untersuche die Lage von DK und CL. Schnittpunkt U?

Gleichsetzen und Auflösen bringt $k = v = 2$;

Einsetzen bringt $U = \left(\begin{smallmatrix} 9 \\ 0 \\ 6 \end{smallmatrix}\right)$;

08.03.2006

4.58.3 Geometrie-Buch Seite 167, Aufgabe 20

$A(1, 2, 2)$, $B(2, -1, 1)$, g_k: $\vec{X} = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) + \lambda \left(\begin{smallmatrix} 2k \\ -9 \\ -3 \end{smallmatrix}\right)$;

a) Beschreibe die Schar g_k.

Die Schar besteht aus unendlich vielen zueinander nicht parallelen geraden, die sich alle im Aufpunkt schneiden.

b) Bestimme k so, dass g_k parallel zu AB ist.

$\left(\begin{smallmatrix} 2k \\ -9 \\ -3 \end{smallmatrix}\right) = k\overrightarrow{AB} = \mu \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$;

$\Rightarrow \mu = 3$;

$\Rightarrow 2k = \mu \cdot 1 = 3$; $\Rightarrow k = \frac{3}{2}$;

c) Für welche Werte von k sind AB und g_k windschief?

windschief $\Leftrightarrow$ nicht parallel und nicht scheidend 09.03.2006

Gleichsetzen bringt Widerspruch $\Leftrightarrow$ schneiden sich niemals in einem Punkt

Also: $k \neq \frac{3}{2}$;

13.03.2006

4.59 60. Hausaufgabe

4.59.1 Geometrie-Buch Seite 167, Aufgabe 19

$g\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$;

$h_a\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2a \\ -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu a \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$;

a) Beschreibe die Schar h_a.

Geradenbüschel durch $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. (Ebene, in der eine Gerade fehlt.)

b) Für welche Werte von a sind g und h_a parallel (identisch)?

$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 \\ 2a \\ -a \end{pmatrix}$;

$\Rightarrow r = 2$;

$\Rightarrow a = \frac{1}{2}$;

c) Für welche Werte von a schneiden sich g und h_a?

Gleichsetzen bringt Widerspruch $\Leftrightarrow$ g und h_a schneiden sich niemals in einem Punkt.

d) Für welche Werte von a sind g und h_a windschief?

Für $a \neq \frac{1}{2}$.

14.03.2006

4.59.2 Geometrie-Buch Seite 168, Aufgabe 23

$j_a\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5-5a \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1-a \\ a-1 \\ 1 \end{pmatrix};$

a) Welche Schargerade geht durch $P(-45, 0, 5)$?

Gleichsetzen von $\vec{P}$ mit $\vec{X}$ bringt $\mu = 5$ und $a = 10$.

b) Welche Schargeraden sind parallel zu $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$?

$a = 2$ und XXX

c) Gestimme den geometrischen Ort der Punkte, die zum Parameterwert $\mu = 2$ gehören.

$g\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5-5a \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1-a \\ a-1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix};$

d) Bestimme den geometrischen Ort der Spurpunkte in der x_1-x_3-Ebene.

$\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5-5a \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1-a \\ a-1 \\ 1 \end{pmatrix};$

Auflösen bringt für μ: $\mu = \frac{5a-5}{a-1} = 5$ für $a \neq 1$;

Mit $x_3 = \mu$ und $x_1 = x_3 - ax_3$ ergibt sich für den geometrischen Ort der Spurpunkte:

$h\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 5-5a \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad a \in \mathbb{R} \cup \{1\};$

Zusätzlich ergibt sich für $a = 1$ noch: $\vec{X} = \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; Auf dieser Geraden liegen auch noch Spurpunkte.

e) Zeige, dass je zwei Schargeraden windschief sind.

$a_1 \neq a_2$;

Ausschlus der Parallelität: $\begin{pmatrix} 1-a_1 \\ a_1-1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq r \begin{pmatrix} 1-a_2 \\ a_2-1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\rightarrow$ Widerspruch ($a_1 = a_2$)

Ausschlus eines gemeinsamen Schnittpunkts: Gleichsetzen bringt $\mu_1 = \mu_2$ und damit $a_1 = a_2$; Widerspruch.

14.03.2006

4.60 61. Hausaufgabe

4.60.1 Geometrie-Buch Seite 175, Aufgabe 5

Gib eine Parametergleichung der Ebene an, die festgelegt ist durch

a) $U(1,0,-1)$, $V(0,0,0)$, $W(-2,-4,1)$.

$E\colon \vec{X} = \vec{U} + \alpha\overrightarrow{UV} + \beta\overrightarrow{UW};$

b) $P(1,2,-1)$, $g\colon \vec{X} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$.

$E\colon \vec{X} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} + \beta\left[\vec{P} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right];$

c) $g\colon \vec{X} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$, $h\colon \vec{X} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$.

$E\colon \vec{X} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix};$

d) $g\colon \vec{X} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$, $h\colon \vec{X} = \begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-2\\2\\-1\end{pmatrix}$. ($g$ echt parallel zu h.)

$E\colon \vec{X} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} + \beta\left[\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right];$

15.03.2006

4.61 62. Hausaufgabe

4.61.1 Geometrie-Buch Seite 176, Aufgabe 11

Führe die Parametergleichungen über in Koordinatengleichungen:

a) $\vec{X} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}0\\6\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix};$

Auflösen bringt: $\frac{3}{2}x_1 + x_2 - 6x_3 - 1 = 0;$

b) $\vec{X} = \begin{pmatrix}-1\\4\\2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix};$

Auflösen bringt: $\frac{6}{5}x_1 - \frac{9}{5}x_2 - x_3 + \frac{52}{5} = 0;$

18.03.2006

4.62 63. Hausaufgabe

4.62.1 Geometrie-Buch Seite 22, Aufgabe 1a

Löse das Gleichungssystem:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 10x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 2; \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 3; \\ 4x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & = & 5; \end{array}\right\} \Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3) = (1, -2, 3);$$

4.62.2 Geometrie-Buch Seite 176, Aufgabe 13

Bestimme den Parameter so, dass $P(1, 2, -5)$ in der Ebene liegt.

a) $E\colon x_1 - 2x_2 + x_3 - a = 0;$

$\Leftrightarrow a = P_1 - 2P_2 + P_3 = 1 - 4 - 5 = -8;$

b) $F\colon ax_1 + x_2 = 0;$

$\Leftrightarrow a = -\frac{P_2}{P_1} = -2;$

c) $G\colon 2x_1 - 3x_2 + ax_3 = 2a;$

$\Leftrightarrow a = \frac{-2P_1+3P_2}{P_3-2} = -\frac{4}{7};$

4.62.3 Geometrie-Buch Seite 176, Aufgabe 14

Gib Koordinatengleichungen der Koordinatenebenen an.

$x_1 = 0;$ (x_2-x_3-Ebene)

$x_2 = 0;$ (x_1-x_3-Ebene)

$x_3 = 0;$ (x_1-x_2-Ebene)

4.62.4 Geometrie-Buch Seite 178, Aufgabe 24

$g_a\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} a-1 \\ 2a+2 \\ -a \end{pmatrix}; \quad \mu, a \in \mathbb{R};$

a) Zeige, dass alle Geraden der Schar in einer Ebene F liegen.

b) Gib eine Parameter- und Koordinatengleichung dieser Ebene F an.

c) Welche Ebenenpunkte kommen in der Geradenschar nicht vor?

$g_a\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} a-1 \\ 2a+2 \\ -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \mu, a \in \mathbb{R};$

μ und a können beliebig aus $\mathbb{R}$ gewählt werden; ist allerdings μ 0, so ist μa auch 0. Es ist also nicht möglich, den ersten Richtungsvektoren zu streichen und zugleich den zweiten zu behalten.

In einer Ebene darf aber keine Gerade fehlen; daher ersetzen wir μa mit ν, wobei ν, wenn a 0 ist, nicht auch notwendigerweise 0 sein muss.
$F\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \mu, \nu \in \mathbb{R};$

Auflösen nach μ und ν und Einsetzen bringt als Koordinatengleichung:

$F\colon x_1 + \frac{1}{2}x_2 - 2 = 0; \quad x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R};$

Die fehlenden Punkte sind die Ebenenpunkte, für die μ zwar 0 ist, ν jedoch nicht, mit Ausnahme des Aufpunkts.

$h\colon \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \nu \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$ 20.03.2006

4.63 64. Hausaufgabe

4.63.1 Geometrie-Buch Seite 22, Aufgabe 1e

Löse das Gleichungssystem:

$$\left.\begin{array}{rrr|l} 2 & -3 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & -8 & -5 & 5 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{rrr|l} 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & -8 & -5 & 5 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{rrr|l} 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{7}{2} & -1 \\ 3 & -8 & -5 & 5 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{rrr|l} 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{7}{2} & -1 \\ 0 & -\frac{7}{2} & -\frac{7}{2} & -\frac{7}{2} \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{rrr|l} 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{7}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{7}{2} \end{array}\right.$$

Widerspruch; also keine Lösungen

4.63.2 Geometrie-Buch Seite 33, Aufgabe 1

Löse die Gleichungssysteme mit dem Gauß-Verfahren:

$$\left.\begin{array}{rrr|l} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \\ -1 & -1 & 4 & 9 \end{array}\right.$$

b)

$$\left.\begin{array}{rrr|l} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 11 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{rrr|l} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & -\frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array}\right.$$

$x_3 = 3;$

$x_2 = -\frac{11}{2} + \frac{5}{2}x_3 = 2;$

$x_1 = x_3 - x_2 = 1;$

$$\begin{array}{rrr|l} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \end{array}$$

d)

$$\begin{array}{rrr|l} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 7 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|l} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{3} & 0 \end{array}$$

$x_3 = x_2 = x_1 = 0;$

e)

$$\begin{array}{rrr|l} 2 & -3 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & -8 & -5 & 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|l} 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 7 & 7 & 0 \\ 0 & -\frac{7}{2} & -\frac{7}{2} & -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|l} 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{7}{2} & -\frac{7}{2} & -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|l} 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{2}{7} \end{array}$$

Widerspruch; also keine Lösungen

f)

$$\begin{array}{rrr|l} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 4 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|l} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|l} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}$$

$x_2 = 3x_3;$

$x_1 = 2x_3 + x_2 = 2x_3 + 3x_3 = 5x_3;$ 21.03.2006

$L = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 = 5k \wedge x_2 = 3k \wedge x_3 = k; k \in \mathbb{R}\};$

$\vec{X} = k \left(\begin{smallmatrix}5\\3\\1\end{smallmatrix}\right); \quad k \in \mathbb{R};$

22.03.2006

4.64 65. Hausaufgabe

4.64.1 Geometrie-Buch Seite 40, Aufgabe 7

Berechne und vereinfache.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1+a & 0 \\ 1 & 1 & 1+b \end{vmatrix} = (1+b) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+a \end{vmatrix} = (1+b)(1+a-1) = a + ab;$

b) $\begin{vmatrix} 1 & a & -b \\ -a & 1 & c \\ b & -c & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & c \\ -c & 1 \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} a & -b \\ -c & 1 \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} a & -b \\ 1 & c \end{vmatrix} =$
$1 + c^2 + a^2 - abc + abc + b^2 = 1 + a^2 + b^2 + c^2;$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & c \\ b^2 & c^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & c \\ a^2 & c^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix} =$
$bc^2 - b^2c - ac^2 + a^2c + ab^2 - a^2b = a^2(c-b) + b^2(a-c) + c^2(b-a);$

d) $\begin{vmatrix} a & b & a+b \\ b & a+b & a \\ a+b & a & b \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a+b & a \\ a & b \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} b & a+b \\ a & b \end{vmatrix} + (a+b) \begin{vmatrix} b & a+b \\ a+b & a \end{vmatrix} =$
$a(ab + b^2 - a^2) - b(b^2 - a^2 - ab) + (a+b)(ab - a^2 - 2ab - b^2) = -2a^3 - 2b^3;$

e) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha\tan\beta & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha\tan\beta & \sin\alpha \\ 0 & -1 & \tan\beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix} + \tan\beta \begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha\tan\beta \\ -\cos\alpha & \sin\alpha\tan\beta \end{vmatrix} =$
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \tan^2\beta\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right) = 1 + \tan^2\beta;$

4.64.2 Geometrie-Buch Seite 40, Aufgabe 9

Löse die Gleichungssysteme mit der Cramer-Regel.

a)
$$\begin{array}{lclclcl} 2x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & = & 1; \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & = & 1; \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 1; \end{array}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -19 + 8 + 12 = 1 \neq 0;$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{D} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 7 + 3 - 19 = -9;$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{D} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 - 1 + 8 = 4;$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{D} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2 - 1 + 6 = 3;$$

$$(x_1, x_2, x_3) = (-9, 4, 3);$$

b)
$$\begin{array}{lclclcl} 3x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & = & 1; \\ 2x_1 & + & -x_2 & + & -x_3 & = & -2; \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & -1; \end{array}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -2 - 3 + 4 = -1 \neq 0;$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{D} = -\left(2\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}\right) = -(2 - 5 + 8) = -5;$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{D} = -\left(\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \right) =$$
$$-(5 - 9 - 16) = 20;$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{D} = -\left(\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right) = -(7 + 8 + 13) =$$
$$-28;$$

$(x_1, x_2, x_3) = (-5, 20, -28);$

24.03.2006

4.65 66. Hausaufgabe

4.65.1 Geometrie-Buch Seite 190, Aufgabe 2

Gegeben sind die Ebenen und Geraden:

$E\colon x_1 - 2x_2 + x_3 - 1 = 0; \quad F\colon 2x_1 - x_2 - x_3 - 8 = 0;$

Bestimme von jeder Gerade ihre Lage zu E und F.

Berechne gegebenenfalls den Schnittpunkt.

Umrechnung der Koordinatengleichungen von E und F in Parametergleichungen:

$E\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad F\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix};$

a) $a\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix};$

- $D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 3;$

  $D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -3;$

  $\alpha = \frac{D_3}{D} = -1; \Leftrightarrow a \cap E = \{S\}$ mit $\vec{S} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix};$

- $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 9;$

  $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 12 \\ 0 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -18;$

  $\alpha = \frac{D_3}{D} = -2; \Leftrightarrow a \cap F = \{S\}$ mit $\vec{S} = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{smallmatrix}\right);$

b) $b\colon \vec{X} = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + \beta \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right);$

- $D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3;$

  $D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3;$

  $\beta = \frac{D_3}{D} = 1; \Leftrightarrow b \cap E = \{S\}$ mit $\vec{S} = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right);$

- $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0;$

  Verbindungsvektor der Aufpunkte: $\vec{d} = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 7 \\ 0 \end{smallmatrix}\right);$

  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0; \Leftrightarrow b \cap F = \emptyset;$

c) $c\colon \vec{X} = \gamma \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right);$

- $D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0;$

  Verbindungsvektor der Aufpunkte: $\vec{d} = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right);$

  $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0; \Leftrightarrow c \cap E = \emptyset;$

- $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0;$

  Verbindungsvektor der Aufpunkte: $\vec{d} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{smallmatrix}\right);$

  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & 8 \end{vmatrix} = -16 \neq 0; \Leftrightarrow c \cap F = \varnothing;$

d) $d\colon \vec{X} = \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + \delta \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right);$

- $D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0;$

  Verbindungsvektor der Aufpunkte: $\vec{d} = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right);$

  $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0; \Leftrightarrow d \cap E = d;$

- $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0;$

  Verbindungsvektor der Aufpunkte: $\vec{d} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 10 \\ 1 \end{smallmatrix}\right);$

  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 10 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -9 \neq 0; \Leftrightarrow d \cap F = \varnothing;$

e) $e\colon \vec{X} = \left(\begin{smallmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + \varepsilon \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right);$

- $D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0;$

  Verbindungsvektor der Aufpunkte: $\vec{d} = \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right);$

  $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0; \Leftrightarrow e \cap E = e;$

- $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0;$

  Verbindungsvektor der Aufpunkte: $\vec{d} = \left(\begin{smallmatrix} 5 \\ 10 \\ 0 \end{smallmatrix}\right);$

  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 10 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0; \Leftrightarrow e \cap F = e = E \cap F;$

f) $f\colon \vec{X} = \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + \varphi \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right);$

- $D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -3;$

  $D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3;$

  $\varphi = \frac{D_3}{D} - 1; \Leftrightarrow f \cap E = \{S\}$ mit $\vec{S} = \left(\begin{smallmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right);$

- $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0;$

  Verbindungsvektor der Aufpunkte: $\vec{d} = \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 8 \\ 0 \end{smallmatrix}\right);$

  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0; \Leftrightarrow f \cap F = f;$

28.03.2006

4.65.2 Geometrie-Buch Seite 190, Aufgabe 5

Die Würfelecken A, C, F und H sind die Ecken eines regelmäßigen Tetraeders. (Siehe Aufgabe 17 auf Seite 177.)

a) In welchem Punkt schneidet die Raumdiagonale HB die Ebene ACF?

$A(-4,-4,0);\quad B(0,-4,0);\quad C(0,0,0);\quad F(0,-4,4);\quad E(-4,-4,4);\quad H(-4,0,4);\quad G(0$

$HB\colon \vec{X} = \vec{H} + \alpha\overrightarrow{HB};$

$ACF\colon \vec{X} = \vec{C} + \lambda\overrightarrow{CA} + \mu\overrightarrow{CF};$

$\lambda\overrightarrow{CA} + \mu\overrightarrow{CF} - \alpha\overrightarrow{HB} = \vec{H} - \vec{C};$

$D = \begin{vmatrix} -4 & 0 & -4 \\ -4 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 192 \neq 0;$

$D_3 = \begin{vmatrix} -4 & 0 & -4 \\ -4 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 128; \Leftrightarrow \alpha = \frac{D_3}{D} = \frac{2}{3};$

$\Leftrightarrow HB \cap ACF = \{S\}$ mit $\vec{S} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ -\frac{8}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix};$

b) In welchen Punkten schneidet die Gerade durch die Kantenmitten von $[GC]$ und $[AE]$ das Tetraeder?

[XXX]

28.03.2006

4.66 67. Hausaufgabe

4.66.1 Geometrie-Buch Seite 191, Aufgabe 6

$A(2,-1,0);\quad g\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix};\quad h\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix};$

Stelle eine Gleichung der Gerade k auf, die durch A geht und g und h schneidet. Berechne die Schnittpunkte.

$k\colon \vec{X} = \vec{A} + \beta\vec{w};$

- Gleichsetzen von $\vec{X}_k$ mit $\vec{X}_g$ und $\vec{X}_h$ bringt:

  $$\begin{array}{lrcl} \text{I.} & A_1 + \beta_g w_1 & = & G_1 + \lambda g_1; \\ \text{II.} & A_2 + \beta_g w_2 & = & G_2 + \lambda g_2; \\ \text{III.} & A_3 + \beta_g w_3 & = & G_3 + \lambda g_3; \\ \text{IV.} & A_1 + \beta_h w_1 & = & H_1 + \mu h_1; \\ \text{V.} & A_2 + \beta_h w_2 & = & H_2 + \mu h_2; \\ \text{VI.} & A_3 + \beta_h w_3 & = & H_3 + \mu h_3; \end{array}$$

- Elimination von λ (I.):

  $\lambda = \dfrac{A_1 - G_1 + \beta_g w_1}{g_1};$

- Elimination von β_g (II.):

  $A_2 + \beta_g w_2 = G_2 + \lambda g_2 = G_2 + \frac{g_2}{g_1}\left(A_1 - G_1 + \beta_g w_1\right);$

  $$\Leftrightarrow \beta_g = \frac{\overbrace{G_2 - A_2 + \frac{g_2}{g_1}A_1 - \frac{g_2}{g_1}G_1}^{o}}{w_2 - \frac{g_2}{g_1}w_1};$$

- Elimination von w_3 (III.):

  $$w_3 = \frac{\left(w_2 - \frac{g_2}{g_1}w_1\right)\left(G_3 - A_3 + \lambda g_3\right)}{\underbrace{G_2 - A_2 + \frac{g_2}{g_1}A_1 - \frac{g_2}{g_1}G_1}_{k}};$$

- Elimination von μ (IV.):

  $$\mu = \frac{A_1 - H_1 + \beta_h w_1}{h_1};$$

- Elimination von w_2 (V.):

  $$w_2 = \frac{H_2 - A_2 + \mu h_2}{\beta_h} = \frac{\overbrace{H_2 - A_2 + \frac{h_2}{h_1}A_1 - \frac{h_2}{h_1}H1}^{l} + \frac{h_2}{h_1}\beta_h w_1}{\beta_h};$$

- Elimination von β_h (VI.):

  $$A_3 + \beta_h w_3 = \underbrace{H_3 + \frac{h_3}{h_1}A_1 - \frac{h_3}{h_1}H_1}_{m} + \frac{h_3}{h_1}\beta_h w_1;$$

  $$A_3 + \frac{\beta_h\left(w_2 - \frac{g_2}{g_1}w_1\right)\left(\overbrace{G_3 + \frac{g_3}{g_1}A_1 - \frac{g_3}{g_1}G_1 - A_3}^{n} + \frac{g_3}{g_1}\beta_g w_1\right)}{k} = m + \frac{h_3}{h_1}\beta_h w_1;$$

  [. . .]

  $p := \frac{h_2}{h_1} - \frac{g_2}{g_1};$

  $A_3 l + A_3\beta_h p + \frac{l^2}{k}n + \frac{l}{k}n\beta_h p + \frac{g_2}{g_1}\frac{l}{k}w_1 o + \beta_h\frac{w_1}{k}pn + \beta_h\frac{w_1}{k}p\frac{g_2}{g_1}w_1 o = lm + \beta_h pm + \frac{h_3}{h_1}\beta_h + w_1 l + \frac{h_3}{h_1}\beta_h^2 w_1 p;$

- Auflösen nach β_h:

  $$\beta_h = \frac{5w_1^2 + 36w_1 - 57 \pm \sqrt{25w_1^4 + 360w_1^3 - 274w_1^2 + 7296w_1 + 3249}}{50w_1};$$

- Speziell für $w_1 = 0$:
  $(\beta_g, \beta_h, \lambda, \mu, w_1, w_2, w_3) = \left(\frac{10}{3}, 2, 2, \frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2}, \frac{21}{10}\right)$;
  $k \cap g = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$; $\quad k \cap h = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \right\}$;

4.66.2 Geometrie-Buch Seite 191, Aufgabe 7

$E\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\quad g_a\colon \vec{X} = \sigma \begin{pmatrix} 1+a \\ 1-a \\ 1 \end{pmatrix}$;

Welche Schargerade ist parallel zu E? Ist sie echt parallel?

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1-a \\ 1 & -1 & -1+a \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 2 - 6a = 0; \Leftrightarrow a = \frac{1}{3};$

Verbindungsvektor der Aufpunkte: $\vec{d} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$;

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -5; \Leftrightarrow g_{\frac{1}{3}} \cap E = \varnothing;$ 29.03.2006

4.67 68. Hausaufgabe

4.67.1 Geometrie-Buch Seite 197, Aufgabe 6

Beschreibe die Lage von E und F und stelle gegebenenfalls eine Gleichung der Schnittgerade s auf.

a) $E\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\quad F\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$;

Überprüfung der Komplanarität der vier Richtungsvektoren:

- $\begin{vmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -12 - 8 + 20 = 0;$
- $\begin{vmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -60 - 20 + 80 = 0;$

Verbindungsvektor der Aufpunkte: $\vec{d} = \left(\begin{smallmatrix}-1\\6\\5\end{smallmatrix}\right)$;

Überprüfung der Komplanarität des Verbindungsvektors mit den Richtungsvektoren:

$\begin{vmatrix}-2 & 4 & -1\\3 & 4 & 6\\3 & -1 & -5\end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix}4 & -1\\4 & 6\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}-2 & -1\\3 & 6\end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix}-2 & 4\\3 & 4\end{vmatrix} = 3\cdot 28 - 9 - 100 = -25$; $\Leftrightarrow E \cap F = \varnothing$;

b) $E\colon \vec{X} = \left(\begin{smallmatrix}2\\0\\6\end{smallmatrix}\right) + \lambda\left(\begin{smallmatrix}-1\\1\\1\end{smallmatrix}\right) + \mu\left(\begin{smallmatrix}2\\-4\\1\end{smallmatrix}\right)$; $\quad F\colon \vec{X} = \left(\begin{smallmatrix}3\\-3\\8\end{smallmatrix}\right) + \sigma\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\-4\end{smallmatrix}\right) + \tau\left(\begin{smallmatrix}1\\-3\\2\end{smallmatrix}\right)$;

Überprüfung der Komplanarität der vier Richtungsvektoren:

- $\begin{vmatrix}-1 & 2 & 1\\1 & -4 & 1\\1 & 1 & -4\end{vmatrix} = 0$;
- $\begin{vmatrix}-1 & 2 & 1\\1 & -4 & -3\\1 & 1 & 2\end{vmatrix} = 0$;

Verbindungsvektor der Aufpunkte: $\vec{d} = \left(\begin{smallmatrix}-1\\-3\\2\end{smallmatrix}\right)$;

Überprüfung der Komplanarität des Verbindungsvektors mit den Richtungsvektoren:

$\begin{vmatrix}-1 & 2 & 1\\1 & -4 & -3\\1 & 1 & 2\end{vmatrix} = 0$; $\Leftrightarrow E \cap F = E = F$;

31.03.2006

4.68 69. Hausaufgabe

4.68.1 Geometrie-Buch Seite 196, Aufgabe 4

Beschreibe die Lage von E und F und stelle gegebenenfalls eine Gleichung der Schnittgerade s auf.

a) $E\colon 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 4 = 0$; $\quad F\colon \vec{X} = \left(\begin{smallmatrix}1\\2\\2\end{smallmatrix}\right) + \lambda\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\right) + \mu\left(\begin{smallmatrix}2\\1\\0\end{smallmatrix}\right)$;

Einsetzen von x_1, x_2, x_3 aus der Gleichung von F in E bringt:

$2 + 2\lambda + 4\lambda - 2 - \mu + 4 + 2\lambda - 4 = 4\lambda + 3\mu = 0$; $\Leftrightarrow \lambda = -\frac{3}{4}\mu$;

$E \cap F = s$ mit $s\colon \vec{X} = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} - \frac{3}{4}\mu\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}\frac{5}{4}\\1\\-\frac{3}{4}\end{pmatrix};$

b) $E\colon x_1 + x_2 + 3x_3 - 6 = 0; \quad F\colon \vec{X} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix};$

Einsetzen von x_1, x_2, x_3 aus der Gleichung von F in E bringt:

$1 + 3\lambda + \mu + 1 - 3\mu - 3\lambda + 3\mu - 6 = -4 + \mu = 0; \Leftrightarrow \mu = 4;$

$E \cap F = s$ mit $s\colon \vec{X} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-11\\4\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix};$

4.68.2 Geometrie-Buch Seite 197, Aufgabe 6c

Beschreibe die Lage von E und F und stelle gegebenenfalls eine Gleichung der Schnittgerade s auf.

$E\colon \vec{X} = \begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}; \quad F\colon \vec{X} = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix};$

$\lambda\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix};$

$$D = \begin{vmatrix}-3 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix} = 0 - 2 - 2 = -4;$$

$$D_1 = \begin{vmatrix}-2\tau & 1 & 1\\ \tau - 1 & -1 & -1\\ 3\tau & 1 & -1\end{vmatrix} = -2\tau - 2; \Leftrightarrow \lambda = \frac{D_1}{D} = \frac{\tau}{2} + \frac{1}{2};$$

$$D_2 = \begin{vmatrix}-3 & -2\tau & 1\\ 1 & \tau - 1 & -1\\ 1 & 3\tau & -1\end{vmatrix} = -4\tau - 2; \Leftrightarrow \mu = \frac{D_2}{D} = \tau + \frac{1}{2};$$

$E \cap F = s$ mit $s\colon \vec{X} = \begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\tau\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix} +$
$\tau\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\\frac{3}{2}\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix} + \tau'\begin{pmatrix}-1\\-1\\3\end{pmatrix};$ 03.04.2006

4.69 70. Hausaufgabe

4.69.1 Geometrie-Buch Seite 196, Aufgabe 2

Bestimme eine Gleichung der Schnittgerade von E und F:

a) $E\colon x_1 + x_2 = 0 = x_1 - x_3; \quad F\colon x_2 + x_3 = 0; \Leftrightarrow x_2 = -x_3;$

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} k \\ -k \\ k \end{pmatrix};$$

b) $E\colon x_1 = 0; \quad F\colon 2x_2 + x_3 = 1; \Leftrightarrow x_3 = 1 - 2x_2;$

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 1-2k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix};$$

c) $E\colon x_1 + x_2 + x_3 = 1 = 1 - x_2 + x_2 + x_3 = 1 + x_3; \quad F\colon x_1 + x_2 = 1; \Leftrightarrow x_1 = 1 - x_2;$

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} 1-k \\ k \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

d) $E\colon x_1 = x_2; \quad F\colon x_2 = x_3;$

$$\vec{X} = k\vec{1};$$

e) $E\colon x_1 = x_2; \quad F\colon x_1 = x_3;$

$$\vec{X} = k\vec{1};$$

f) $E\colon x_1 = 1; \quad F\colon x_2 = 2;$

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

4.69.2 Geometrie-Buch Seite 196, Aufgabe 3

$E\colon x_1 + x_2 + x_3 = 0; \quad F\colon 2x_1 + x_2 + x_3 + 4 = 0;$

Wähle der Reihe nach x_1, x_2 und x_3 als Parameter und versuche, jeweils eine Gleichung der Schnittgerade zu bestimmen.

x_1 als Parameter ist nicht möglich, da x_1 konstant -4 ist.

$$\vec{X}_{x_2} = \begin{pmatrix} -4 \\ k \\ 4-k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix};$$

$$\vec{X}_{x_3} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4-k \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix};$$ 25.04.2006

4.70 71. Hausaufgabe

4.70.1 Geometrie-Buch Seite 93, Aufgabe 1

$A(2, 0, -1)$, $B(8, -3, 11)$. S und T teilen $[AB]$ in drei gleiche Teile. Berechne S und T.

$\vec{S} = \vec{A} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$;

$\vec{T} = \vec{A} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$;

(Def.: $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} ka \\ kb \\ kc \end{pmatrix} := \frac{1}{k}$;)

S teilt $[AB]$ im Verhältnis $\lambda_1 = \frac{\overrightarrow{AS}}{\overrightarrow{SB}} = \frac{1}{2}$;

T teilt $[AB]$ im Verhältnis $\lambda_2 = \frac{\overrightarrow{AT}}{\overrightarrow{TB}} = 2$;

4.70.2 Geometrie-Buch Seite 94, Aufgabe 9

$P(0, \frac{3}{2}, 4)$; $Q(3, 0, 4)$;

Berechne die Punkte S und T, die $[PQ]$ harmonisch im Verhältnis $|\sigma| = 2$ teilen.

$\vec{S} - \vec{P} = \overrightarrow{PS} = 2\overrightarrow{SQ} = 2\vec{Q} - 2\vec{S}; \Leftrightarrow 3\vec{S} = 2\vec{Q} + \vec{P}; \Leftrightarrow \vec{S} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \\ 4 \end{pmatrix}$;

$\vec{T} - \vec{P} = \overrightarrow{PT} = -2\overrightarrow{TQ} = -2\vec{Q} + 2\vec{T}; \Leftrightarrow -\vec{T} = -2\vec{Q} + \vec{P}; \Leftrightarrow \vec{T} = 2\vec{Q} - \vec{P} = \begin{pmatrix} 6 \\ -\frac{3}{2} \\ 4 \end{pmatrix}$;

4.70.3 Geometrie-Buch Seite 94, Aufgabe 10

$A(2, 10, 5)$, $B(23, -4, 33)$, $S(11, 4, 17)$

a) S und T teilen $[AB]$ harmonisch. Berechne T.

$\overrightarrow{AS} = \sigma\overrightarrow{SB}; \Leftrightarrow \sigma = \frac{\overrightarrow{AS}}{\overrightarrow{SB}}$;

$\overrightarrow{AT} = -\sigma\overrightarrow{TB} = -\frac{\overrightarrow{AS}}{\overrightarrow{SB}}\overrightarrow{TB}$;

$\vec{T}\left(1 - \frac{\overrightarrow{AS}}{\overrightarrow{SB}}\overrightarrow{TB}\right) = \vec{A} - \vec{B}\frac{\overrightarrow{AS}}{\overrightarrow{SB}}\overrightarrow{TB}; \Leftrightarrow \vec{T} = \begin{pmatrix} -61 \\ 52 \\ -79 \end{pmatrix}$;

b) A und B teilen $[ST]$ im Verhältnis α und β. Berechne α und β.

$\alpha = \frac{\overrightarrow{SA}}{\overrightarrow{AT}} = \frac{1}{7}$;

$\beta = \frac{\overrightarrow{SB}}{\overrightarrow{BS}} = -\frac{1}{7}$;

26.04.2006

4.71 72. Hausaufgabe

4.71.1 Geometrie-Buch Seite 94, Aufgabe 11

$A(-4, 12, -9)$, $B(14, 3, 6)$. $C(c_1, 6, c_3)$ liegt auf der Gerade AB.

Bestimmte das Teilverhältnis γ, in dem C die Strecke $[AB]$ teilt.

Berechne den vierten harmonischen Punkt D von A, B und C.

$\overrightarrow{AC} = \gamma \overrightarrow{CB}; \Leftrightarrow \gamma = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = 2;$

$\vec{D} - \vec{A} = \overrightarrow{AD} = -2\overrightarrow{DB} = -2\vec{B} + 2\vec{D}; \Leftrightarrow \vec{D} = 2\vec{B} - \vec{A} = \left(\begin{smallmatrix} 32 \\ -6 \\ 21 \end{smallmatrix}\right);$

4.71.2 Geometrie-Buch Seite 94, Aufgabe 12

Zeige: $A(1, 2, 1)$, $B(6, 2, -4)$, $C(4, 2, -2)$ und $D(16, 2, -14)$ sind harmonische Punkte.

$\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{CB}; \Leftrightarrow \lambda = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = \frac{3}{2};$

$\vec{D} - \vec{A} = \overrightarrow{AD} = -\lambda\overrightarrow{DB} = -\lambda\vec{B} + \lambda\vec{D}; \Leftrightarrow \vec{D} = \frac{-\lambda\vec{B} + \vec{A}}{1-\lambda} = \left(\begin{smallmatrix} 16 \\ 2 \\ -14 \end{smallmatrix}\right); \rightarrow$ stimmt 01.05.2006

4.72 73. Hausaufgabe

4.72.1 Geometrie-Buch Seite 98, Aufgabe 2

a) Ein Kreis um $(-2, 5)$ geht durch $A(-5, 2)$.

Berechne den Endpunkt E des Kreisdurchmessers $[AE]$.

$\vec{M} = \frac{\vec{A} + \vec{E}}{2}; \Leftrightarrow \vec{E} = 2\vec{M} - \vec{A} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 8 \end{smallmatrix}\right);$

b) Eine Kugel um $(1, 2, 3)$ geht durch den Ursprung.

Berechne den Endpunkt E des Kugeldurchmessers $[0E]$.

$\vec{M} = \frac{\vec{A} + \vec{E}}{2}; \Leftrightarrow \vec{E} = 2\vec{M} - \vec{A} = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{smallmatrix}\right);$

4.72.2 Geometrie-Buch Seite 98, Aufgabe 3

Berechne den Schwerpunkt des Dreiecks

a) $A(2,1,3)$, $B(3,5,0)$, $C(4,-4,9)$.

$$\vec{S} = \frac{1}{3}\left(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{2}{3} \\ 4 \end{pmatrix};$$

b) $R(2,1)$, $S(3,-2)$, $T(-2,4)$.

$$\vec{P} = \frac{1}{3}\left(\vec{R} + \vec{S} + \vec{T}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

4.72.3 Geometrie-Buch Seite 98, Aufgabe 5

a) Im Dreieck ABC mit Schwerpunkt S ist $A(1,1,2)$, $B(3,2,4)$ und $S(0,1,3)$. Berechne C.

$$\vec{S} = \frac{1}{3}\left(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}\right); \Leftrightarrow \vec{C} = 3\vec{S} - \vec{A} - \vec{B} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix};$$

b) Im Tetraeder $ABCD$ mit Schwerpunkt S ist $A(2,1,1)$, $B(3,0,1)$, $C(2,-1,0)$ und $S(2,2,1)$. Berechne D.

$$\vec{S} = \frac{1}{4}\left(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D}\right); \Leftrightarrow \vec{D} = 4\vec{S} - \vec{A} - \vec{B} - \vec{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix};$$

02.05.2006

4.73 74. Hausaufgabe

4.73.1 Geometrie-Buch Seite 129, Aufgabe 3

Warum ist die Menge aller Polynome von genau zweitem Grad (Koeffizient $a_2 \neq 0$) kein Vektorraum mit den Verknüpfungen vom [Vektorraum aller Polynome dritten Grades]?

Weil es keinen Nullvektor gibt ($0x^2 + 0x + 0$ wegen der Bedingung $a_2 \neq 0$ ausgeschlossen).

4.73.2 Geometrie-Buch Seite 129, Aufgabe 6

Sind folgende Mengen von Tripeln Vektorräume mit den Verknüpfungen vom [dreidimensionalen arithmetischen Vektorraum]?

a) $M = \{(a,b,c) | a = 2b \wedge a,b,c \in \mathbb{R}\}$;

Ja.

b) $M = \{(a, b, c)|a \leq b \leq c \wedge a, b, c \in \mathbb{R}\}$;

Nein: $(1, 2, 3)$ hat kein Inverses ($(-1, -2, -3) \notin M$).

c) $M = \{(a, b, c)|ab = 0 \wedge a, b, c \in \mathbb{R}\}$;

Nein: $(a, 0, c) + (0, \beta, \gamma) = (a, \beta, c + \gamma) \notin M$; ($a\beta$ nicht allgemein 0)

d) $M = \{(a, b, c)|a = b = c \wedge a, b, c \in \mathbb{R}\}$;

Ja, M ist isomorph zu $\mathbb{R}^1$.

e) $M = \{(a, b, c)|a = b^2 \wedge a, b, c \in \mathbb{R}\}$;

Nein.

$-(b^2, b, c) = (-b^2, -b, -c) \notin M$; ($(-b)^2 = b^2 \neq -b^2$)

f) $M = \{(a, b, c)|k_1 a + k_2 b + k_3 c = 0 \wedge a, b, c \in \mathbb{R}\}$; k_i seien feste reelle Zahlen.

Ja, da $k_i = 0$ möglich, ist $M = \mathbb{R}^3$ und bildet damit mit den üblichen Verknüpfungen einen Vektorraum.

4.73.3 Geometrie-Buch Seite 130, Aufgabe 7

M sei die Menge alle Paare reeller Zahlen.

Zeige: M ist kein Vektorraum über $\mathbb{R}$, wenn die Verknüpfungen $(+)$ und $(\cdot)$ so definiert werden:

a) $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$; $\quad \mu \cdot (a, b) = (\mu a, b)$;

Nein: $(0, 0) = 0 \cdot (a, b) \neq (-1 + 1) \cdot (a, b) = (-1) \cdot (a, b) + (a, b) = (-a, b) + (a, b) = (0, 2b)$; (Verletzung des Distributivgesetzes für Skalare)

b) $(a, b) + (c, d) = (a, b)$; $\quad \mu \cdot (a, b) = (\mu a, \mu b)$;

Nein: $a + b = a \neq b = b + a$ (Verletzung des Kommutativgesetzes)

c) $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$; $\quad \mu \cdot (a, b) = (\mu^2 a, \mu^2 b)$;

Nein: $(-1) \cdot (a, b) = (a, b) = 1 \cdot (a, b)$; (Mehrere neutrale Elemente)

03.05.2006

4.74 75. Hausaufgabe

4.74.1 Geometrie-Buch Seite 113, Aufgabe 13a

$\vec{a}$ und $\vec{b}$ seien linear unabhängig.

Untersuche $\vec{u}$ und $\vec{v}$ auf lineare Abhängigkeit:

$\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}; \quad \vec{v} = \vec{a} - \vec{b};$

$\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b} + \mu\vec{a} - \mu\vec{b} = \vec{a}\,(\lambda + \mu) + \vec{b}\,(\lambda - \mu) = 0;$

$\lambda + \mu = \lambda - \mu = 0; \Leftrightarrow (\lambda, \mu) = (0, 0);$

Also: $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind linear unabhängig.

4.74.2 Geometrie-Buch Seite 113, Aufgabe 14

$\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ seien linear unabhängig.

Untersuche $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ auf linear Abhängigkeit:

a) $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}; \quad \vec{v} = \vec{b} + \vec{c}; \quad \vec{w} = \vec{a} + \vec{c};$

$\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} + \nu\vec{w} = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b} + \mu\vec{b} + \mu\vec{c} + \nu\vec{a} + \nu\vec{c} = \vec{a}\,(\lambda + \nu) + \vec{b}\,(\lambda + \mu) + \vec{c}\,(\mu + \nu) = 0;$

$\lambda + \nu = \lambda + \mu = \mu + \nu = 0; \Leftrightarrow (\lambda, \mu, \nu) = (0, 0, 0);$

Also: $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind linear unabhängig.

b) $\vec{u} = \vec{c} - \vec{a}; \quad \vec{v} = \vec{b} - \vec{c}; \quad \vec{w} = \vec{b} - \vec{a};$

$\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} + \nu\vec{w} = \lambda\vec{c} - \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} - \mu\vec{c} + \nu\vec{b} - \nu\vec{a} = \vec{a}\,(-\lambda - \nu) + \vec{b}\,(\mu + \nu) + \vec{c}\,(\lambda - \mu) = 0;$

$-\lambda - \nu = \mu + \nu = \lambda - \mu = 0; \Leftrightarrow (\lambda, \mu, \nu) = (-k, -k, k);$

Also: $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind linear abhängig (es gibt nicht nur die triviale Nullsumme).

c) $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}; \quad \vec{v} = \vec{a} + \vec{b}; \quad \vec{w} = \vec{a} - \vec{c};$

$L\vec{u} + \mu\vec{v} + \nu\vec{w} = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b} + \lambda\vec{c} + \mu\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{a} - \nu\vec{c} = \vec{a}\,(\lambda + \mu + \nu) + \vec{b}\,(\lambda + \mu) + \vec{c}\,(\lambda - \nu) = 0;$

$\lambda + \mu + \nu = \lambda + \mu = \lambda - \nu; \Leftrightarrow (\lambda, \mu, \nu) = (0, 0, 0);$

Also: $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind linear unabhängig.

05.05.2006

4.75 76. Hausaufgabe

4.75.1 Geometrie-Buch Seite 117, Aufgabe 1

Im Dreieck ABC ist $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{BE} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$.
In welchen Verhältnissen teilen sich $[AE]$ und $[BD]$?
$\overrightarrow{AS} = \alpha\overrightarrow{SE}; \quad \overrightarrow{BS} = \beta\overrightarrow{SD};$
$\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{BA} = \underbrace{\lambda\overrightarrow{AE}}_{\overrightarrow{AS}}+\underbrace{\mu\overrightarrow{DB}}_{\overrightarrow{SB}}+\underbrace{\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}}_{\overrightarrow{BA}} = \underbrace{\lambda\left(\overrightarrow{AC}+\frac{2}{5}\overrightarrow{CB}\right)}_{\overrightarrow{AS}}+\underbrace{\mu\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right)}_{\overrightarrow{SB}}+\overrightarrow{BC}+$
$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC}\left(\lambda+\frac{1}{3}\mu-1\right)+\overrightarrow{BC}\left(-\frac{2}{5}-\mu+1\right) = \vec{0};$
$\lambda+\frac{1}{3}\mu-1 = -\frac{2}{5}-\mu+1 = 0; \Leftrightarrow (\lambda,\mu) = (\frac{4}{5},\frac{3}{5});$
$\overrightarrow{AS} = \alpha\overrightarrow{SE} = \lambda\overrightarrow{AE} = \lambda\left(\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{SE}\right); \Leftrightarrow \alpha = \lambda\frac{\overrightarrow{AS}}{\overrightarrow{SE}}+\lambda = \lambda\alpha+\lambda; \Leftrightarrow$
$\alpha = \frac{\lambda}{1-\lambda} = 4;$
$\overrightarrow{BS} = \beta\overrightarrow{SD} = -\mu\overrightarrow{DB} = -\mu\left(\overrightarrow{DS}+\overrightarrow{SB}\right) = \mu\overrightarrow{SD}+\mu\overrightarrow{BS}; \Leftrightarrow \beta = \mu\frac{\overrightarrow{SD}}{\overrightarrow{SD}}+$
$\mu\frac{\overrightarrow{BS}}{\overrightarrow{SD}} = \mu+\mu\beta; \Leftrightarrow \beta = \frac{\mu}{1-\mu} = \frac{3}{2};$
[XXX falsch.] 09.05.2006

4.76 77. Hausaufgabe

4.76.1 Geometrie-Buch Seite 117, Aufgabe 2

Im Dreieck ABC ist $\overrightarrow{BD} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BD}$ und $\overrightarrow{AS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$. BS schneidet AC in T.
In welchem Verhältnis teilt T die Strecke $\overrightarrow{AC}$ beziehungsweise S die Strecke $\overrightarrow{BT}$?
$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ linear unabhängig.

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{ST}+\overrightarrow{TA} = \\
&\quad = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}\right)}_{\overrightarrow{AD}}+\underbrace{\lambda\overrightarrow{BT}}_{\overrightarrow{ST}}+\underbrace{\mu\overrightarrow{CA}}_{\overrightarrow{TA}} = \\
&\quad = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{8}\underbrace{\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)}_{\overrightarrow{BC}}+\lambda\underbrace{\left(\overrightarrow{BA}-\mu\overrightarrow{CA}\right)}_{\overrightarrow{BT}}+\mu\overrightarrow{CA} =
\end{aligned}$$

$$= \overrightarrow{AB}\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{8} - \lambda\right) + \overrightarrow{AC}\left(\tfrac{3}{8} + \lambda\mu - \mu\right) =$$
$$= \vec{0};$$

$\lambda = \frac{1}{2} - \frac{3}{8} = \frac{1}{8};$

$\mu = \frac{\frac{3}{8}}{1-\lambda} = \frac{3}{7};$

$\overrightarrow{BS} = \beta\overrightarrow{ST}; \Leftrightarrow \beta = \frac{\overrightarrow{BS}}{\overrightarrow{ST}} = \frac{\overrightarrow{BT}+\overrightarrow{TS}}{\lambda\overrightarrow{BT}} = \frac{\overrightarrow{BT}-\lambda\overrightarrow{BT}}{\lambda\overrightarrow{BT}} = \frac{1-\lambda}{\lambda} = 7;$

$\overrightarrow{AT} = \alpha\overrightarrow{TC}; \Leftrightarrow \alpha = \frac{\overrightarrow{AT}}{\overrightarrow{TC}} = \frac{\overrightarrow{AT}}{\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{AC}} = \frac{\mu\overrightarrow{AC}}{-\mu\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}} = \frac{\mu}{1-\mu} = \frac{3}{4};$ 12.05.2006

4.77 78. Hausaufgabe

4.77.1 Analysis-Buch Seite 111, Aufgabe 3

Vereinfache:

a) $\left(16^{\frac{3}{4}}\right)^{-2} = \frac{1}{16^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{4\cdot 16} = \frac{1}{64};$

b) $\left(3^{-\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{3}{8}} = 3^{\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{3}{8}\right)} = \sqrt[4]{3};$

c) $\left(2^8 \cdot 3^{-6}\right)^{\frac{1}{4}} = 2^2 \cdot 3^{-\frac{3}{2}} = \frac{4}{3\sqrt{3}};$

d) $\left[\left(7^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{3}{4}}\right]^{-\frac{4}{5}} = 7^{\frac{3}{10}};$

4.77.2 Analysis-Buch Seite 111, Aufgabe 4

Es gelte $0 < u < v$; welche Ungleichung besteht dann zwischen folgenden Potenzen:

a) $u^2 < v^2;$

b) $u^{-2} > v^{-2};$

c) $u^{0,1} < v^{0,1};$

d) $u^0 = v^0 = 1;$

4.77.3 Analysis-Buch Seite 111, Aufgabe 6

Löse nach x auf:

a) $x^2 = 256 = 16^2; \Leftrightarrow (x_1, x_2) = (16, -16);$

b) $2^x = 256 = 2^8; \Leftrightarrow x = 8;$

c) $2^x = 255 = 2^8 - 1; \Leftrightarrow x = \operatorname{ld}(2^8 - 1)\,;$

d) $256 = \operatorname{ld} x; \Leftrightarrow x = 2^{256};$

e) $\log_x 256 = 2; \Leftrightarrow x^2 = 256 = 16^2$ **mit** $x > 0; \Leftrightarrow x = 16;$

f) $3^{3^x} = 27 = 3^{3^1}; \Leftrightarrow x = 1;$

21.05.2006

4.78 80. Hausaufgabe

4.78.1 Analysis-Buch Seite 113, Aufgabe 38

$\mathrm{f}_t(x) = (e^x - t)^2\,; \quad D_{\mathrm{f}_t} = \mathbb{R}; \quad t > 0;$

a) Berechne abhängig von t: Schnittpunkte des Graphen und der Koordinatenachsen, Asymptoten, Tief- und Wendepunkte.

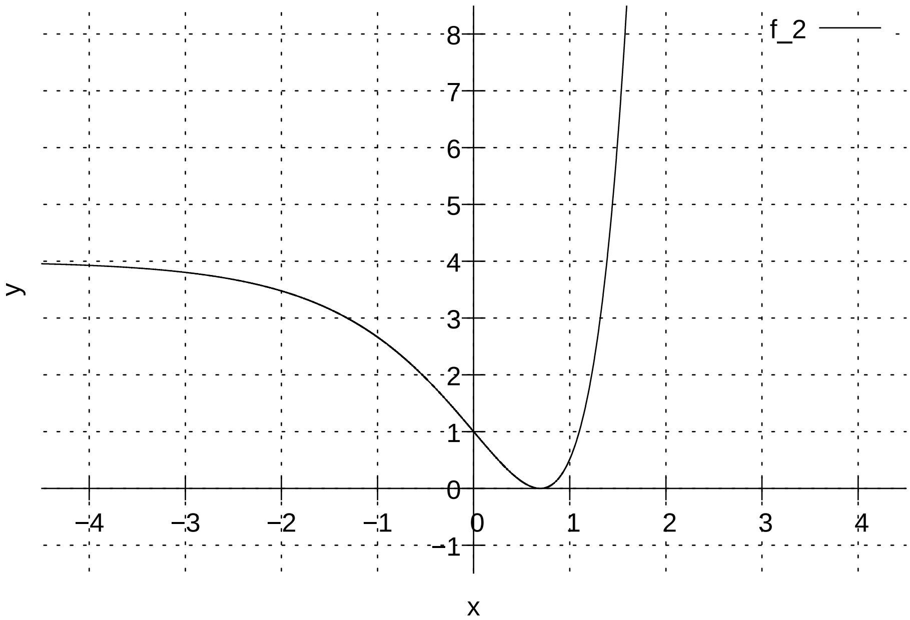
- $\mathrm{f}_t(0) = (1 - t)^2\,; \quad S_y(0, (1 - t)^2);$
  $\mathrm{f}_t(x) = (e^x - t)^2 = 0; \Rightarrow e^x = t; \Rightarrow x = \ln t; \quad S_x(\ln t, 0);$
- $\lim\limits_{x \to \infty} \mathrm{f}_t(x) = \infty;$
  $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{f}_t(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} - 2e^x t + t^2 = 0 - 0 + t^2 = t^2;$
  Asymptotengleichung: $y = t^2;$
- $\mathrm{f}_t'(x) = 2\,(e^x - t) \cdot e^x;$

```
          ln t
          |
----------+---------->
---------------------> e^x
- - - - - *----------> e^x - t

     -    0    +
```

$P_{\text{TIP}}(\ln t, 0)$;
$f_t''(x) = 2e^x\left(e^x - t\right) + 2e^x e^x = 2e^x\left(e^x - t + e^x\right) = 0; \Leftrightarrow$
$e^x - t + e^x = 2e^x - t = 0; \Leftrightarrow x = \ln\frac{t}{2}$;
$P_{\text{WEP}}\left(\ln\frac{t}{2}, \frac{t^2}{4}\right)$;

b) Zeichne G_{f_2} im Bereich $\left[-4, \frac{3}{2}\right]$.



c) Berechne die Koordinaten des Schnittpunkts S von G_{f_t} und der zugehörigen Asymptote.

Auf welcher Kurve liegen diese Schnittpunkte?

$t^2 = f_t(x) = \left(e^x - t\right)^2$;

$\pm t = e^x - t$;

$\pm t + t = e^x$;

Zwei Fälle:

- $0 = e^x; \rightarrow$ keine Lösung
- $2t = e^x; \Leftrightarrow x = \ln 2t; \quad S(\ln 2t, t^2)$;

$\lambda := \ln 2t; \Leftrightarrow e^\lambda = 2t; \Leftrightarrow \frac{1}{4}e^{2\lambda} = t^2$;

Kurve der Schnittpunkte: $k(\lambda) = \frac{1}{4}e^{2\lambda}$;

4.78.2 Analysis-Buch Seite 114, Aufgabe 54

Harte β-Strahlen werden zu $80\,\%$ in einer $1\,\mathrm{mm}$ dicken Aluminiumschicht absorbiert.

a) Bei welcher Schichtdicke werden $50\,\%$ absorbiert?

$N(d) = N_0 \cdot (20\,\%)^{d/1\,\mathrm{mm}};$

$N(d_{50\,\%}) = N_0 \cdot (20\,\%)^{d_{50\,\%}/1\,\mathrm{mm}} = 50\,\% \cdot N_0; \Leftrightarrow$

$d_{50\,\%}/1\,\mathrm{mm} = \log_{20\,\%} 50\,\%; \Leftrightarrow d_{50\,\%} = 1\,\mathrm{mm} \cdot \log_{20\,\%} 50\,\% \approx 0{,}4\,\mathrm{mm};$

b) Bei welcher Schichtdicke dringt noch $1\,\%$ hindurch?

$N(d_{1\,\%}) = N_0 \cdot (20\,\%)^{d_{1\,\%}/1\,\mathrm{mm}} = 1\,\% \cdot N_0; \Leftrightarrow$

$d_{1\,\%}/1\,\mathrm{mm} = \log_{20\,\%} 1\,\%; \Leftrightarrow d_{1\,\%} = 1\,\mathrm{mm} \cdot \log_{20\,\%} 1\,\% \approx 1{,}4\,\mathrm{mm};$

c) Welcher Anteil der Strahlung wird von einer $0{,}5\,\mathrm{mm}$ starken Alufolie verschluckt?

$1 - N(0{,}5\,\mathrm{mm})/N_0 = 1 - (20\,\%)^{0{,}5\,\mathrm{mm}/1\,\mathrm{mm}} \approx 55\,\%;$

23.05.2006

4.79 81. Hausaufgabe

4.79.1 Analysis-Buch Seite 113, Aufgabe 38

$\mathrm{f}_t(x) = (e^x - t)^2; \quad D_{\mathrm{f}_t} = \mathbb{R}; \quad t > 0;$

$\mathrm{f}_t'(x) = 2\,(e^x - t) \cdot e^x;$

d) G_{f_t}, die zugehörige Asymptote und die Gerade $x = -u$ ($u > 0$) umschließen ein Flächenstück.

Berechne dessen Inhalt. Was ergibt sich für $u \to +\infty$?

$A_t(u) = \int\limits_{-u}^{\ln 2t} (t^2 - \mathrm{f}_t(x))\,\mathrm{d}x = \left[t^2 x - \frac{1}{2}e^{2x} + 2e^x t - t^2 x\right]_{-u}^{\ln 2t} = t^2 \cdot \ln 2t - \frac{1}{2}\,(2t)^2 + 2 \cdot 2t \cdot t - t^2 \cdot \ln 2t + t^2 u + \frac{1}{2}e^{-2u} + 2e^{-u}t + t^2 u;$

$\lim\limits_{u\to\infty} A_t(u) = \infty;$

e) Zeige, dass sich je zwei Graphen der Schar in genau einem Punkt P schneiden. Wann liegt P auf der y-Achse?

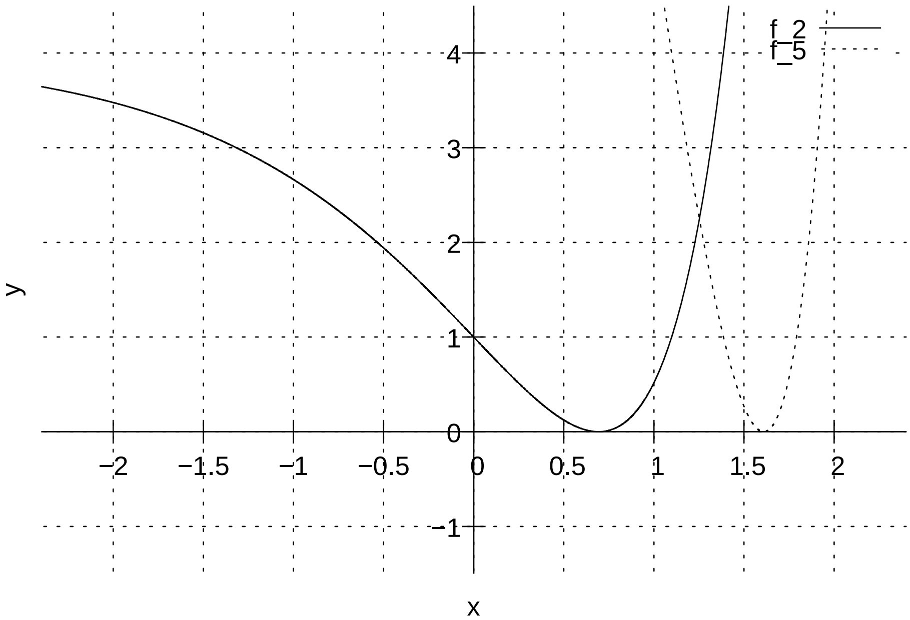
$\mathrm{f}_{t_1}(x) = \mathrm{f}_{t_2}(x);$

$e^x - t_1 = \pm\left(e^x - t_2\right) = \pm e^x \mp t_2;$

$e^x\left(1 \mp 1\right) = t_1 \mp t_2;$

$x = \ln\frac{t_1+t_2}{2};$ (definiert für alle t_1, t_2) $\rightarrow P\left(\ln\frac{t_1+t_2}{2}, \left(\frac{t_1+t_2}{2} - t_1\right)^2\right);$

$x = \ln\frac{t_1+t_2}{2} = 0; \Leftrightarrow \frac{t_1+t_2}{2} = 1; \Leftrightarrow t_1 + t_2 = 2;$



29.05.2006

4.80 82. Hausaufgabe

4.80.1 Analysis-Buch Seite 115, Aufgabe 62

Berechne:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{x} = \infty;$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{e^x}}{x} = \infty;$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{e^x}}{x} = 0;$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0;$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{e^x-1190}}{e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{-\frac{1}{2}x} = 0;$

f) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x\left(1+e^{-2x}\right)}{e^x(1-e^{-2x})} = 1;$

g) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^{-x}\left(e^{2x}+1\right)}{e^{-x}(e^{2x}-1)} = -1;$

h) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{(e^x-1)(e^{x-2}-1)} = \frac{1}{(-1)(-1)} = 1;$

29.05.2006

4.81 83. Hausaufgabe

4.81.1 Analysis-Buch Seite 115, Aufgabe 61

Berechne:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{2x} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{2x-1+1+1}{2x-1}\right)^{2x} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{2}{2x-1}\right)^{2x} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{2}{2x-1}\right)^{2x-1+1} =$
$\lim\limits_{u\to\infty} \left(1+\frac{2}{u}\right)^{u+1} = \lim\limits_{u\to\infty} \left(1+\frac{2}{u}\right)^{u} \cdot \left(1+\frac{2}{u}\right) = e^2 \cdot 1 = e^2;$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{2x+1}{3x-1}\right)^{2x} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = 0;$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{3x+1}{2x-1}\right)^{2x} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} = \infty;$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{3x+1}{3x-1}\right)^{2x} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{3x-1+1+1}{3x-1}\right)^{2x} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{2}{3x-1}\right)^{2x} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{2}{3x-1}\right)^{2x+x-x-1+1} =$
$\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{2}{3x-1}\right)^{(3x-1)\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{3}} = \left(e^2\right)^{\frac{2}{3}} = e^{\frac{4}{3}};$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{2x+2}{2x-1}\right)^{2x} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{2x-1+1+2}{2x-1}\right)^{2x} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{3}{2x-1}\right)^{2x} = \lim\limits_{x\to\infty} \left[\left(1+\frac{3/2}{x}\right)^{x}\right]^2 =$
$\left(e^{\frac{3}{2}}\right)^2 = e^3;$

f) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{2x+2}{2x-2}\right)^{2x} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{2x-2+2+2}{2x-2}\right)^{2x} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{4}{2x-1}\right)^{2x} = \lim\limits_{x\to\infty} \left[\left(1+\frac{4/2}{x}\right)^{x}\right]^2 =$
$\left(e^{\frac{4}{2}}\right)^2 = e^4;$

XXX „Plusminus 1 wird bei Unendlich schon nichts ausmachen“ nicht sehr elegant (Aufgaben e) und f)) 31.05.2006

4.82 84. Hausaufgabe

4.82.1 Analysis-Buch Seite 149, Aufgabe 5

Leite ab:

a) $\mathrm{f}(x) = x + \ln x; \quad \mathrm{f}'(x) = 1 + \frac{1}{x};$

b) $\mathrm{f}(x) = x \ln x; \quad \mathrm{f}'(x) = x\frac{1}{x} + \ln x = 1 + \ln x;$

c) $\mathrm{f}(x) = \ln -x; \quad \mathrm{f}'(x) = \frac{1}{x};$

d) $\mathrm{f}(x) = -\ln 2x; \quad \mathrm{f}'(x) = -\frac{2}{2x} = -\frac{1}{x} = (-\ln x)'\,;$

e) $\mathrm{f}(x) = \ln x^2 = 2\ln x; \quad \mathrm{f}'(x) = \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2}{x};$

f) $\mathrm{f}(x) = (\ln x)^2\,; \quad \mathrm{f}'(x) = 2\ln x \cdot \frac{1}{x};$

g) $\mathrm{f}(x) = \ln\sqrt{x}; \quad \mathrm{f}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2x};$

h) $\mathrm{f}(x) = \sqrt{\ln x}; \quad \mathrm{f}'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}}\frac{1}{x};$

i) $\mathrm{f}(x) = \ln\sin x; \quad \mathrm{f}'(x) = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x;$

j) $\mathrm{f}(x) = \sin\ln x; \quad \mathrm{f}'(x) = \cos\ln x \cdot \frac{1}{x};$

k) $\mathrm{f}(x) = \ln x^e; \quad \mathrm{f}'(x) = \frac{1}{x^e} \cdot ex^{e-1};$

l) $\mathrm{f}(x) = \ln e^x = x; \quad \mathrm{f}'(x) = \frac{1}{e^x} \cdot e^x = 1;$

03.07.2006

4.83 85. Hausaufgabe

4.83.1 Stochastik-Buch Seite 153, Aufgabe 1

Eine Münze mit den Merkmalen Zahl und Wappen wird zweimal geworfen. X kennzeichne, wie oft Zahl fällt. Stellen Sie die Funktion auf dem üblichen Ergebnisraum mathematisch dar.

$\Omega = \{0,1\}^2\,;$

$X\colon (0,0) \mapsto 0, \quad (0,1),(1,0) \mapsto 1, \quad (1,1) \mapsto 2;$

4.83.2 Stochastik-Buch Seite 153, Aufgabe 4

Eine echte Münze mit den Merkmalen Z und W wird dreimal geworfen. X sei die Funktion, die jedem Ergebnis die Anzahl der erhaltenen W zuordnet. Bestimmen Sie das zu jeder Gleichung $X(\omega) = x$ gehörige Ereignis und zeigen Sie, dass die „oder"-Verknüpfung aller so entstehenden Ereignisse den Ergebnisraum Ω erzeugt.

$\Omega = \{Z, W\}^3 = \{0, 1\}^3$;

```
omega x
  000 0
  001 1
  010 1
  100 1
  110 2
  101 2
  011 2
  111 3
```

4.83.3 Stochastik-Buch Seite 154, Aufgabe 7

Bei dem Gesellschaftsspiel „chuck a luck" zahlt man einen bestimmten Geldbetrag a ein, wählt eine der sechs Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 aus und würfelt dann mit drei Würfeln.

Zeigen alle drei Würfel die gewählte Zahl, so erhält man das Vierfache seines Einsatzes, zeigen zwei Würfel die gewählte Zahl, so erhält man das Dreifache seines Einsatzes, zeigt nur ein Würfel die gewählte Zahl, so erhält man das Doppelte seines Einsatzes. In allen anderen Fällen erhält man nichts.

X sei der Reingewinn eines Mitspielers bei einem Spiel.

Stellen Sie X als Funktion dar, wenn man die Sechs wählt.

$X_6(6, 6, 6) = 4a - a = 3a$;

$X_6(6, 6, \alpha) = X_6(6, \alpha, 6) = X_6(\alpha, 6, 6) = 3a - a = 2a$ für alle $\alpha \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$;

$X_6(6, \alpha, \beta) = X_6(\alpha, 6, \beta) = X_6(\alpha, \beta, 6) = 2a - a = a$ für alle $\alpha, \beta \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$;

$X_6(\alpha, \beta, \gamma) = 0a - a = -a$ für alle $\alpha, \beta, \gamma \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$; 10.07.2006

„Der [der Lehrer] hat jetzt nicht weitergewusst, insofern fragt er uns“

„daher bin ich [Bayer] niemals vorbereitet“

„die Stunde klappt am besten, wenn keine Schüler da sind“ 10.07.2006

4.84 86. Hausaufgabe

4.84.1 Stochastik-Buch Seite 158, Aufgabe 8

Fällt beim Werfen eines echten Würfels eine Sechs, nehme die Zufallsgröße X den Wert 1, sonst 0 an.

Wie lautet die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X?

$$P_X\colon x \mapsto P_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{für } x = 1; \\ \frac{5}{6} & \text{für } x \neq 1; \end{cases}$$ 11.07.2006

4.85 87. Hausaufgabe

4.85.1 Stochastik-Buch Seite 158, Aufgabe 9

Jemand setzt beim Roulette auf zwei Querreihen von sechs Zahlen, beispielsweise auf $\{1, 2, 3, 10, 11, 12\}$, und erhält, wenn das Ereignis eintritt, den fünffachen Einsatz als Reingewinn. Sonst geht der Einsatz verloren. X kennzeichne den Reingewinn.

a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X beim Einsatz einer Geldeinheit an.

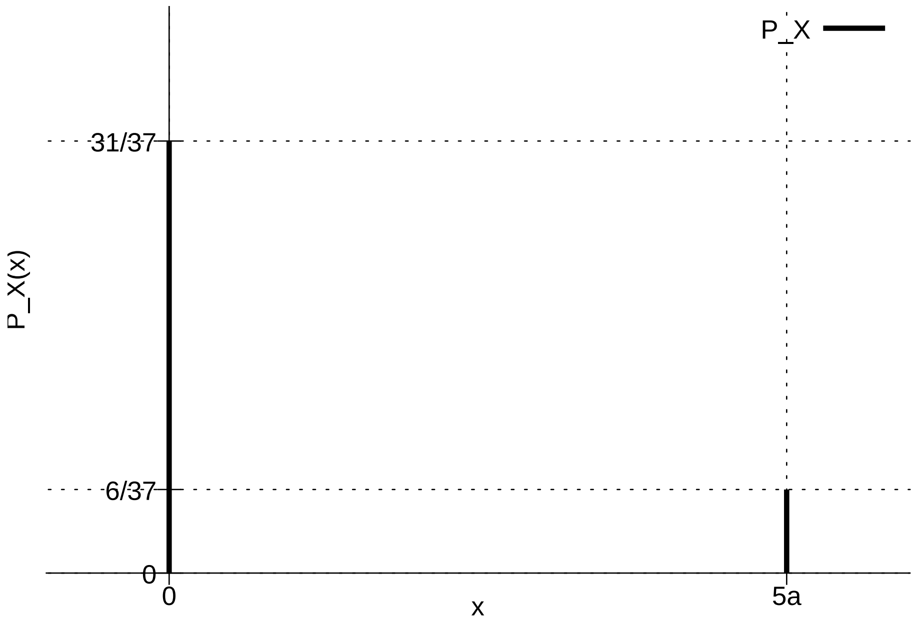
$$P_X\colon x \mapsto P_X(x) = \begin{cases} \frac{6}{37} & \text{für } x = 5a; \\ \frac{31}{37} & \text{für } x = 0; \end{cases}$$

b) Zeichnen Sie ein Histogramm.

c) Kennzeichnen Sie die Dichtefunktion und tragen Sie die Dichtekurve in das Histogramm ein.

$$d(x) = \begin{cases} \frac{31}{37} & \text{für } x < 5a - \Delta x; \\ \frac{31}{37} & \text{für } x > 5a + \Delta x; \\ \frac{6}{37} & \text{sonst}; \end{cases}$$

[XXX falsch, Division durch Δx oder so fehlt.]



23.07.2006

4.86 89. Hausaufgabe

4.86.1 Stochastik-Buch Seite 171, Aufgabe 37

Eine echte Münze wird viermal geworfen. X sei die Anzahl der Merkmale W, die bei den ersten beiden Würfen erscheinen, Y die Anzahl der Merkmale Z bei den zwei letzten Würfen.

a) Zu konstruieren sind der Ergebnisraum und die gemeinsame Wahrscheinlichkeitstabelle für X und Y.

$\Omega = \{W, Z\}^2$;

```
\x||   |   |   ||
y\|| 0 | 1 | 2 ||
--++---+---+---++---
--++---+---+---++---
 0|| 1 | 2 | 1 ||  4
--++---+---+---++---
 1|| 2 | 4 | 2 ||  8
--++---+---+---++---
 2|| 1 | 2 | 1 ||  4
--++---+---+---++---
  || 4 | 8 | 4 || 16
```

b) Überprüfen Sie X und Y auf Unabhängigkeit.

X und Y sind stochastisch unabhängig.

25.07.2006

4.87 90. Hausaufgabe

4.87.1 Stochastik-Buch Seite 171, Aufgabe 34

Drei nicht unterscheidbare Gegenstände werden zufällig auf drei Kästen verteilt. X sei die Anzahl der leeren Kästen, Y die Anzahl der Gegenstände im ersten Kasten.

Man stelle die gemeinsame Wahrscheinoichkeitstabelle auf. Sind X und Y unabhängig?

$\Omega = \{1, 2, 3\}^3$;

```
\x||   |    |   ||
y\|| 0 |  1 | 2 ||
--++---+----+---++---
--++---+----+---++---
 0|| 0 |  6 | 2 ||  8
--++---+----+---++---
 1|| 6 |  6 | 0 || 12
--++---+----+---++---
 2|| 0 |  6 | 0 ||  6
--++---+----+---++---
 3|| 0 |  0 | 1 ||  1
--++---+----+---++---
--++---+----+---++---
  || 6 | 18 | 3 || 27
```

Nein, X und Y sind nicht unabhängig, da bspw. $\frac{0}{27} \neq \frac{6}{27}\frac{8}{27}$. 15.09.2006

4.88 91. Hausaufgabe

4.88.1 Stochastik-Buch Seite 184, Aufgabe 1

X kennzeichne die Anzahl der Merkmale „Zahl“ beim Werfen einer fairen Münze. Berechnen Sie $E(X)$.

$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$;

4.88.2 Stochastik-Buch Seite 184, Aufgabe 2

X kennzeichne die jeweils geworfene doppelte Augenzahl beim Werfen eines echten Würfels. Berechnen Sie $E(X)$.

$\tilde{X}(\omega) = X(\omega) : 2; \quad E(\tilde{X}) = 3{,}5;$

$E(X) = 2\,P_X(2) + 4\,P_X(4) + \cdots + 12\,P_X(12) = 2\,E(\tilde{X}) = 7;$

4.88.3 Stochastik-Buch Seite 185, Aufgabe 4

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße X sei symmetrisch zu $x = c$, d.h. $P(X = c + x) = P(X = c - x)$. Zeigen Sie, dass $E(X) = c$ gilt.

$E(X) = cP(X = c) + \sum\limits_{\Delta>0} [(c + \Delta)\, P(X = c + \Delta) + (c - \Delta)\, P(X = c + \Delta)] = cP(X = c) + \sum\limits_{\Delta>0} P(X = c + \Delta) \cdot 2c = c \left[P(X = c) + 2 \sum\limits_{\Delta>0} P(X = c + \Delta)\right] = c \left[P(X = c) + \sum\limits_{\Delta>0} P(X = c + \Delta) + \sum\limits_{\Delta>0} P(X = c - \Delta)\right] = c \sum\limits_{\Delta\in\mathbb{R}} P(X = c + \Delta) = c \cdot 1 = c$;

4.88.4 Stochastik-Buch Seite 185, Aufgabe 5

a) Eine Urne enthält zehn gleichartige Kugeln, welche die Nummern 1 bis 10 tragen. Eine Kugel wird zufällig ausgewählt. X_{10} sei die darauf verzeichnete Zahl. Berechnen Sie $E(X_{10})$.

$E(X_{10}) = \frac{11}{2}$;

b) Aufgabe a) soll von 10 auf die natürliche Zahl n verallgemeinert werden.

$E(X_n) = \frac{n+1}{2}$;

c) Es werden aus der Urne mit zehn Kugeln zwei Kugeln zufällig mit Zurücklegen gezogen. Y sei das Maximum der Zahlen. Berechnen Sie $E(Y)$.

$E(Y) = \sum\limits_{\omega\in\Omega} X(\omega)P(\{\omega\}) = \frac{1}{100}\,[10 \cdot (1 \cdot 10 + 10 \cdot 1 - 1) + 9 \cdot (1 \cdot 9 + 9 \cdot 1 - 1) + \cdots + 1 \cdot (1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 - 1)] = 7{,}15$;

18.09.2006

4.89 92. Hausaufgabe

4.89.1 Stochastik-Buch Seite 185, Aufgabe 6

X sei die Azzahl der K beim viermaligen unabhänigen Werfen einer Laplace-Münze.

a) Berechnen Sie $E(X)$.

$$E(X) = \sum_{n=0}^{4} n \cdot \frac{\binom{4}{n}}{16} = 2 = 4E(X_i) = 4 \cdot \left(0 \cdot \tfrac{1}{2} + 1 \cdot \tfrac{1}{2}\right);$$

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von $Y = X - E(X)$ und berechnen Sie $E(Y)$.

x	0	1	2	3	4
y	-2	-1	0	1	2
$\mathbf{16\,P(Y = y)}$	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$

$$E(Y) = E(X - E(X)) = E(X) - E(E(X)) = E(X) - E(X) = 0;$$

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von $Z = (X - E(X))^2$ und berechnen Sie $E(Z)$.

$$E(Z) = \frac{1}{16}\left[4 \cdot 2 \cdot \binom{4}{0} + 1 \cdot 2 \cdot \binom{4}{1} + 0 \cdot \binom{4}{2}\right] = 1;$$

4.89.2 Stochastik-Buch Seite 185, Aufgabe 7

Ein amerikanisches Roulette-Rad hat 38 Felder, von denen 18 rot, 18 schwarz und 2 grün sind. Jemand setzt einen Euro auf Rot. Er kann dabei einen Euro gewinnen oder verlieren. Zeigen Sie, dass der zu erwartende Verlust pro Spiel rund 5,3 ¢ beträgt.

$$E(V) = -1\,€ \cdot \frac{18}{38} + 1\,€ \cdot \frac{18+2}{38} \approx 5{,}3\,¢.$$

4.89.3 Stochastik-Buch Seite 185, Aufgabe 9

Beim Würfelspiel „Zwei zu Eins“ (Aufgabe 25 in 9) ist die Gewinnwahrscheinlichkeit $\frac{11}{27}$. Wie groß müsste die Gewinnauszahlung beim Einsatz eines Euro sein bei einem fairen Spiel?

$$E(X) = \frac{11}{27} \cdot A + \frac{16}{27} \cdot -1\,€ = 0\,€;$$

$$A = \frac{16}{27} \cdot \frac{27}{11} \cdot 1\,€ = \frac{16}{11}\,€;$$

Ausschüttung $= 1\,€ + A$; (faires Spiel $\Leftrightarrow$ E(Ausschüttung = Einsatz))

4.89.4 Stochastik-Buch Seite 185, Aufgabe 11

Eine Lotterie verkauft 10000 Lose zu je 2 €. Drei Lose gewinnen je 2000 €, fünf Lose je 1000 € und 10 Lose je 500 €. Wie groß ist der erwartete Verlust des Lotteriespielers?

$E(X) = \frac{1}{10000}\left[3 \cdot (-1998\,€) + 5 \cdot (-998\,€) + 10 \cdot (-498\,€) + (10000 - 3 - 5 - 10) \cdot 2\,€\right] = \frac{10000 \cdot 2\,€ - 3 \cdot 2000\,€ - 5 \cdot 1000\,€ - 10 \cdot 500\,€}{10000} = 40\ ¢$; 19.09.2006

„wie tief geht die eigene Schizophrenie?“ 19.09.2006

4.90 93. Hausaufgabe

4.90.1 Stochastik-Buch Seite 186, Aufgabe 14

Bei eine, Gesellschaftsspiel zahlt man einen bestimmten Geldbetrag a ein, wählt ein der sechs Zahlen 1, 2, …, 6 aus und würfelt dann mit drei Würfeln.

Zeigen alle drei Würfel die gewählte Zahl, so erhält man das Vierfache seines Einsatzes. Zeigen zwei Würfel die gewählte Zahl, so erhält man das Dreifache seines Einsatzes. Zeigt nur ein Würfel die gewählte Zahl, so erhält man das Doppelte seines Einsatzes. In allen anderen Fällen erhält man nichts.

X sei der Reingewinn eines Mitspielers bei einem Spiel. Unter der Annahme, dass die benützten Würfel Laplace-Würfel sind, bestimme man

a) die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X

b) den Erwartungswert von X

wenn man die Sechs auswählt.

$E(X) = 3a \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 + 2a \cdot \binom{3}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^2 \frac{5}{6} + a \cdot \binom{3}{1}\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^2 + (-a)\left(\frac{5}{6}\right)^3 = -\frac{17}{216}a;$

4.90.2 Stochastik-Buch Seite 190, Aufgabe 30

Berechnen Sie den Erwartungswert des Produkts der Augenzahlen, die mit drei Würfeln fallen können.

$E(X) = 3{,}5^3;$ 20.09.2006

4.91 94. Hausaufgabe

21.09.2006

4.91.1 Stochastik-Buch Seite 190, Aufgabe 29

Beim unabhängigen Werfen zweier unterscheidbarer Laplace-Würfel sei X die kleinste, Y die größte der Augenzahlen.

a) Stellen Sie die gemeinsame Wahrscheinlichkeitstafel auf und leiten Sie daraus die beiden Randverteilungen ab.

```
y\x |  1  2  3  4  5  6 |
----+-------------------+---
  1 |  1  0  0  0  0  0 |  1
  2 |  2  1  0  0  0  0 |  3
  3 |  2  2  1  0  0  0 |  5
  4 |  2  2  2  1  0  0 |  7
  5 |  2  2  2  2  1  0 |  9
  6 |  2  2  2  2  2  1 | 11
----+-------------------+---
    | 11  9  7  5  3  1 | 36
```

b) Begründen Sie anschaulich, warum X und Y nicht unabhängig sind und bestätigen Sie dies auch durch Rechnung.

$P(X = 2 \cap Y = 1) = 0 \neq \frac{9}{36}\frac{1}{36} = P(X = 2)P(Y = 1);$

c) Berechnen Sie $E(X)$, $E(Y)$ und $E(X + Y)$.

$E(X) = \frac{1}{36}\left[1 \cdot 11 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 5 + 6 \cdot 1\right] = \frac{91}{36};$

$E(Y) = \frac{1}{36}\left[1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 + 5 \cdot 9 + 6 \cdot 11\right] = \frac{161}{36};$

$E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 7;$

d) Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Augensumme Z und der Summe aus X und Y?

$E(Z) = \frac{1}{36}\left[2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + \cdots + 10 \cdot 3 + 11 \cdot 2 + 12 \cdot 1\right] = 7 = E(X+Y);$

e) Bestimmen Sie $P(X \leq 3 \cap Y \leq 4)$.

$P(X \leq 3 \cap Y \leq 4) = \frac{1}{36}\left[(1 + 0 + 0) + (2 + 1 + 0) + (2 + 2 + 1) + (2 + 2 + 2)\right] = \frac{5}{12};$

20.09.2006

4.91.2 Stochastik-Buch Seite 190, Aufgabe 31

X sei eine Zufallsgröße mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung

x	-2	0	2
$P(X = x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Ferner sei $Y = X^2$.

Zeigen Sie, dass $E(XY) = E(X)E(Y)$ ist, obwohl X und Y abhängig sind.

$P(X = 2)P(Y = 4) = \frac{1}{3}\frac{2}{3} = \frac{2}{9} \neq \frac{1}{3} = P(X = 2 \cap Y = 4)$;

$E(X)E(Y) = \frac{1}{3}\left[(-2) + 0 + 2\right] \cdot \frac{1}{3}\left[4 + 0 + 4\right] = 0 = \frac{1}{3}\left[(-2) \cdot 4 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 4\right] = E(XY)$;

4.91.3 Stochastik-Buch Seite 190, Aufgabe 32

Die Seiten zweier Laplace-Würfel sind mit den Zahlen -3, -2, -1, 1, 2, 3 bezeichnet. Die mit den Würfeln unabhängig geworfenen Augenzahlen seien mit X bzw. Y bezeichnet.

a) Berechnen Sie $E(X)$ und $E(Y)$.

$E(X) = E(Y) = \frac{1}{6}\left[3 + 2 + 1 - 1 - 2 - 3\right] = 0$;

b) Berechnen Sie $E(X^2)$ und $E(Y^2)$.

$E(X^2) = E(Y^2) = \frac{1}{6}\left[9 + 4 + 1 + 1 + 4 + 9\right] = \frac{14}{3}$;

c) Berechnen Sie $E(XY)$.

$E(XY) = E(X)E(Y) = 0$;

d) Berechnen Sie $E((X + Y)^2)$ zunächst im direkten Ansatz über die Aufstellung der möglichen Summen und dann nach der Summenregel.

$E((X + Y)^2) = E(X^2 + 2XY + Y^2) = \frac{14}{3} + 2 \cdot 0 \cdot 0 + \frac{14}{3} = \frac{28}{3}$;

25.09.2006

4.92 95. Hausaufgabe

4.92.1 Stochastik-Buch Seite 199, Aufgabe 35

X sei eine Zufallsgröße mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung

```
x |   -1 |    0 |     1 |    2
--+------+------+-------+-----
P | 8/27 | 1/27 | 10/27 | 8/27
```

Berechnen Sie $\mathrm{Var}(X)$ mit der Verschiebungsformel.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= E(X^2) - E^2(X) = \\
&= \left[1 \cdot \tfrac{8}{27} + 0 \cdot \tfrac{1}{27} + 1 \cdot \tfrac{10}{27} + 4 \cdot \tfrac{8}{27}\right] - \\
&- \left[(-1) \cdot \tfrac{8}{27} + 0 \cdot \tfrac{1}{27} + 1 \cdot \tfrac{10}{27} + 2 \cdot \tfrac{8}{27}\right]^2 = \\
&= \tfrac{38}{27};
\end{aligned}$$

4.92.2 Stochastik-Buch Seite 201, Aufgabe 50

Sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ mit $P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{3}$ für $i = 1, 2, 3$.

Ferner seien drei Zufallsgrößen X, Y, Z auf (Ω, P) definiert durch

$X(\{\omega_1\}) = 1; \quad X(\{\omega_2\}) = 2; \quad X(\{\omega_3\}) = 3;$

$Y(\{\omega_1\}) = 2; \quad Y(\{\omega_2\}) = 3; \quad Y(\{\omega_3\}) = 1;$

$Z(\{\omega_1\}) = 3; \quad Z(\{\omega_2\}) = 1; \quad Z(\{\omega_3\}) = 2;$

a) Konstruieren Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilungen von $X+Y$, $Y+Z$, $Z+X$.

```
w    | w1 | w2 | w3
-----+----+----+---
x    |  1 |  2 |  3
y    |  2 |  3 |  1
z    |  3 |  1 |  2
-----+----+----+---
x+y  |  3 |  5 |  4
y+z  |  5 |  4 |  3
z+x  |  4 |  3 |  5
-----+----+----+---
P    |     1/3
```

b) Begründen Sie die Abhängigkeit von X, Y, Z.

Mit Kenntnis des Werts, den eine Zufallsgröße annimmt, ist ein Elementarereignis eindeutig identifiziert. Damit kennt man auch die Werte der anderen Zufallsgrößen.

c) Berechnen Sie die Erwartungswerte und Varianzen von X, Y, Z.

$E(X) = E(Y) = E(Z) = 2;$

$\operatorname{Var}(X) = \operatorname{Var}(Y) = \operatorname{Var}(Z) = \frac{1}{3}\left[(1-2)^2 + (2-2)^2 + (3-2)^2\right] = \frac{2}{3};$

d) Berechnen Sie die Erwartungswerte und Varianzen der Summen in a).

$E(X+Y) = E(Y+Z) = E(Z+X) = E(X) + E(Y) = 4;$

$\operatorname{Var}(X+Y) = \operatorname{Var}(Y+Z) = \operatorname{Var}(Z+X) = \frac{1}{3}\left[(3-4)^2 + (5-4)^2 + (4-4)^2\right] = \frac{2}{3};$

e) Berechnen Sie den Erwartungswert von $X \cdot Y$.

$E(XY) = \frac{1}{3}[2+6+3] = \frac{11}{3};$

f) Was lässt sich über die Verteilung von $X+Y+Z$ aussagen?

$W_{X+Y+Z} = \{6\};$

$P(X+Y+Z=6) = 1;$

g) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von $X+Y-Z$ und $\frac{Z}{|X-Y|}$.

```
x+y-z | 0 | 2 | 4
------+---+---+--
P     |    1/3

z/|x-y| |   1 |   3
--------+-----+----
P       | 2/3 | 1/3
```

26.09.2006

4.93 96. Hausaufgabe

4.93.1 Stochastik-Buch Seite 186, Aufgabe 13

Ein Spielautomat mit zwei Scheiben, deren zehn kongruente Kreisausschnitte mit dem Nummern 0 bis 9 nach dem Drehen zufällig stehen bleiben, schüttet folgende Gewinne aus:

5 €, wenn zweimal die 0 im Fenster steht, 2 € wenn irgendein anderes Paar gleicher Zahlen auftritt, 0,50 €, wenn genau eine 0 auftritt.

In allen anderen Fällen geht der Einsatz verloren.

a) Berechnen Sie den Erwartungswert der Ausschüttung.

$$E(X) = \frac{1}{10^2}\left[5\,€ \cdot 1 + 2\,€ \cdot 9 + 0{,}50\,€ \cdot (1 \cdot 9 + 9 \cdot 1)\right] = 32\,¢;$$

b) Ist der Einsatz von 0,50 € für den Automatenbesitzer rentabel?

Ja, weil $50\,¢ > 32\,¢$.

4.93.2 Stochastik-Buch Seite 188, Aufgabe 20

Ein Gerät bestehe aus drei komplizierten Systemen, die unabhängig voneinander ausfallen können. Die auf die Wartungszeit bezogene Ausfallswahrscheinlichkeits für jedes der Systeme sei 1 %. Die Zufallsgröße X kennzeichne die Anzahl der ausfallenden Systeme.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X.

$$P(X = 0) = (1 - 1\,\%)^3\,;$$
$$P(X = 1) = 3 \cdot 1\,\% \cdot (1 - 1\,\%)^2\,;$$
$$P(X = 2) = 3 \cdot (1\,\%)^2 \cdot (1 - 1\,\%)\,;$$
$$P(X = 3) = (1\,\%)^3\,;$$

b) Berechnen Sie die erwartete Anzahl von ausfallenden Systemen.

$$E(X) = \cdots = 0{,}03 = 3\,\% = E(A_1) + E(A_2) + E(A_3);$$

4.93.3 Stochastik-Buch Seite 189, Aufgabe 24

Welche Augensumme kann man beim zehnmaligen unabhängigen Werfen eines Laplace-Würfels erwarten?

$$E(X_1 + X_2 + \cdots + X_{10}) = 10E(X) = 35;$$

4.93.4 Stochastik-Buch Seite 202, Aufgabe 56

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein gerade 60-jähriger Mann im Laufe des folgenden Jahres stirt, ist ungefähr $0{,}02$. Der entsprechende Wert für eine 60-jährige Frau ist ungefähr $0{,}01$.

a) Ein 60-jähriger Mann schließt eine Risikoversicherung für ein Jahr ab über eine Summe von 10000 €. Die Versicherungsprämie sei 300 €. X kennzeichne den Reingewinn oder den Verlust, den die Versicherung an einem solchen Vertrag erzielt. Die Anzahl der unter gleichen Bedingungen Versicherten sei sehr groß. Konstruieren Sie die Wahrscheinlichkeitstabelle und berechnen Sie $E(X)$.

$E(X) = 300\,€ \cdot (1 - 2\,\%) + (300\,€ - 10000\,€) \cdot 2\,\% = 100\,€;$

b) Eine 60-jährige Frau schließt einen ebensolchen Vertrag über 10000 € ab. Y sei der Reingewinn bzw. Verlust der Versicherung. Wie hoch muss die Versicherung die Jahresprämie festsetzen, wenn $E(X) = E(Y)$ sein soll?

$E(Y) = p \cdot (1 - 1\,\%) + (p - 10000\,€) \cdot 1\,\% = E(X);$

$\Leftrightarrow p = \frac{E(X)+10000\,€\cdot 1\,\%}{1-1\,\%+1\,\%} = E(X) + 100\,€ = 200\,€;$

c) Konstruieren sie die gemeinsame Wahrscheinlichkeitstabelle für X und Y unter der Voraussetzung, dass es sich um zwei unabhängige Personen handelt, und leiten Sie daraus die Wahrscheinlichkeitsverteilung für $X + Y$ ab.

```
y\x      | 300 €   -9700 € |
---------+-----------------+------
  200 €  |  97 %      2 %  |  99 %
-9800 €  |   1 %      0 %  |   1 %
---------+-----------------+------
         |  98 %      2 %  | 100 %

x+y | -19500 € | -9500 € | 500 €
----+----------+---------+------
P   |      0 % |     3 % |  97 %
```

d) Berechnen Sie $E(X + Y)$ mithilfe der Wahrscheinlichkeitsverteilung und dann nach der Summenregel.

$E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 200\,€;$

27.09.2006

4.94 97. Hausaufgabe

4.94.1 Stochastik-Buch Seite 202, Aufgabe 53

Bei einem Fabrikationsprozess zweier Werkstücke seien für jedes Werkstück die Abweichungen $-0{,}2$, $-0{,}1$, $0{,}0$, $0{,}1$, $0{,}2$ vom Sollwert μ_1 bzw. μ_2 gleich möglich. X_1 bzw. X_2 kennzeichne die jeweilige Abweichung. X_1 und X_2 seien unabhängig.

a) Berechnen Sie für die Summe $\mu_1 + \mu_2$ die sämtlichen möglichen Abweichungen und Wahrscheinlichkeiten.

b) Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von $X_1 + X_2$ grafisch dar.

$P(X_1 + X_2 = -0{,}4) = 1\left(\frac{1}{5}\right)^2;$
$P(X_1 + X_2 = -0{,}3) = 2\left(\frac{1}{5}\right)^2;$
$P(X_1 + X_2 = -0{,}2) = 3\left(\frac{1}{5}\right)^2;$
$P(X_1 + X_2 = -0{,}1) = 4\left(\frac{1}{5}\right)^2;$
$P(X_1 + X_2 = 0{,}0) = 5\left(\frac{1}{5}\right)^2;$
$P(X_1 + X_2 = 0{,}1) = 4\left(\frac{1}{5}\right)^2;$
$P(X_1 + X_2 = 0{,}2) = 3\left(\frac{1}{5}\right)^2;$
$P(X_1 + X_2 = 0{,}3) = 2\left(\frac{1}{5}\right)^2;$
$P(X_1 + X_2 = 0{,}4) = 1\left(\frac{1}{5}\right)^2;$

c) Welche Abweichung vom Sollwert $\mu_1 + \mu_2$ hat die größte Wahrscheinlichkeit?

Die Abweichung $\Delta = 0$/$|\Delta| = 0{,}1$ hat die größte Wahrscheinlichkeit.

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Abweichung vom Sollwert im Intervall $-0{,}1 \leq X_1 + X_2 \leq 0{,}1$ gelegen ist?

$P(-0{,}1 \leq X_1 + X_2 \leq 0{,}1) = 13\left(\frac{1}{5}\right)^2;$

e) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie dem Betrag nach größer sind?

$P(|X_1 + X_2| > 0{,}1) = 1 - 13\left(\frac{1}{5}\right)^2;$

f) Berechnen Sie $E(X_1)$ und $E(X_2)$.

$E(X_1) = E(X_2) = 0;$

g) Berechnen Sie $\mathrm{Var}(X_1)$ und $\mathrm{Var}(X_2)$.

$\mathrm{Var}(X_1) = \mathrm{Var}(X_2) = 0{,}02;$

h) Berechnen Sie $\mathrm{Var}(X_1 + X_2)$ mithilfe der Wahrscheinlichkeitsverteilung b) und zeigen Sie die Gültigkeit der Varianzregel.

$\mathrm{Var}(X_1 + X_2) = \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2) = 0{,}04;$

4.94.2 Kann man direkt an den Komponenten zweier Vektoren erkennen, ob die Vektoren zueinander senkrecht stehen?

$\binom{a}{b} \perp k \binom{-b}{a};$

$$\begin{array}{rcl|l}
\alpha & = & -kb & \cdot a \\
\beta & = & ka & \cdot b \\
\hline
a\alpha & = & -kab & \cdot (-1) \\
b\beta & = & kab & \\
\hline
b\beta & = & -a\alpha & +a\alpha \\
\hline
a\alpha + b\beta & = & 0 &
\end{array}$$ 02.10.2006

```
      ^
      |
  +   |
  |\  |  +
  | \ | /|
  |  \|/ |
<-----+---->
      |
      v
```

[Vektordreiecke (gebildet durch x-Achse, Vektor als Hypothenuse und entsprechend parallel verschobene y-Achse) sind zueinander ähnlich.] 02.10.2006

4.95 98. Hausaufgabe

4.95.1 Geometrie-Buch 208, Aufgabe 1

Berechne die Beträge von

a) $\left|\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2} = 13;$

b) $\left|\begin{pmatrix} 4 \\ -12 \\ -3 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}\right| = 13;$

c) $\left|\begin{pmatrix} 12 \\ -15 \\ 16 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{12^2 + 15^2 + 16^2} = 25;$

4.95.2 Geometrie-Buch 208, Aufgabe 3

Berechne die Einheitsvektoren in Richtung

d) $\dfrac{\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right|} = \dfrac{\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix};$

e) $\dfrac{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right|} = \dfrac{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}{\sqrt{3}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix};$

f) $\dfrac{\begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}\right|} = \dfrac{\begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}}{9} = \begin{pmatrix} \frac{8}{9} \\ -\frac{1}{9} \\ \frac{4}{9} \end{pmatrix};$

g) $\dfrac{13\begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}}{\left|13\begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}\right|} = \dfrac{\begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}\right|} = \begin{pmatrix} \frac{8}{9} \\ -\frac{1}{9} \\ \frac{4}{9} \end{pmatrix};$

h) $\dfrac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2{,}3 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2{,}3 \end{pmatrix}\right|} = \dfrac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2{,}3 \end{pmatrix}}{2{,}7} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2{,}7} \\ \frac{1}{2{,}7} \\ \frac{2{,}3}{2{,}7} \end{pmatrix};$

i) $\dfrac{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ \frac{1}{12} \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} - \\ -1 \\ \frac{1}{12} \end{pmatrix}\right|} = \dfrac{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ \frac{1}{12} \end{pmatrix}}{\frac{17}{12}} = \begin{pmatrix} -\frac{12}{17} \\ -\frac{12}{17} \\ \frac{1}{17} \end{pmatrix};$

j) $\dfrac{9\begin{pmatrix} \frac{7}{5} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}}{\left|9\begin{pmatrix} \frac{7}{5} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}\right|} = \dfrac{\begin{pmatrix} \frac{7}{5} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}}{\frac{3}{2}} = \begin{pmatrix} \frac{14}{15} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{15} \end{pmatrix};$

k) $\dfrac{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ \frac{7}{4} \end{pmatrix}}{\left|\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ \frac{7}{4} \end{pmatrix}\right|} = \dfrac{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ \frac{7}{4} \end{pmatrix}}{\frac{9}{4}} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} \\ \frac{7}{9} \end{pmatrix};$

l) $\dfrac{\begin{pmatrix} -3a \\ 2{,}4a \\ 3{,}2a \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} -3a \\ 2{,}4a \\ 3{,}2a \end{pmatrix}\right|} = \dfrac{\begin{pmatrix} -3a \\ 2{,}4a \\ 3{,}2a \end{pmatrix}}{5\,|a|} = \pm\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{2{,}4}{5} \\ \frac{3{,}2}{5} \end{pmatrix};$

4.95.3 Geometrie-Buch 208, Aufgabe 4

Berechne a.

a) $\left|\begin{pmatrix} 3a \\ -6a \\ 2a \end{pmatrix}\right| = \sqrt{9a^2 + 36a^2 + 4a^2} = 7\,|a| \overset{!}{=} 14;$

$\Leftrightarrow |a| = 2;$

b) $\left|\begin{pmatrix} a \\ 2a \\ a-1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{a^2 + 4a^2 + a^2 - 2a + 1} = \sqrt{6a^2 - 2a + 1} \stackrel{!}{=} 7;$

$\Leftrightarrow a_1 = -\frac{8}{3}; \quad a_2 = 3;$

„z.B. [will länger ausholen]... ah ne; die, die in Physik sind, wissen´s eh, und die, die´s nicht sind, wissen´s halt nicht...“ 05.10.2006

4.96 99. Hausaufgabe

4.96.1 Stochastik-Buch Seite 208, Aufgabe 66

1. Ein Gerätehersteller führt vor jeder größeren Lieferung folgenden Text durch: Es werden nacheinander Geräte „mit Zurücklegen“ geprüft, bis das zweite einwandfreie bzw. das zweite mangelhafte Gerät aufgetreten ist. Im ersten Fall wird die Lieferung freigegeben, im zweiten Fall zurückbehalten.

   a) Geben Sie einen geeigneten Ergebnisraum Ω an.
   $\Omega = \{11, 101, 100, 00, 010, 011\};$

   b) Schreiben Sie das Ereignis L: „es wird geliefert“ als Teilmenge von Ω. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P_p(L)$ in Abhängigkeit vom Anteil p mangelhafter Geräte in der Lieferung.
   $L = \{11, 101, 011\} \subset \Omega;$
   $P_p(L) = (1-p)^2 + (1-p)^2 p + p(1-p)^2 = 2p^3 - 3p^2 + 1 = (2p+1)(1-p)^2;$

   c) Weisen Sie mit Methoden der Differentialrechnung nach, dass $P_p(L)$ mit wachsendem p monoton abnimmt.
   $\frac{\mathrm{d}P_p(L)}{\mathrm{d}p} = 6p^2 - 6p < 0$ für $p \in \,]0,1[\,;$

   d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit höchstens, dass Lieferungen mit einem Anteil $p \geq 0{,}2$ von mangelhaften Geräten bei diesem Testverfahren freigegeben werden?
   $P_{\geq 0{,}2}(L) \leq 2 \cdot (0{,}2)^3 - 3 \cdot (0{,}2)^2 + 1 = 90\,\%;$

   e) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird die Sendung zurückbehalten, wenn $p = 0{,}1$ gilt?
   $1 - P_{0{,}1}(L) \approx 1 - 97\,\% = 3\,\%;$

2. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der nach dem in Teilaufgabe 1 beschriebenen Verfahren zu prüfenden Geräte an.

   a) Bestätigen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung
   $P(X = 2) = 1 - 2p + 2p^2; \quad P(X = 3) = 2p\,(1 - p)\,;$
   $P(X = 2) = (1 - p)^2 + p^2 = 2p^2 - 2p + 1;$
   $P(X = 3) = (1 - p)^2\,p + (1 - p)\,p^2 + p^2\,(1 - p) + p\,(1 - p)^2 = 2p - 2p^2 = 2p\,(1 - p)\,;$

   b) Zeigen Sie, dass die Verteilung aus Teilaufgabe 2a den Forderungen von Kolmogorow: „nichtnegativ" und „normiert" genügt.
   $p \in [0, 1]\,;$
   $P(X = 2) + P(X = 3) = (2p^2 - 2p + 1) + (2p - 2p^2) = 1;$
   $P(X = 3) = 2p\,(1 - p) \geq 0$, sofern p wie implizit in der Angabe bestimmt $\in [0, 1]\,;$
   $P(X = 2) = 2p^2 - 2p + 1 = (1 - p)^2 + p^2 \geq 0$, da eine Summe von Quadraten im Reellen immer $\geq 0;$

   c) Weisen Sie nach: $E_p(X) = 2\,(1 + p - p^2)\,;$
   $E_p(X) = 2 \cdot P(X = 2) + 3 \cdot P(X = 3) = -2p^2 + 2p + 2;$

   d) Für welchen Wert von p müssen im Durchschnitt die meisten Geräte geprüft werden? Wie viele sind dies?
   $\frac{\mathrm{d}E_p(X)}{\mathrm{d}p} = -4p + 2 \overset{!}{=} 0;$
   $\Leftrightarrow p = \frac{1}{2};$
   $E_{\frac{1}{2}}(X) = -2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right) + 2 = 2{,}5;$

(Aus Abiturprüfung 1984.)

4.96.2 Geometrie-Buch Seite 208, Aufgabe 6

Berechne den Umfang des Dreiecks ABC:

b) $A(1, -6, -6); \quad B(2, 2, -2); \quad C(0, -2, 2);$
$\left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|\overrightarrow{BC}\right| + \left|\overrightarrow{CA}\right| = 9 + 6 + 9 = 24;$

c) $A(9,9,0)$; $B(-6,3,9)$; $C(0,-6,-6)$; Umkreisradius?

$\left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|\overrightarrow{BC}\right| + \left|\overrightarrow{CA}\right| \approx 55{,}5;$

$$\frac{\left|\overrightarrow{AB}\right|}{2\sin\arccos\frac{\vec{A}\vec{B}}{\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|}} = r;$$

$r = \sqrt{114};$

06.10.2006

4.97 100. Hausaufgabe

4.97.1 Geometrie-Buch Seite 216, Aufgabe 11

Berechne den Winkel zwischen

a) einer Raumdiagonale und einer Kante eines Würfels.

$\vec{E} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix};$

$\vec{K} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$

$$\frac{\vec{E}\vec{K}}{\left|\vec{E}\right|\left|\vec{K}\right|} = \frac{a^2}{\sqrt{3a^2}\sqrt{a^2}} = \frac{a^2}{\sqrt{3a^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \cos\varphi;$$

$\varphi \approx 54{,}7°;$

b) zwei Raumdiagonalen eines Würfels,

$\vec{E}_1 = \begin{pmatrix} a \\ -a \\ a \end{pmatrix};$

$\vec{E}_2 = \begin{pmatrix} -a \\ -a \\ a \end{pmatrix};$

$$\frac{\vec{E}_1\vec{E}_2}{\left|\vec{E}_1\right|\left|\vec{E}_2\right|} = \frac{3a^2}{\sqrt{3a^2}\sqrt{3a^2}} = 1 = \cos\varphi;$$

$\Leftrightarrow \varphi = 0°;$

Falsch! Richtig: $\varphi \approx 71°;$

4.97.2 Geometrie-Buch Seite 216, Aufgabe 13

$g\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix};$

$h\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ -\sqrt{3} \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix};$

Berechne den Winkel zwischen g und h.

$$\left| \frac{\vec{g}\vec{h}}{|\vec{g}|\left|\vec{h}\right|} \right| = \left| \frac{6+8}{\sqrt{9+16}\sqrt{4+4+1}} \right| = \left| \frac{14}{5 \cdot 3} \right| = \left| \tfrac{14}{15} \right| = \cos\varphi;$$

$\varphi \approx 21°;$

4.97.3 Geometrie-Buch Seite 217, Aufgabe 17

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix};$

a) Bestimme $\vec{a}_b$, die Projektion von $\vec{b}$ in Richtung $\vec{a}$.

$\cos\varphi = \frac{5-1-1}{\sqrt{25+1+1}\sqrt{1+1+1}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3};$

$\vec{a}_b = \left|\vec{b}\right| \cos\varphi \cdot \vec{a}^0 = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\vec{a}}{\sqrt{27}} = \frac{1}{3}\frac{1}{3}\vec{a} = \frac{1}{9}\vec{a};$

b) Bestimme $\vec{b}_a$, die Projektion von $\vec{a}$ in Richtung $\vec{b}$.

$\vec{b}_a = |\vec{a}| \cos\varphi \cdot \vec{b}^0 = \sqrt{27} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\vec{b}}{\sqrt{3}} = \vec{b};$

c) Welche Besonderheit haben $\vec{a}$ und $\vec{b}$, wenn gilt $\vec{b}_a = \vec{b}$?

$\vec{b}_a \stackrel{!}{=} b$; (Formel von d)) bringt:

$\vec{a}\vec{b} \stackrel{!}{=} \vec{b}\vec{b};$

```
         ^
        /.
     b/ .
      /  .
     /   .
   ----->
      a
```

d) Zeige allgemein: $\vec{a}_b = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|a|^2} \cdot \vec{a};$

$\vec{a}_b = \left|\vec{b}\right| \cos\varphi \cdot \vec{a}^0 = \left|\vec{b}\right| \cdot \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|} \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a};$

09.10.2006

„Theologie ist der Versuch, Axiome auf einem Gebiet aufzustellen, auf dem es keine Axiome gibt bzw. auf dem Axiome nicht sinnvoll sind“

„Das Schöne an der Mathematik ist, dass sie mit der Realität nichts zu tun hat.“ 09.10.2006

4.98 101. Hausaufgabe

4.98.1 Geometrie-Buch Seite 208, Aufgabe 8

Zeige, dass die Punkte auf einer Kugel um $M(-20,-20,-4)$ liegen, und berechne den Kugelradius r.

$A(12,-12,-3); \quad \left|\overrightarrow{MA}\right| = 33;$

$B(12,-13,0); \quad \left|\overrightarrow{MB}\right| = 33;$

$C(8,-3,0); \quad \left|\overrightarrow{MC}\right| = 33;$

$D(8,-4,3); \quad \left|\overrightarrow{MD}\right| = 33;$

$E(5,0,4); \quad \left|\overrightarrow{ME}\right| = 33;$

$F(0,0,13); \quad \left|\overrightarrow{MF}\right| = 33;$

4.98.2 Geometrie-Buch Seite 209, Aufgabe 10b

Durch $A(4,-5,3)$ und $B(6,-3,2)$ geht die Grade g.

Bestimme die Punkte auf g, die von B die Entfernung 9 haben.

$g\colon \vec{X} = \vec{B} + \mu\overrightarrow{BA};$

$\left|\overrightarrow{BX}\right| = |\mu| \left|\overrightarrow{BA}\right| = 3\,|\mu| = 9;$

$\Leftrightarrow |\mu| = 3;$

$\vec{X}(3) = \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad \vec{X}(-3) = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix};$ 10.10.2006

4.99 102. Hausaufgabe

4.99.1 Geometrie-Buch Seite 215, Aufgabe 3c

Zeige, dass die Ortsvektoren $\vec{A}$, $\vec{B}$ und $\vec{C}$ einen Würfel aufspannen.

$\vec{A} = \begin{pmatrix} a \\ a+1 \\ a(a+1) \end{pmatrix}; \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} a+1 \\ -a(a+1) \\ a \end{pmatrix}; \quad \vec{C} = \begin{pmatrix} a(a+1); \\ a \\ -a-1 \end{pmatrix};$

$\left|\vec{A}\right| = \left|\vec{B}\right| = \left|\vec{C}\right| = \sqrt{a^2 + (a^2 + 2a + 1) + (a^3 + 2a^2 + a)} = \sqrt{a^3 + 4a^2 + 3a + 1};$

$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{C} = \vec{C} \cdot \vec{A} = a\,(a+1) - (a+1)^2\,a + a^2\,(a+1) = a^2 + a - a^3 - 2a^2 - a + a^3 + a^2 = 0;$

4.99.2 Geometrie-Buch Seite 215, Aufgabe 4b

Für welche Werte von u ist $\vec{a} \perp \vec{b}$, $\vec{a} \perp \vec{b}$, $\vec{b} \perp \vec{c}$?

$\vec{a} = \begin{pmatrix} u+1 \\ 2-u \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} u \\ u+2 \\ u+4 \end{pmatrix}; \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2-3u \\ u \\ 2+2u \end{pmatrix};$

$\vec{a}\vec{b} = u^2 + u - (u^2 - 4) - u - 4 = 0;$

$\vec{b}\vec{c} = 2u - 3u^2 + u^2 + 2u + 2u + 2u^2 + 8 + 8u = 14u + 8 = 0; \Leftrightarrow u = -\frac{4}{7};$

$\vec{a}\vec{c} = 2u - 3u^2 + 2 - 3u + 2u - u^2 - 2 - 2u = -u - 4u^2 = 0; \Leftrightarrow u_1 = 0; \quad u_2 = -\frac{1}{4};$

4.99.3 Geometrie-Buch Seite 216, Aufgabe 10b

Berechne die Winkel des Dreiecks ABC.

$A(1, -6, -6); \quad B(2, 2, -2); \quad C(0, -2, 2);$

$\frac{\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \frac{-1+32+32}{\sqrt{1^2+4^2+8^2}\sqrt{1^2+8^2+4^2}} = \frac{63}{81} = \frac{7}{9} = \cos\alpha;$

$-\frac{\overrightarrow{BC}\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{BC}\right|\left|\overrightarrow{AB}\right|} = -\frac{-2-32}{\sqrt{(-2)^2+(-4)^2+0^2}\sqrt{1^2+8^2+4^2}} = \frac{34}{9\sqrt{20}} = \cos\beta;$

$\frac{\overrightarrow{AC}\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|\left|\overrightarrow{BC}\right|} = \frac{2-16}{\sqrt{1^2+4^2+8^2}\sqrt{(-2)^2+(-4)^2+0^2}} = \frac{-14}{9\sqrt{20}} = \cos\gamma;$

4.99.4 Geometrie-Buch Seite 217, Aufgabe 16a

$g\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad h\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix};$

Berechne den Schittwinkel von g und h.

$$\left|\frac{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-5\\10\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right|\left|\begin{pmatrix}1\\-5\\10\end{pmatrix}\right|}\right| = \left|\frac{1-10+30}{\sqrt{14}\sqrt{126}}\right| = \cos\varphi;$$

12.10.2006

4.100 103. Hausaufgabe

4.100.1 Geometrie-Buch Seite 231, Aufgabe 15a

Untersuche, ob g und h windschief sind, berechne gegebenenfalls den Abstand $d(g,h)$ und die Endpunkte der gemeinsamen Lotstrecke.

$g\colon \vec{X} = \begin{pmatrix}-4\\1\\7\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-3\\-1\\4\end{pmatrix}; \quad h\colon \vec{X} = \begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}4\\3\\-2\end{pmatrix};$

$\vec{g}$ und $\vec{h}$ sind nicht kollinear.

Gleichsetzen von $\vec{X}_g$ und $\vec{X}_h$ bringt:

$$\begin{array}{rcrcr} -3\lambda & - & 4\mu & = & 8; \\ -\lambda & - & 3\mu & = & 0; \\ 4\lambda & + & 2\mu & = & -7; \end{array}$$

Auflösen bringt Widerspruch für μ ($\frac{7}{10} \neq \frac{8}{5}$), also sind g und h windschief.

$\overrightarrow{X_gX_h} \cdot \vec{g} = -3\,(8+4\mu+3\lambda) - (3\mu+\lambda) + 4\,(-7-2\mu-4\lambda) = -52 - 23\mu - 26\lambda \stackrel{!}{=} 0;$

$\overrightarrow{X_gX_h} \cdot \vec{h} = 4\,(8+4\mu+3\lambda) + 3\,(3\mu+\lambda) - 2\,(-7-2\mu-4\lambda) = 46 + 29\mu + 23\lambda \stackrel{!}{=} 0;$

Auflösen bringt für λ: $\lambda = \frac{-46-29\mu}{23}$;

Einsetzen in die erste Gleichung bringt: $(\mu, \lambda) = (0, -2)$;

$\vec{X}_g(-2) = \begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}; \quad \vec{X}_h(0) = \begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix};$

$\left|\overrightarrow{X_g(-2)X_h(0)}\right| = 3;$

4.100.2 Geometrie-Buch Seite 223, Aufgabe 16

$g\colon \vec{X} = \lambda\begin{pmatrix}6\\-10\\3\end{pmatrix}; \quad h\colon \vec{X} = \begin{pmatrix}-1\\16\\7\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-8\\10\\1\end{pmatrix};$

g ist die Achse eines Zylinders Z mit Radius 11.

Berechne die Schnittpunkte von Z und h.

Idee: Beschreibung eines jeden Raumpunkts durch ein Koordinatensystem, das von g und zwei anderen Geraden aufgespannt wird.

- **Berechnung eines auf g̃ senkrecht stehenden Vektors.**

  $\vec{g}\vec{a} = 6a_1 - 10a_2 + 3a_3 \stackrel{!}{=} 0;$

  Eine Gleichung, drei Unbekannte → zwei Freiheitsgrade

  Wahl von a_1 zu 1. Dann Auflösen nach a_2:

  $a_2 = \frac{3a_3+6}{10};$

  Wahl von a_3 zu 1. Dann ist $\vec{a}$:

  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{9}{10} \\ 1 \end{pmatrix};$

  Um Brüche zu vermeiden, „erweitern" wir $\vec{a}$:

  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix};$

- **Berechnung eines zweiten Vektors, der auf g̃ senkrecht steht und nicht zu ã kollinear ist.**

  Wahl von b_3 zu 2. Dann ist $\vec{b}$ (erweitert):

  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix};$

- **Aufstellung der Gleichung für die zu g̃ senkrechten Flächen mit Aufpunkt $\tilde{\mathrm{X}}_\mathrm{g}$.**

  $\Lambda\colon \vec{X} = \vec{X}_g + \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \lambda \begin{pmatrix} -6 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix};$

- **Zusätzliche Bedingungen, damit Λ zu einem Zylinder eingeschränkt wird.**

  $\left|\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}\right| = 11;$

  $(10\alpha + 5\beta)^2 + (9\alpha + 6\beta)^2 + (10\alpha + 10\beta)^2 = 281\alpha^2 + 161\beta^2 + 408\alpha\beta = 121;$

- **Zusammenfassung der Gleichungen.**

  $$\begin{array}{rcrcrcrcr} 6\lambda & + & 10\alpha & + & 5\beta & + & 8\mu & = & -1; \\ -10\lambda & + & 9\alpha & + & 6\beta & - & 10\mu & = & 16; \\ 3\lambda & + & 10\alpha & + & 10\beta & - & \mu & = & 7; \end{array}$$

  Sowie:

  $281\alpha^2 + 161\beta^2 + 408\alpha\beta = 121;$

- **Auflösen.**

λ	μ	α	β	Schnittpunkt
0	-1	$\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$(7,6,6)$
1	-2	$\frac{8}{5}$	$-\frac{7}{5}$	$(15,-4,5)$

15.10.2006

Alternativ, viel einfacher:

$\overrightarrow{QP}\cdot\vec{g}=0;\quad \overrightarrow{QP}^2=121;\quad$ mit $\vec{Q}=\vec{X}_h$ und $\vec{P}=\vec{X}_g$;

„[augenscheinlich] wisst ihr schon, dass es gefährlich sein kann, wenn man ins Gravitationszentrum fliegt. . . “ 14.10.2006

4.101 104. Hausaufgabe

4.101.1 Geometrie-Buch Seite 232, Aufgabe 17

$g\colon \vec{X}=\begin{pmatrix}0\\17\\5\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\8\\4\end{pmatrix};\quad h\colon \vec{X}=\begin{pmatrix}-7\\9\\16\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-3\\4\\4\end{pmatrix};$

a) Die Kugel hat ihren Mittelpunkt auf h und berührt g.

Bestimme ihren Mittelpunkt M und Radius r in Abhängigkeit von μ.

Für welchen Wert von μ ist der Radius minimal?

$M\in h;\quad X_K\in g;\quad \left|\overrightarrow{X_KM}\right|=r;\quad \overrightarrow{X_KM}\cdot\vec{g}=0;$

Auflösen gibt für λ: $\lambda=\frac{5}{9}\mu-\frac{1}{3}$;

$\vec{X}_K=\vec{X}_g(\lambda)=\begin{pmatrix}\frac{5}{9}\mu-\frac{1}{3}\\\frac{40}{9}\mu+\frac{43}{3}\\\frac{20}{9}\mu+\frac{11}{3}\end{pmatrix};$

$r=\overrightarrow{X_KM}=\sqrt{16\mu^2+96\mu+225};$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\overrightarrow{X_KM}^2=32\mu+96\overset{!}{=}0;\Leftrightarrow\mu=-3;$

b) Bestimme Mittelpunkt M und Radius r der kleinsten Kugel, deren Mittelpunkt auf h liegt und die g als Tangente hat.

$\mu=-3;$

$\vec{X}_K=\vec{X}_g(\lambda)=\vec{X}_g\left(\frac{5}{9}(-3)-\frac{1}{3}\right)=\begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix};$

$\vec{M}=\begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix};$

$r=\sqrt{16\,(-3)^2+96\,(-3)+255}=9;$

c) Bestimme Mittelpunkt und Radius der kleinsten Kugel, die h und g als Tangenten hat.

Ansatz: $\overrightarrow{QP} \cdot \vec{g} = \overrightarrow{QP} \cdot \vec{h} = 0$; (Bei der kleinsten Kugel sind $\overrightarrow{MQ}$ und $\overrightarrow{MP}$ (anti-)parallel.)

$r = 4{,}5; \quad \vec{M} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1{,}5 \end{pmatrix};$

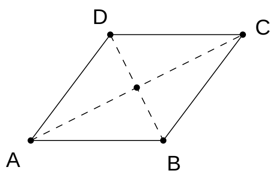
16.10.2006

4.102 105. Hausaufgabe

4.102.1 Geometrie-Buch Seite 235, Aufgabe 1

Beweise folgenden Satz mit dem Skalarprodukt:

In jeder Raute stehen die Diagonalen aufeinander senkrecht.



$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} &= \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}\right) = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)\left(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}\right) = \\
&= -\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}\right) = -\left(\overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{BC}^2\right) = \\
&= -\left(\left|\overrightarrow{AB}\right| - \left|\overrightarrow{BC}\right|\right) = 0;
\end{aligned}$$

4.102.2 Geometrie-Buch Seite 235, Aufgabe 4

Beweise folgenden Satz mit dem Skalarprodukt:

Satz über die Höhen im Dreieck:

Die drei Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.

Voraussetzung: $\overrightarrow{CS}\overrightarrow{AB} = 0; \quad \overrightarrow{AS}\overrightarrow{BC} = 0;$

Behauptung: $\overrightarrow{BS}\overrightarrow{AC} = 0;$

Begründung der Behauptung: Wenn $\overrightarrow{BS}$ auf $\overrightarrow{AC}$ tatsächlich senkrecht steht, dann ist BS die Höhe des Dreiecks auf B. Das kann aber nur dann der Fall sein, wenn die Höhe auch tatsächlich durch S geht.

17.10.2006

4.103 106. Hausaufgabe

4.103.1 Geometrie-Buch Seite 230, Aufgabe 7

Gib die Gleichung einer Ursprungsgeraden u an, die $g\colon \vec{X} = \left(\begin{smallmatrix}3\\5\\1\end{smallmatrix}\right) + \mu \left(\begin{smallmatrix}2\\1\\3\end{smallmatrix}\right)$ senkrecht schneidet.

$\left|\vec{X}\right|^2 = (3+2\mu)^2 + (5+\mu)^2 + (1+3\mu)^2 = 35 + 28\mu + 14\mu^2;$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\left|\vec{X}\right|^2 = 28\mu + 28 \stackrel{!}{=} 0; \Leftrightarrow \mu = -1;$

$u\colon \vec{X} = \lambda \vec{X}_g(-1) = \lambda \left(\begin{smallmatrix}1\\4\\-2\end{smallmatrix}\right);$

4.103.2 Geometrie-Buch Seite 230, Aufgabe 8

$g\colon \vec{X} = \left(\begin{smallmatrix}3\\1\\1\end{smallmatrix}\right) + \mu \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\2\end{smallmatrix}\right); \quad P(1,-1,1);$

a) Berechne den Fußpunkt F des Lots von g durch P.

$\left|\overrightarrow{PX}\right|^2 = \left|\left(\begin{smallmatrix}2\\2\\0\end{smallmatrix}\right) + \mu \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\2\end{smallmatrix}\right)\right|^2 = 8 + 4\mu + 5\mu^2;$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\left|\overrightarrow{PX}\right|^2 = 4 + 10\mu \stackrel{!}{=} 0; \Leftrightarrow \mu = -\frac{2}{5};$

$\vec{F} = \vec{X}_g\left(-\frac{2}{5}\right) = \begin{pmatrix}3\\3/5\\1/5\end{pmatrix};$

b) Gib eine Gleichung der Normalen n von g durch P an.

$n\colon \vec{X} = \vec{F} + \lambda\overrightarrow{FP} = \begin{pmatrix}3\\3/5\\1/5\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}-2\\-8/5\\4/5\end{pmatrix};$

c) Berechne den Abstand von P und g.

$\left|\overrightarrow{PF}\right| = \left|\overrightarrow{PX\left(\frac{2}{5}\right)}\right| = \sqrt{8 + 4\left(-\frac{2}{5}\right) + 5\left(-\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{6}{\sqrt{5}};$

d) P' und P sind symmetrisch bezüglich g. Berechne P'.

$\vec{P}' = \vec{X}_n(-1) = \begin{pmatrix}5\\11/5\\-3/5\end{pmatrix};$

4.103.3 Geometrie-Buch Seite 230, Aufgabe 10

$g\colon \vec{X} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $h\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$; $P(1,2,3)$;

a) g an P gespiegelt ergibt g'. Gib eine Gleichung von g' an.

$$g'\colon \vec{X} = \vec{X_g} + 2\overrightarrow{X_gP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix};$$

b) P an g gespiegelt ergibt P'. Berechne P'.

$$\left|\overrightarrow{PX_g}\right|^2 = 3\mu^2 - 12\mu + 14;$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\left|\overrightarrow{PX_g}\right|^2 = 6\mu - 12 \stackrel{!}{=} 0; \Leftrightarrow \mu = 2;$$

$$\vec{P'} = \vec{P} + 2\overrightarrow{PX_g(2)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix};$$

c) h an g gespiegelt ergibt g'. Gib eine Gleichung von h' an.

$$h'\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix};$$

Möglicher Ansatz: Zwei beliebige feste Punkte spiegeln und dann eine Gerade durch die Bildpunkte legen. P hat man schon in Aufgabe b) an g gespiegelt, also müsste man nur noch einen zweiten Punkt spiegeln.

„so lange gelacht und doch ist es Realität. . . “

„der Mensch hat doch drei Hände“ 19.10.2006

4.104 107. Hausaufgabe

4.104.1 Geometrie-Buch Seite 230, Aufgabe 12

$A(29,-5,-4)$; $B(-3,-27,12)$; $M(16,11,-8)$; $P(4,8,19)$; $Q(1,-19,31)$;

g ist die Gerade durch A und B.

a) Bestimme den Punkt N auf g, der P am nächsten liegt.

$$g\colon \vec{X} = \vec{A} + \lambda\overrightarrow{AB};$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left|\overrightarrow{PN}\right|^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left|\overrightarrow{PX(\lambda)}\right|^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left|\begin{pmatrix} 25 \\ -13 \\ -23 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -32 \\ -22 \\ 16 \end{pmatrix}\right|^2 =$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left[1764\lambda^2 - 1764\lambda + 1323\right] = 3528\lambda - 1764 \stackrel{!}{=} 0;$$

$\Leftrightarrow \lambda(N) = \frac{1}{2};$

$\Leftrightarrow \vec{N} = \vec{X}_g\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 13 \\ -16 \\ 4 \end{pmatrix};$

b) g ist Tangente einer Kugel um M.

Berechne den Berührpunkt T und den Kugelradius r_b.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left|\overrightarrow{MT}\right|^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left|\overrightarrow{MX(\lambda)}\right|^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left|\begin{pmatrix} 13 \\ -16 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} -32 \\ -22 \\ 16 \end{pmatrix}\right|^2 =$$
$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left[1764\lambda^2 + 441\right] = 3528\lambda \stackrel{!}{=} 0;$$

$\Leftrightarrow \lambda(T) = 0; \quad \vec{T} = \vec{A}$

$\Leftrightarrow r_b = \sqrt{441} = 21;$

c) Berechne Radius r_c und Mittelpunkt M_c der kleinsten aller Kugeln, die durch M gehen und deren Mittelpunkte auf g liegen.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left|\overrightarrow{MM_c}\right|^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left|\overrightarrow{MX(\lambda)}\right|^2 = 3528\lambda \stackrel{!}{=} 0;$$

$\Leftrightarrow \lambda(M_c) = 0; \quad \vec{M}_c = \vec{A};$

$\Leftrightarrow r_c = 21;$

d) Berechne Radius r_d und Mittelpunkt M_d der kleinsten aller Kugeln, die durch M gehen und g berühren. Berechne den Berührpunkt T.

Siehe a).

e) Berechne Radius r_e und Mittelpunkt M_e der kleinsten aller Kugeln, die durch Q gehen und g als Zentrale haben.

Berechne die Schnittpunkte von g und dieser Kugel; was für ein Dreieck bilden der Ursprung und die Schnittpunkte?

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left|\overrightarrow{QM_e}\right|^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left|\overrightarrow{QX(\lambda)}\right|^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left|\begin{pmatrix} 28 \\ 14 \\ -35 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} -32 \\ -22 \\ 16 \end{pmatrix}\right|^2 =$$
$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left[1764\lambda^2 - 3528\lambda + 2205\right] = 3528\lambda - 3528 \stackrel{!}{=} 0;$$

$\Leftrightarrow \lambda = 1; \quad \vec{M}_e = \vec{X}(1) = \begin{pmatrix} -3 \\ -27 \\ 12 \end{pmatrix};$

$\Leftrightarrow r_e = \sqrt{1674 - 3528 + 2205} = \sqrt{441} = 21;$

$g'\colon \vec{X} = \vec{A} + \lambda\overrightarrow{AB}^0;$

Schnittpunkte von g mit dem Kreis ergeben sich durch $\vec{X}_{g'}(\pm r_e)$ zu $S_1 = (-19, -38, 20)$ und $S_2 = (13, -16, 4)$.

Das Dreieck gebildet durch Ursprung und den zwei Schnittpunkten ist rechtwinklig: $\left|\overrightarrow{0S_1}\right|^2 - \left|\overrightarrow{0S_2}\right|^2 = 2205 - 441 = 1764 = \left|\overrightarrow{S_1S_2}\right|^2$;

f) Bestimme eine Gleichung der Normalen n von g durch Q.

$n\colon \vec{X} = \vec{M}_e + \mu\overrightarrow{M_eQ} = \begin{pmatrix}-3\\-27\\12\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}4\\8\\19\end{pmatrix}$;

g) Q an g gespiegelt ergibt Q'. Berechne Q'.

$\vec{Q}' = \vec{X}_n(-1) = \begin{pmatrix}-7\\-35\\-7\end{pmatrix}$;

4.104.2 Geometrie-Buch Seite 230, Aufgabe 13

g ist die Gerade durch $A(8, 13, 3)$ und $B(14, 20, -3)$, h ist die Gerade durch $C(10, 19, 12)$ und $D(-8, -2, 30)$.

a) Berechne den Abstand $d(g, h)$ von g und h.

$g\colon \vec{X} = \begin{pmatrix}8\\13\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}6\\7\\-6\end{pmatrix}$;

$h\colon \vec{X} = \begin{pmatrix}10\\19\\12\end{pmatrix} + \mu'\begin{pmatrix}-18\\-21\\18\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\19\\12\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-6\\-7\\6\end{pmatrix}$;

$\overrightarrow{X_gX_h} = \begin{pmatrix}2\\6\\9\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-6\\-7\\6\end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix}6\\7\\-6\end{pmatrix}$;

$\overrightarrow{X_gX_h} \cdot \vec{g} = \overrightarrow{X_gX_h} \cdot \vec{h} = 0$;

$\overrightarrow{X_gX_h} \cdot \vec{g} = (12 - 36\mu - 36\lambda) + (42 - 49\mu - 42\lambda) + (-54 - 36\mu - 36\lambda) = -23\mu - 23\lambda = 0; \Leftrightarrow \mu = -\lambda$;

$\left|\overrightarrow{X_g(\lambda)X_h(-\lambda)}\right| = \left|\begin{pmatrix}2\\6\\9\end{pmatrix}\right| = \sqrt{4 + 36 + 81} = 11$;

b) Bestimme eine Gleichung der Mittelparallelen m von g und h.

$m\colon \vec{X} = \vec{X}_g + \frac{\overrightarrow{X_g(\lambda)X_h(-\lambda)}}{2} = \begin{pmatrix}9\\16\\7{,}5\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}6\\7\\-6\end{pmatrix}$;

c) g an h gespiegelt ergibt u, und h an g gespiegelt ergibt v.

Bestimme Gleichungen von u und v.

$u\colon \vec{X} = \vec{X}_g + 2\overrightarrow{X_g(\lambda)X_h(-\lambda)} = \begin{pmatrix}12\\25\\21\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}6\\7\\-6\end{pmatrix}$;

$v\colon \vec{X} = \vec{X}_h - 2\overrightarrow{X_g(\lambda)X_h(-\lambda)} = \begin{pmatrix}6\\7\\-6\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-6\\-7\\6\end{pmatrix}$;

d) Wo liegen die Mittelpunkte der Kugeln, die g und h berühren?

$k\colon \vec{X} = \vec{X}_m + \sigma\left(\overrightarrow{X_g(\lambda)X_h(-\lambda)} \times \vec{g}\right) = \begin{pmatrix} 9 \\ 16 \\ 7{,}5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -36-63 \\ 54+12 \\ 14-36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 16 \\ 7{,}5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -99 \\ 66 \\ -22 \end{pmatrix};$

e) Wo liegen die Mittelpunkte der kleinstmöglichen Kugeln, die g und h berühren?

Auf m.

4.104.3 Geometrie-Buch Seite 230, Aufgabe 14

$g_a\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad a \in \mathbb{Z};$

$M(-5, 5, 5); \quad V(6, 18, 6); \quad W(-6, 12, 0);$

a) Beschreibe die Schar g_a, welchen Abstand haben benachbarte Schargeraden?

Welche besondere Lage im Koordinatensystem hat die Mittelparallele von g_7 und g_{-7}?

Die Schar besteht aus unendlich vielen parallelen Geraden.

$\left|\vec{X}_{g_a} - \vec{X}_{g_{a+1}}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right| = 1;$

Mittelparallele von g_7 und g_{-7} ist $g_0\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, eine Gerade in der x_1–x_2-Ebene.

b) Welche Schargeraden haben vom Ursprung den Abstand 7?

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\left|\overrightarrow{0X}\right|^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\left[50 + a^2 + 10\mu + 5\mu^2\right] = 10 + 10\mu \stackrel{!}{=} 0;$

$\Leftrightarrow \mu = -1;$

$\left|\overrightarrow{0X(-1)}\right| = \sqrt{45 + a^2} \stackrel{!}{=} 7; \Leftrightarrow a = \pm 2;$

c) Welche Schargeraden berühren die Kugeln um M mit Radius 9?

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\left|\overrightarrow{MX}\right|^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\left|\begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ a-5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right|^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\left[185 + a^2 - 10a + 40\mu + 5\mu^2\right] = 40 + 10\mu \stackrel{!}{=} 0;$

$\Leftrightarrow \mu = -4;$

$\left|\overrightarrow{MX(-4)}\right| = \sqrt{185 + a^2 - 10a - 80} \stackrel{!}{=} 9; \Leftrightarrow a^2 - 10a + 96 = 0;$

$D = 100 - 4 \cdot 1 \cdot 96 < 0$; $\Leftrightarrow$ keine Schargerade berührt die Kugel um M mit Radius 9.

d) Bezüglich welcher Schargerade sind V und W symmetrisch?

$\vec{V} + \frac{1}{2}\overrightarrow{VW} = \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 3 \end{pmatrix}$;

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} \left| \vec{X} - \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 3 \end{pmatrix} \right|^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} \left[154 + a^2 - 6a + 70\mu + 5\mu^2\right] = 70 + 10\mu \stackrel{!}{=} 0$;

$\Leftrightarrow \mu = -7$;

$\left| \vec{X}(-7) - \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 3 \end{pmatrix} \right|^2 = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a-3 \end{pmatrix} \right|^2 = a^2 - 6a + 9 \stackrel{!}{=} 0$;

$\Leftrightarrow a = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2} = 3$;

10.11.2006

4.105 109. Hausaufgabe

4.105.1 Geometrie-Buch Seite 248, Aufgabe 1

Berechne das Volumen V des von $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ aufgespannten Spats:

a) $\vec{u} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$;

$V = |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})| = |(-4)\left[(-5) \cdot 3\right] + 2 \cdot \left[(-2) \cdot 2 + 2 \cdot 5\right]| = 72$;

b) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$;

$V = |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})| = |\left[5 \cdot 1 - 2 \cdot 4\right] + 2\left[3 \cdot 4 - 4 \cdot 1\right] + 3\left[4 \cdot 2 - 5 \cdot 3\right]| = 8$;

4.105.2 Geometrie-Buch Seite 249, Aufgabe 4

$A(1, 1, 5)$; $\quad B(5, 1, 5)$; $\quad C(2, 5, 5)$; $\quad D(0, 3, 5)$; $\quad$ Spitze $S(4, 1, -1)$;
Berechne das Volumen der Pyramide $ABCDS$

a) durch Zerlegen in zwei dreiseitige Pyramiden.

[XXX Mit „dreiseitige Pyramide“ ist eine Pyramide mit einem Dreieck als Grundfläche gemeint.]

b) mit der Formel $V = \frac{1}{3}Gh$.

$V = \frac{1}{3}Gh = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right| \cdot \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AC} \right| \cdot \left[5 - (-1)\right] = 48$;

[XXX 22 ist korrekt.]

13.11.2006

4.106 110. Hausaufgabe

4.106.1 Analysis-Buch Seite 256, Aufgabe 5

Entscheide, ob das Integral konvergiert, und berechne gegebenenfalls seinen Wert:

a) $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = [\ln x]_1^\infty = \infty;$

b) $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^\infty = 1;$

c) $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_1^\infty = \frac{1}{2};$

e) $\int\limits_1^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\right]_1^\infty = \infty;$

f) $\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,\mathrm{d}x = [3\sqrt[3]{x}]_1^\infty = \infty;$

g) $\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right]_1^\infty = 3;$

15.11.2006

4.107 111. Hausaufgabe

4.107.1 Analysis-Buch Seite 255, Aufgabe 1

Entscheide, ob das Integral konvergiert und berechne gegebenenfalls seinen Wert.

a) $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\alpha\to 0+} \left[\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\right]_\alpha^1 = \frac{3}{2};$

b) $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\alpha\to 0+} [3\sqrt[3]{x}]_\alpha^1 = 3;$

c) $\int\limits_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\alpha\to 0+} \left[-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right]_\alpha^1 = \infty;$

d) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt[3]{x^4}}\,\mathrm{d}x = 0;$

e) $\int\limits_{-16}^{16} \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,\mathrm{d}x = 2 \cdot \int\limits_{0}^{16} \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,\mathrm{d}x = 2 \cdot \lim\limits_{\alpha\to 0+} \left[2\sqrt{x}\right]_{\alpha}^{16} = 2 \cdot 8 = 16;$

17.11.2006

4.108 112. Hausaufgabe

4.108.1 Analysis-Buch Seite 255, Aufgabe 1

Entscheide, ob das Integral konvergiert und berechne gegebenenfalls seinen Wert.

g) $\int\limits_{0}^{\pi/2} \underbrace{\frac{1}{\sin^2 x}}_{\frac{1}{\frac{1}{2}(1-\cos 2x)}}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\alpha\to 0+} \left[-\frac{1}{\tan x}\right]_{\alpha}^{\pi/2} = \infty;$

h) $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{2}-} \tan\alpha + \lim\limits_{\beta\to\frac{\pi}{2}+} -\tan\beta = \infty;$

4.108.2 Analysis-Buch Seite 256, Aufgabe 8

Für welche Werte a konvergiert das Integral:

a) $\int\limits_{1}^{\infty} x^a\,\mathrm{d}x$

Analyse der Definiertheit des Integranden: Für alle $a \in \mathbb{R}$ definiert, da $x > 0$.

Analyse für $a = -1$: $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \infty;$

Analyse für $a \neq -1$: $\int\limits_{1}^{\infty} x^a\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\alpha\to\infty} \left[\frac{\alpha^{a+1}}{a+1}\right]_{1}^{\alpha} = \begin{cases} \infty & \text{für } a > -1; \\ -\frac{1}{a+1} & \text{für } a < -1; \end{cases}$

b) $\int\limits_{0}^{\infty} x^a\,\mathrm{d}x$

Integrand bei $x = 0$ für $a = 0$ nicht definiert. In diesem Fall divergiert das Integral bestimmt.

$$\int x^a \,\mathrm{d}x = \begin{cases} \ln x + C & \text{für } a = -1; \\ \frac{x^{a+1}}{a+1} + C & \text{sonst}; \end{cases}$$

$$\int\limits_0^\infty x^a \,\mathrm{d}x = \begin{cases} \lim\limits_{\alpha\to\infty} \left[\alpha^a - 0\right] = \infty & \text{für } a > -1; \\ \int\limits_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\alpha\to 0+} -\ln\alpha + \lim\limits_{\beta\to\infty} \ln\beta = \infty & \text{für } a = -1; \\ \int\limits_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\alpha\to 0+} -\frac{\alpha^{a+1}}{a+1} + \lim\limits_{\beta\to\infty} \frac{\beta^{a1}}{a+1} = \infty & \text{für } a < -1; \end{cases}$$

20.11.2006

4.109 113. Hausaufgabe

4.109.1 Analysis-Buch Seite 256, Aufgabe 15

a) $\int \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \int \sin x \left(-\cos x\right)' \mathrm{d}x = -\sin x \cos x + \int \underbrace{\cos^2 x}_{1-\sin^2 x} \,\mathrm{d}x = -\sin x \cos x + x - \int \sin^2 \,\mathrm{d}x$;

$\Leftrightarrow \int \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x - \sin x \cos x\right)$;

$\int\limits_0^\pi \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[x - \sin x \cos x\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$;

b) $\int\limits_1^e x \ln x \,\mathrm{d}x = \int\limits_1^e \left(\frac{1}{2}x^2\right)' \cdot \ln x \,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2 \cdot \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2}x^2 \,\mathrm{d}x\right]_1^e = \left[\frac{1}{2}x^2 \cdot \ln x - \frac{1}{4}x^2\right]_1^e = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$;

c) $\int\limits_1^{e^2} \sqrt{x} \ln x \,\mathrm{d}x = \int\limits_1^{e^2} \left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)' \cdot \ln x \,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}x^{3/2} \cdot \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{2}{3}x^{3/2} \,\mathrm{d}x\right]_1^{e^2} = \frac{2}{3}\left[x^{3/2} \cdot \ln x - \frac{2}{3}x^{3/2}\right]_1^{e^2} = \frac{8}{9}e^3 + \frac{4}{9}$;

d) $\int\limits_{\sqrt{e}}^e \ln^2 x \,\mathrm{d}x = \int\limits_{\sqrt{e}}^e x' \cdot \ln^2 x \,\mathrm{d}x = \left[x \cdot \ln^2 x - \int x \cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x\right]_{\sqrt{e}}^e = \left[x \cdot \ln^2 x - 2\int x \ln x \,\mathrm{d}x\right]_{\sqrt{e}}^e = \left[x \cdot \ln^2 x - 2\left(x \cdot \ln x - x\right)\right]_{\sqrt{e}}^e = \left[x \cdot \left(\ln^2 x - 2\ln x + 2\right)\right]_{\sqrt{e}}^e = e - \frac{5}{4}\sqrt{e}$;

22.11.2006

4.110 114. Hausaufgabe

4.110.1 Analysis-Buch Seite 256, Aufgabe 14a

$\int e^x \sin x \,\mathrm{d}x = e^x \sin x - \int e^x \cos x \,\mathrm{d}x = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \,\mathrm{d}x; \Leftrightarrow$
$\int e^x \sin x \,\mathrm{d}x = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x);$

$\int\limits_0^{\pi/2} e^x \sin x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(e^{\pi/2} + 1\right);$

4.110.2 Analysis-Buch Seite 256, Aufgabe 15

e) $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} \ln x^2 \,\mathrm{d}x = 2\int\limits_{0}^{1} \ln x^2 \,\mathrm{d}x = 2\int\limits_{0}^{1} x' \cdot \ln x^2 \,\mathrm{d}x = \lim_{\alpha\to 0+} 2\left[x \ln x^2 - \int \underbrace{x \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x}_{2} \,\mathrm{d}x\right]_\alpha^1 =$

$\displaystyle\lim_{\alpha\to 0+} 2\left[x \ln x^2 - 2x\right]_\alpha^1 = -4;$

f) $\displaystyle\int\limits_{1}^{\sqrt{2}} x \ln\left(1+x^2\right) \,\mathrm{d}x = \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2}x^2\right)' \ln\left(1+x^2\right) \,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2 \ln\left(1+x^2\right) - \int \underbrace{\frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x}_{\frac{x^3}{1+x^2}} \,\mathrm{d}x\right]_1^{\sqrt{2}} =$

$\displaystyle\left[\frac{1}{2}x^2 \ln\left(1+x^2\right) - \int x \,\mathrm{d}x - \underbrace{\frac{x}{1+x^2}}_{\frac{(1+x^2)'}{1+x^2}\cdot\frac{1}{2}} \,\mathrm{d}x\right]_1^{\sqrt{2}} = \left[\frac{1}{2}x^2 \ln\left(1+x^2\right) - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|\right]_1^{\sqrt{2}} =$

$\displaystyle\frac{1}{2}\left[\left(1+x^2\right)\ln\left(1+x^2\right) - x^2\right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\left(3\ln 3 - 2\ln 2 - 1\right);$

g) $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} x^{-1/2} \ln x \,\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{1} \left(2x^{1/2}\right)' \ln x \,\mathrm{d}x = \lim_{\alpha\to 0+} \left[2\sqrt{x}\ln x - \int 2\underbrace{x^{1/2}x^{-1}}_{x^{-1/2}} \,\mathrm{d}x\right]_\alpha^1 = \lim_{\alpha\to 0+} \left[2\sqrt{x}\left(\ln x - 2\right)\right]_\alpha^1 =$

$-4;$

4.110.3 Analysis-Buch Seite 256, Aufgabe 17a

Zeige, dass gilt:

$$\int \sin^n x \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{n}(\sin x)^{n-1}\cos x + \frac{n-1}{n}\int (\sin x)^{n-2} \,\mathrm{d}x;$$

$$\left[-\tfrac{1}{n}\left(\sin x\right)^{n-1}\cos x + \tfrac{n-1}{n}\int\left(\sin x\right)^{n-2}\mathrm{d}x\right]' =$$

$$= \tfrac{1}{n}\left[\left(\sin x\right)^{n-1}\sin x - (n-1)\left(\sin x\right)^{n-2}\underbrace{\cos^2 x}_{1-\sin^2 x} + (n-1)\left(\sin x\right)^{n-2}\right] =$$

24.11.2006

$$= \tfrac{1}{n}\sin^n x\left[1-(n-1)\left(\sin x\right)^{-2}\left(1-\sin^2 x - 1\right)\right] =$$

$$= \tfrac{1}{n}\sin^n x\cdot(1+n-1) = \sin^n x;$$

4.111 115. Hausaufgabe

4.111.1 Analysis-Buch Seite 256, Aufgabe 15h

$$\int\limits_0^\infty x^2 e^{-x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^\infty x^2\left(-e^{-x}\right)'\,\mathrm{d}x = \lim_{\alpha\to\infty}\left[-x^2e^{-x} - \int 2x\left(-e^{-x}\right)\mathrm{d}x\right]_0^\alpha =$$
$$\lim_{\alpha\to\infty}\left[-x^2e^{-x} + 2\int x\left(-e^{-x}\right)'\,\mathrm{d}x\right]_0^\alpha = \lim_{\alpha\to\infty}\left[-x^2e^{-x} + 2\left(-xe^{-x} - \int -e^{-x}\,\mathrm{d}x\right)\right]_0^\alpha =$$
$$\lim_{\alpha\to\infty}\left[e^{-x}\left(-x^2-2x-2\right)\right]_0^\alpha = 2;$$

4.111.2 Analysis-Buch Seite 256, Aufgabe 16

a) Für $n\neq 1$:

$$\int\limits_1^a \tfrac{\ln x}{x^n}\mathrm{d}x = \int\limits_1^a \left(\tfrac{x^{1-n}}{1-n}\right)'\ln x\,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{x^{1-n}}{1-n}\ln x - \int\underbrace{\frac{x^{1-n}}{1-n}\cdot\frac{1}{x}}_{\frac{x^{-n}}{1-n}}\mathrm{d}x\right]_1^a = \left[\tfrac{x^{1-n}}{1-n}\left(\ln x - \tfrac{1}{1-n}\right)\right]_1^a =$$
$$\tfrac{a^{1-n}}{1-n}\left(\ln a - \tfrac{1}{1-n}\right) + \left(\tfrac{1}{1-n}\right)^2;$$

Für $n=1$: $\int\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \int I(\ln x)\left(\ln x\right)'\,\mathrm{d}x = \int I(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln^2 x$ mit $I(t)=t$;

c) $\int\limits_0^a x^n\ln x\,\mathrm{d}x = \left[\int\frac{\ln x}{x^{-n}}\mathrm{d}x\right]_0^a = \left[\frac{x^{1+n}}{1+n}\left(\ln x - \frac{1}{1+n}\right)\right]_0^a = \frac{a^{1+n}}{1+n}\left(\ln a - \frac{1}{1+n}\right);$

Speziell für $a=1$:

$$\int\limits_0^1 x^n\ln x\,\mathrm{d}x = -\left(\tfrac{1}{1+n}\right)^2;$$

27.11.2006

4.112 116. Hausaufgabe

4.112.1 Analysis-Buch Seite 257, Aufgabe 19

Berechne:

a) $\int\limits_0^1 2x\left(2+x^2\right)^2 \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(2+x^2\right)^2\left(2+x^2\right)' \mathrm{d}x = \left[\int t^2 \,\mathrm{d}t\right]_0^1 = \left[\frac{1}{3}\left(2+x^2\right)^3\right]_0^1 = \frac{19}{3}$;

b) $\int\limits_0^\pi \sin x \cos^3 x \,\mathrm{d}x = \int\limits_0^\pi \cos^3 x \cdot (\cos x)' \cdot (-1)\ \mathrm{d}x = \left[-\int t^3 \,\mathrm{d}t\right]_0^\pi = \left[-\frac{1}{4}\cos^4 x\right]_0^\pi = 0$;

c) $\int\limits_{-1}^1 xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^1 e^{-x^2} \cdot \underbrace{\left(-x^2\right)'}_{-2x} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\ \mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}\int e^t \,\mathrm{d}t\right]_{-1}^1 = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_{-1}^1 = 0$;

d) $\int\limits_1^e \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x\ =\ \int\limits_1^e I(\ln x)\cdot \underbrace{(\ln x)'}_{\frac{1}{x}}\mathrm{d}x\ =\ \left[\int \underbrace{I(t)}_{t}\ \mathrm{d}t\right]_1^e\ =\ \left[\frac{1}{2}\ln^2 x\right]_1^e\ =\ \frac{1}{2}$ mit $I(t) = t$;

28.11.2006

4.113 117. Hausaufgabe

4.113.1 Analysis-Buch Seite 257, Aufgabe 19

Berechne:

f) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^3}}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^3}}\cdot\left(1-x^3\right)'\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = -\frac{2}{3}\sqrt{1-x^3}+C$;

g) $\int \frac{\tan^3 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \tan^3 x\cdot(\tan x)'\,\mathrm{d}x = \int t^3\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\tan^4 x + C$;

h) $\int \frac{x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$

29.11.2006

4.114 118. Hausaufgabe

4.114.1 Analysis-Buch Seite 257, Aufgabe 22

Vertrackte Substitutionen: 04.12.2006

c) $$\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos t\,\underbrace{\sqrt{1-\cos^2 t}}_{\sin t}}\cdot(\cos t)'\,\mathrm{d}t = \int -\frac{1}{\cos t}\,\mathrm{d}t = -$$
$$\int \frac{1+\tan^2 t/2}{1-\tan^2 t/2}\,\mathrm{d}t = -\int \frac{1+z^2}{1-z^2}\cdot\underbrace{(2\arctan z)'}_{\frac{2}{x^2+1}}\,\mathrm{d}z = -2\int \frac{1}{1-z^2}\,\mathrm{d}z =$$
$$-\int \frac{1}{1+z}+\frac{1}{1-z}\,\mathrm{d}z+C = -[\ln|1+z|-\ln|1-z|]+C = -\ln\left|\frac{1+z}{1-z}\right|+$$
$$C = -\ln\left|\frac{1+\tan t/2}{1-\tan t/2}\right|+C = -\ln\left|\frac{1+\tan\left(\frac{1}{2}\arccos x\right)}{1-\tan\left(\frac{1}{2}\arccos x\right)}\right|+C;$$

Substitutionen:

$x=\cos t; \Leftrightarrow t=\arccos x;$

$t=2\arctan z; \Leftrightarrow z=\tan t/2;$ 29.11.2006

d) $\int \frac{1}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x$

4.114.2 Selbstgestellte Aufgabe

a) $\int \frac{\ln^4 x}{x}\,\mathrm{d}x = \int \ln^4 x\cdot(\ln x)'\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\ln^5 x + C;$

b) $\int \frac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int \frac{\sin u}{u}\cdot(u^2)'\,\mathrm{d}u = 2\int \sin u\,\mathrm{d}u = -2\cos u = -2\cos\sqrt{t}+C;$

02.12.2006

„ich schau´ dann recht grimmig, weil damit zerstör´ ich ihr Feindbild nocht. . . das nennt man dann »Rücksicht«“ 04.12.2006

4.115 119. Hausaufgabe

4.115.1 Analysis-Buch Seite 258, Aufgabe 32

$f(x)=\ln(x^2+4)\,;$

a) Diskutiere f und zeichne G_f.

$f(x) \stackrel{!}{=} 0$; $\rightarrow$ keine Nullstellen

$f(-x) = f(x)$; $\rightarrow$ Symmetrie zur y-Achse

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$;

$f'(x) = \frac{2x}{x^2+4} \stackrel{!}{=} 0$; $\rightarrow$ TIP bei $(0, \ln 4)$;

$f''(x) = \frac{-2x^2+8}{(x^2+4)^2} = -2 \cdot \frac{(x-2)(x+2)}{(x^2+4)^2} \stackrel{!}{=} 0$; $\rightarrow$ WEP bei $(\pm 2, \ln 8)$;

b) Berechne den Inhalt der Fläche A zwischen G_f und der Verbindungsgeraden seiner Wendepunkte. Wie verhält sich A zur Fläche jenes Rechtecks, das der Fläche A umschrieben ist?

Wie verhält sich A zur Fläche des umbeschriebenen gleichschenkligen Dreiecks, dessen Schenkel auf den Wendetangenten liegen?

$$\int \ln(x^2+4) \cdot x' \, \mathrm{d}x = x \ln(x^2+4) - \int \underbrace{\frac{1}{x^2+4} \cdot 2x \cdot x}_{\frac{2x^2}{x^2+4}} \, \mathrm{d}x =$$
$$= x \ln(x^2+4) - \int 2 \, \mathrm{d}x + \int \underbrace{\frac{8}{x^2+4}}_{\frac{2}{1+(x/2)^2}} \, \mathrm{d}x =$$
$$= x \ln(x^2+4) - 2x + 4 \int \frac{1/2}{1+(x/2)^2} \, \mathrm{d}x =$$
$$= x \ln(x^2+4) - 2x + 4 \arctan \frac{x}{2};$$

$\int \ln 8 - \ln(x^2+4) \; \mathrm{d}x = 8 - 2\pi$;

Rechteckinhalt: $[2 - (-2)] \cdot (\ln 8 - \ln 4) = \ln 16$;

Wendetangentenschnittpunkt: $f'(\pm 2) = \pm\frac{1}{2}$; $\rightarrow$ Schnittpunkt bei $\left(0, \ln 8 - 2 \cdot \frac{1}{2}\right) = (0, \ln 8 - 1)$;

Dreiecksinhalt: $\frac{1}{2} \cdot [2 - (-2)] \cdot [\ln 8 - (\ln 8 - 1)] = 2$;

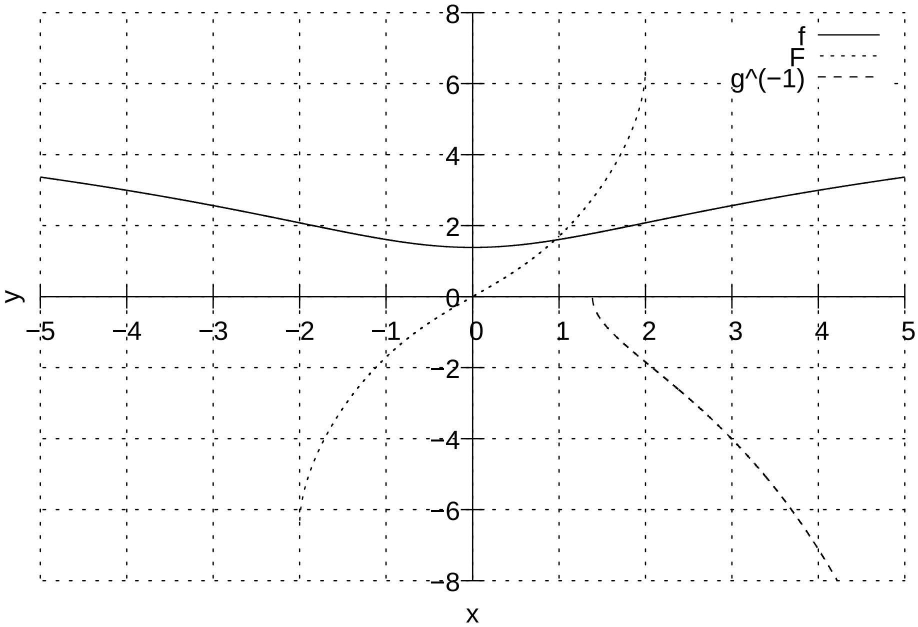
c) g sei eine umkehrbare Einschränkung von f mit möglichst großer Definitionsmenge. G_g enthalte den Punkt $(-1, ?)$.

Bestimme g^{-1} und stelle A durch ein Integral mit dem Integranden $g^{-1}(x)$ dar. Substituiere darin $x = \ln t^2$.

$g(x) = \ln(x^2+4)\,;\quad D_g = \mathbb{R}_0^-;\quad W_g = [\ln 4, \infty[\,;$

$g(x) = y = \ln(x^2+4)\,; \Leftrightarrow x = -\sqrt{e^y - 4} = g^{-1}(y)$;

Inhalt von A, dargestellt über $g^{-1}(x)$: $-2\int\limits_{f(0)}^{f(2)} g^{-1}(x)\,\mathrm{d}x = 2\int\limits_{f(0)}^{f(2)} \sqrt{e^x - 4}\,\mathrm{d}x =$
$2\int\limits_{t(f(0))}^{t(f(2))} \sqrt{e^{\ln t^2} - 4}\cdot(\ln t^2)'\,\mathrm{d}t = 2\int\limits_{t(f(0))}^{t(f(2))} \sqrt{t^2 - 4}\cdot\frac{1}{t^2}\cdot 2t\,\mathrm{d}t = 4\int\limits_{t(f(0))}^{t(f(2))} \frac{\sqrt{t^2-4}}{t}\,\mathrm{d}t$
mit $t(x) = \sqrt{e^x}$;



04.12.2006

4.116 120. Hausaufgabe

4.116.1 Analysis-Buch Seite 258, Aufgabe 33

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$;

a) Bestimme die maximale Definitionsmenge.

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{2-x}}$; $\rightarrow D_f =]0,2[$;

b) Verschiebe G_f so, dass der verschobene Graph G_g symmetrisch zur y-Achse ist. Bestimme $g(x)$.

$g(x) = f(x+1) = \frac{1}{\sqrt{x+1}\sqrt{2-x-1}} = \frac{1}{\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}}$;

Kontrolle: $g(-x) = g(x)$;

c) Bestimme die Wertemenge von g und damit von f und schließe daraus auf Ort und Art des Extrempunkts von G_f.

$g(x) = y = \frac{1}{\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}}; \rightarrow$

$|x| = \sqrt{\frac{y^2-1}{y}} = \sqrt{1 - \frac{1}{y^2}}; \rightarrow$

$1 - \frac{1}{y^2} \geq 0; \Leftrightarrow |y| \geq 1; \rightarrow$

$D_{g^{-1}} = W_g = W_f = [1, \infty[\,;$

$\rightarrow$ TIP bei $(0, 1)$;

d) Begründe: Eine Stammfunktion F von f hat kein Extremum.

$f(x) > 0$ für alle $x \in D_f \rightarrow F' = f$ wechselt nie das Vorzeichen.

e) Gib die Monotoniebereiche von f an. Was folgt daraus für den Verlauf von G_F einer beliebigen Stammfunktion F von f?

Was tut sich in G_f bei der Abszisse des Extrempunkts von G_f?

$f'(x) = -\frac{1}{2x-x^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x-x^2}} \cdot (2-2x) = \frac{x-1}{\sqrt{(2x-x^2)^3}} = \frac{x-1}{\sqrt{[-x(x-2)]^3}};$

VZW von $f'(x)$ bei $x = 1$ von $-$ nach $+$ $\rightarrow$ Bestätigung der Vermutung über die Extrempunktsart

Für eine Stammfunktion F von f folgt daraus, dass F an $x = 1$ einen Wendepunkt hat.

f) Zeichne G_f und G_F so, dass G_F den Punkt $(1, 0)$ enthält.

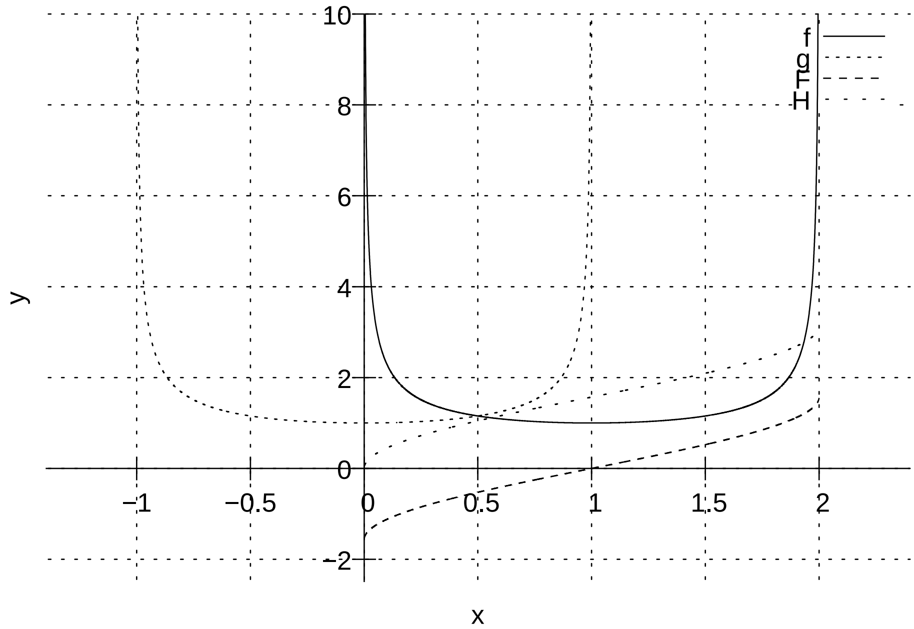
$F(a) = \int\limits_1^a \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\,\mathrm{d}x = \left[\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cdot (1+t)'\,\mathrm{d}t\right]_1^a = [\arcsin t]_1^a = [\arcsin(x-1)]_1^a =$ $\arcsin(a-1)\,;$

g) Berechne den Term $F(x)$ der Funktion aus Aufgabe f).

h) $H(x) := \int\limits_0^x \frac{1}{\sqrt{2t-t^2}}\,\mathrm{d}t; \quad D_H = D_{\text{max}}$. Wie hängen F und H zusammen?

$H' = F' = f;$

$H(x) = F(x) + \int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{2t-t^2}}\,\mathrm{d}t = F(x) + \frac{\pi}{2};$



11.12.2006

4.117 122. Hausaufgabe

4.117.1 Geometrie-Buch Seite 260, Aufgabe 16

$g\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad P(14, 6, 3);$

a) g ist Tangente einer Kugel um P.

Berechne Berührpunkt A und Kugelradius r_a.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} \left|\overrightarrow{PX(\mu)}\right|^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} \left|\begin{pmatrix} -12 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right|^2 =$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} \left[144 - 2 \cdot 96\mu + 64\mu^2 + 9 + 2 \cdot 3\mu + \mu^2 + 9 + 2 \cdot 12\mu + 16\mu^2\right] =$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} \left[162 - 162\mu + 81\mu^2\right] = -162 + 162\mu \stackrel{!}{=} 0;$$

Alternativ: $E\colon \vec{g} \cdot \left(\vec{X} - \vec{P}\right) = 0; \rightarrow E \cap g = \{A\};$

$\Leftrightarrow \mu = 1;$

$\vec{A} = \vec{X}(1) = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix};$

$r_\mathrm{a} = \sqrt{162 - 162 + 81} = 9;$

b) Auf g liegt der Mittelpunkt B der kleinsten Kugel durch P. Berechne B und den Kugelradius r_b und die Schnittpunkte S von Kugel und Gerade.

$B = A; \quad r_\mathrm{b} = r_\mathrm{a};$

$\vec{g}^0 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}8\\1\\4\end{pmatrix};$

$\vec{S}_1 = \vec{B} + r_\mathrm{b}\vec{g}^0 = \begin{pmatrix}18\\11\\14\end{pmatrix}; \quad \vec{S}_2 = \vec{B} - r_\mathrm{b}\vec{g}^0 = \begin{pmatrix}2\\9\\6\end{pmatrix};$

c) Berechne Radius r_c und Mittelpunkt C der kleinsten Kugel, die durch P geht und g berührt.

$\vec{C} = \frac{\vec{A}+\vec{B}}{2}; \quad r_\mathrm{c} = \frac{r_\mathrm{a}}{2};$

4.117.2 Geometrie-Buch Seite 270, Aufgabe 1

Gib die HESSEform an.

a) NF: $7x_1 - 2x_2 + 26x_3 + 54 = 0;$

HNF: $-\frac{1}{27}\left(7x_1 - 2x_2 + 26x_3 + 54\right) = 0;$

b) NF: $6x_1 + 8x_3 = -50;$

HNF: $-\frac{1}{10}\left(6x_1 + 8x_3 + 50\right) = 0;$

c) NF: $15x_1 + 6x_2 - 10x_3 = 0;$

HNF: $\pm\frac{1}{19}\left(15x_1 + 6x_2 - 10x_3\right) = 0;$

d) NF: $3x_3 = 3;$

HNF: $\frac{3x_3-3}{3} = x_3 - 1 = 0;$

e) NF: $\frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 = 1;$

HNF: $\frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 - 1 = 0;$

f) NF: $x_1 = 0;$

HNF: $\pm x_1 = 0;$

12.12.2006

4.118 123. Hausaufgabe

4.118.1 Geometrie-Buch Seite 270, Aufgabe 2

Gib die HESSEform der Ebene A an, die durch $A(1,1,5)$, $B(9,1,1)$ und $C(11,4,-1)$ geht.

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{a^2+b^2+c^2} = a^2+b^2+c^2 = 1; \\ n_0 > 0; \\ \begin{array}{rcrcrcrcl} a & + & b & + & 5c & - & n_0 & = & 0; \\ 9a & + & b & + & c & - & n_0 & = & 0; \\ 11a & + & 4b & - & c & - & n_0 & = & 0; \end{array} \end{array}\right\} \Rightarrow (a,b,c,n_0) = \left(\tfrac{3}{7},\tfrac{2}{7},\tfrac{6}{7},5\right);$$

HNF: $\frac{3}{7}x_1 + \frac{2}{7}x_2 + \frac{6}{7}x_3 - 5 = 0;$

4.118.2 Geometrie-Buch Seite 270, Aufgabe 3

Welchen Abstand haben der Ursprung, $A(12,2,-2)$, $B(1,0,-2)$ und $C(-9,1,2)$ von der Ebene $E\colon x_1 + 8x_2 - 4x_3 = 9$?

HNF von E: $\frac{1}{9}\left[x_1 + 8x_2 - 4x_3 - 9\right] = 0;$

$d(O,E) = |HT(O)| = 1;$

$d(A,E) = |HT(A)| = 3;$

$d(B,E) = |HT(B)| = 0;$

$d(C,E) = |HT(C)| = 2;$ 13.12.2006

4.119 124. Hausaufgabe

4.119.1 Geometrie-Buch Seite 271, Aufgabe 15

Die Punkte $P(13,-6,6)$ und P' seien symmetrisch bezüglich der Ebene $E\colon 7x_1 - 4x_2 + 4x_3 - 7 = 0$. Berechne P'.

HNF von E: $HT_E(X) = \frac{1}{9}\left(7x_1 - 4x_2 + 4x_3 - 7\right) = 0;$

$d(P,E) = |HT_E(P)| = \left|\frac{44}{3}\right|;$

$\vec{P}' = \vec{P} - 2\vec{n}^0 \cdot d(P,E) = \frac{1}{27}\begin{pmatrix}-265\\190\\-190\end{pmatrix};$

4.119.2 Geometrie-Buch Seite 284, Aufgabe 1

K sei Kugel um $M(3,6,2)$ mit Radius 7.

Welche der folgenden Punkte liegen in, auf oder außerhalb der Kugel?

$A(5,9,6);\quad d(A,K)=7;$
$\rightarrow A$ liegt auf der Kugel

$B(-1,0,0);\quad d(B,K)=2\sqrt{14};$
$\rightarrow B$ liegt außerhalb der Kugel

$C(0,0,0);\quad d(C,K)=7;$
$\rightarrow C$ liegt auf der Kugel

$D(1,1,1);\quad d(D,K)=\sqrt{30};$
$\rightarrow D$ liegt innerhalb der Kugel

$E(3,6,2);\quad d(E,K)=0;$
$\rightarrow E$ liegt innerhalb der Kugel

$F(3,6,-5);\quad d(F,K)=7;$
$\rightarrow F$ liegt auf der Kugel

$G(0,0,4);\quad d(G,K)=7;$
$\rightarrow G$ liegt auf der Kugel

4.119.3 Geometrie-Buch Seite 284, Aufgabe 2

Stelle die Gleichung der Kugel um den Ursprung auf, die

a) den Radius $\sqrt{17}$ hat.

$$\left|\vec{X}\right|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}=\sqrt{17};$$

b) durch $P(3,4,-12)$ geht.

$$d(O,P)=13;$$
$$\left|\vec{X}\right|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}=13;$$

c) die Ebene $E\colon 3x_1+2x_2+6x_3=49$ berührt.

$$d(O,E)=\left|HT_E(O)\right|=7;$$
$$\left|\vec{X}\right|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}=7;$$

d) die Gerade durch $P(11,0,11)$ und $Q(20,-6,13)$ berührt.

$g\colon \vec{X} = \vec{P} + \lambda\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix}11\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}9\\-6\\2\end{pmatrix};$

$\overrightarrow{OX(\lambda)} \cdot \overrightarrow{PQ} = \vec{X}(\lambda) \cdot \begin{pmatrix}9\\-6\\2\end{pmatrix} = 101 + 121\lambda \overset{!}{=} 0; \Leftrightarrow \lambda = -\frac{101}{121};$

$\vec{F} = \vec{X}(\lambda) = \frac{1}{121}\begin{pmatrix}422\\606\\-81\end{pmatrix};$

$d(O,F) = \frac{1}{11}\sqrt{4561};$

$\left|\vec{X}\right| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \frac{1}{11}\sqrt{4561};$

20.12.2006

4.120 125. Hausaufgabe

4.120.1 Analysis-Buch Seite 172, Aufgabe 23

Gegeben ist die Funktion f_k mit $f_k(x) = \frac{x^2-k^2}{kx}$, wobei $k > 0$ ist.

G_{f_k} ist der Graph von f_k.

a) Bestimme den maximalen Definitionsbereich und untersuche f_k auf Symmetrieeigenschaften, Nullstellen, Extrema, Wendepunkte und Asymptoten.

- Maximaler Definitionsbereich:
  $kx \neq 0; \Leftrightarrow x \neq 0$, da $k > 0$;
  $\rightarrow D_{f_k} = \mathbb{R} \setminus \{0\};$
- Symmetrieeigenschaften:
  $f(-x) = -\frac{x^2-k^2}{kx} = -f_k(x);$
  $\rightarrow$ Punktsymmetrie zum Ursprung
- Nullstellen:
  $f_k(x) = \frac{x^2-k^2}{kx} \overset{?}{=} 0; \Leftrightarrow x^2 - k^2 \overset{?}{=} 0; \Leftrightarrow |x| = |k| = k;$
  $\rightarrow$ Nullstellen: $-k$, k
- Extrema:
  $f_k'(x) = \frac{kx \cdot 2x - \left(x^2-k^2\right) \cdot k}{(kx)^2} = \frac{x^2+k^2}{kx^2};$
  GERIGKmethode für $f_k'(x)$:

```
        0
--------|------->
```

```
----------------- x^2 + k^2
--------0-------- k x^2
    +  [0]  +
```

$\rightarrow$ Keine Extrema

- Wendepunkte:
  Keine, aber Wechsel des Krümmungsverhalten bei $x = 0$, da f_k' bei $x = 0$ ein Extremum hat.
- Asymptoten:
  $x = 0$; (VZW an der Polstelle von $-$ nach $+$ bei $x = 0$)
  $y = \frac{x}{k}$; (Beweis: $f_k(x) = \frac{x^2-k^2}{kx} = \frac{x}{k} - \frac{k}{x}$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_k(x) - \frac{x}{k} = 0$;)

b) Zeichne den zu $k = 3$ gehörigen Graphen G_{f_3}.

c) Für welche Werte von m hat die Gerade $y = mx$ mit G_{f_k} keine Punkte gemeinsam?

$y = mx \stackrel{?}{=} \frac{x^2-k^2}{kx} = f_k(x)$; $\Leftrightarrow$

$kmx^2 \stackrel{?}{=} x^2 - k^2$; $\quad x^2 \stackrel{?}{=} -\frac{k^2}{km-1}$;

RHS muss positiv sein: $-\frac{k^2}{km-1} \stackrel{?}{\geq} 0$; $\Leftrightarrow$ $\frac{1}{km-1} \leq 0$; $\Leftrightarrow$ $km \leq 1$;

Außerdem: $km - 1 \neq 0$; $\Leftrightarrow$ $km \neq 1$;

Also: $km < 1$; $\Leftrightarrow$ $m < \frac{1}{k}$;

Die Gerade $y = mx$ hat für $m \geq \frac{1}{k}$ keine Punkte mit G_{f_k} gemeinsam.

d) Bestimme ohne Berechnung des Integrals die Abszisse des Extremums der Funktion F_k mit

$F_k(x) = \int\limits_1^x f_k(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_1^x \frac{t^2-k^2}{kt}\,\mathrm{d}t$;

Von welcher Art ist dieses Extremum?

In welchem Bereich ist F_k definiert?

GERIGKmethode für $f_k(x) = \frac{x^2-k^2}{kx} = \frac{(x-k)(x+k)}{kx}$:

```
     -k     0     k
-----|-----|-----|---->

- - - - - - - - -0----> x - k
- - -0----------------> x + k
- - - - - -0----------> k x

  -  0  + [0] -  0  +
```

$D_{F_k} = \mathbb{R}^+$; (da an der Stelle 0 der Integrand unendlich wird)

$\rightarrow$ Bei $x = k$ einziges Extremum (ein Tiefpunkt).

e) Der Graph G_h einer ganzrationalen Funktion h dritten Grades ist punktsymmetrisch zum Ursprung und berührt G_{f_3} in den Nullstellen von f_3.

Ermittle den Funktionsterm $h(x)$ und die Extrema von h.

$h(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d;$

$h(-x) = -ax^3 + bx^2 - cx + d \stackrel{!}{=} -ax^3 - bx^2 - cx - d = -h(x); \Leftrightarrow bx^2 + d = 0; \Leftrightarrow d = -bx^2;$

$h(\pm 3) = a\,(\pm 3)^3 + c\,(\pm 3) = \pm 27a \pm 3c = \stackrel{!}{=} 0; \Leftrightarrow c = -9a;$

$h(x) = ax^3 - 9ax; \quad h'(x) = 3ax^2 - 9a;$

$h'(\pm 3) = 27a - 9a = 18a \stackrel{!}{=} f_3'(\pm 3) = \frac{2}{3}; \Leftrightarrow a = \frac{1}{27};$

$\rightarrow h(x) = \frac{1}{27}\left(x^3 - 9x\right);$

GERIGKmethode für $h'(x) = \frac{1}{9}\left(x^2 - 3\right) = \frac{1}{9}\left(x + \sqrt{3}\right)\left(x - \sqrt{3}\right)$:

```
-sqrt(3)     0     sqrt(3)
-------|-----|-----|------>

-------------------------- 1/9
- - - -0------------------ x + sqrt(3)
- - - - - - - - - -0------- x - sqrt(3)

   +   0     -     0   +
```

$\rightarrow$ HOP bei $\left(-\sqrt{3}, \frac{2}{9}\sqrt{3}\right)$;

$\rightarrow$ TIP bei $\left(\sqrt{3}, -\frac{2}{9}\sqrt{3}\right)$;

f) Zeichne G_h in die Zeichnung von Teilaufgabe b) ein.

g) Welche Fläche schließt G_h mit der positiven x-Achse ein?

Nullstellen von h: -3, 0, 3

Fläche: $\{(x, y) \mid x \in [0, 3] \wedge h(x) \leq y \leq 0\}$;

Flächeninhalt: $\left|\int\limits_0^3 |h(x)|\, \mathrm{d}x\right| = \left|-\frac{1}{27}\int\limits_0^3 x^3 - 9x\, \mathrm{d}x\right| = \left|-\frac{1}{27}\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{9}{2}x^2\right]_0^3\right| = \left|-\frac{1}{27}\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{9}{2}x^2\right]_0^3\right| = \frac{3}{4};$

h) Die Funktion h_1 sei gegeben durch

$$h_1(x) = \begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{3}{x} & \text{für } |x| \geq 3; \\ \frac{1}{27}\left(x^3 - 9x\right) & \text{für } |x| < 3; \end{cases}$$

Ihr Graph ist G_{h_1}.

Kennzeichne G_{h_1} in der Zeichnung der Teilaufgabe b) mit Farbe. Wie oft ist h_1 bei $x = 3$ differenzierbar? (Begründung!)

Stetigkeit von h_1 an der Stelle 3: $\lim\limits_{x\to 3-} h_1(x) = \lim\limits_{x\to 3+} h_1(x) = h_1(3) = 0$;

Provisorisch: $h_1'(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} + \frac{3}{x^2} & \text{für } |x| \geq 3; \\ \frac{1}{27}\left(3x^2 - 9\right) & \text{für } |x| < 3; \end{cases}$

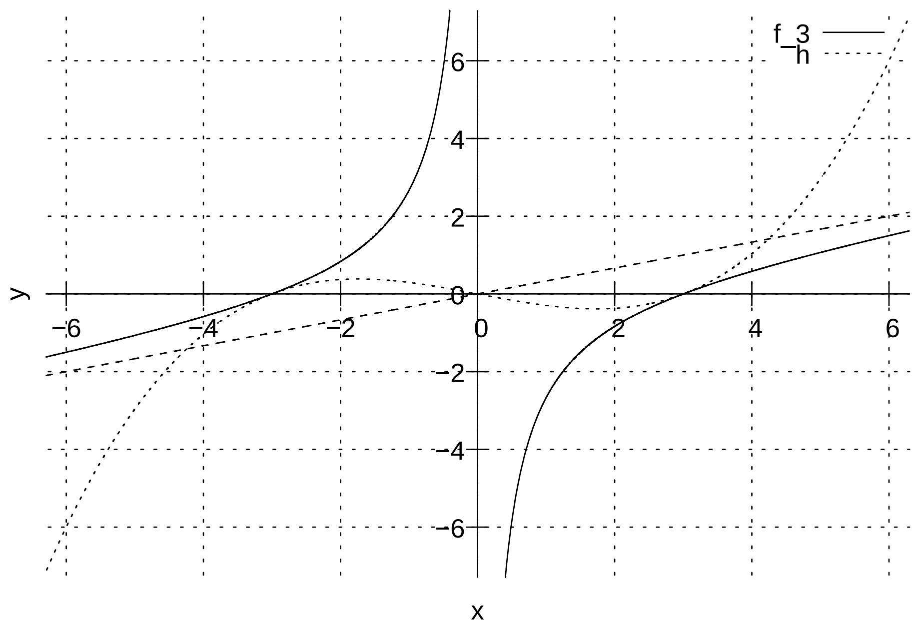
$\lim\limits_{x\to 3-} h_1'(x) = \frac{2}{3} = \lim\limits_{x\to 3+} h_1'(x)$;

$\to$ Provisorisches h_1' ist in der Tat die Ableitungsfunktion von h_1.

Provisorisch: $h_1''(x) = \begin{cases} -\frac{6}{x^3} & \text{für } |x| \geq 3; \\ \frac{2}{9}x & \text{für } |x| < 3; \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 3-} h_1''(x) = \frac{2}{3} \neq -\frac{2}{9} = \lim\limits_{x\to 3+} h_1''(x)$;

$\to$ h_1 ist nicht zweimal an der Stelle $x = 3$ differenzierbar; das provisorisch aufgestellte h_1'' ist nicht die Ableitungsfunktion von h_1'.



4.120.2 Analysis-Buch Seite 172, Aufgabe 24

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{2x-4}{1-x}$; ihr Graph sei mit G_f bezeichnet.

a) Bestimme die maximale Definitionsmenge D_f von f und untersuche G_f auf Schnittpunkte mit dem Koordinatenachsen.

$1 - x \neq 0; \Leftrightarrow x \neq 1;$

$\rightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\};$

$f(0) = -4;$

$f(x) = \frac{2x-4}{1-x} \stackrel{?}{=} 0; \Leftrightarrow 2x - 4 \stackrel{?}{=} 0; \Leftrightarrow x = 2; \quad f(2) = 0;$

b) Untersuche das Verhalten von $f(x)$ für $x \rightarrow \pm\infty$ und für $x \rightarrow 1$.

$f(x) = \frac{2x-4}{1-x} = -2 - \frac{2}{1-x};$

$\lim\limits_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -2;$

$\lim\limits_{x \rightarrow 1\pm} f(x) = \pm\infty;$

c) Welches Monotonieverhalten zeigt die Funktion f? Hat G_f Extrempunkte? Begründe deine Antwort.

$f'(x) = -\frac{2}{(1-x)^2} < 0$ für alle $x \in D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{1\};$

$\rightarrow f$ ist auf $]-\infty, 1[$ und $]1, \infty[$ streng monoton fallend. (XXX auf ganz D_f smf? Oder mit 1 jeweils eingeschlossen? Oder nur bei einem eingeschlossen?)

GERIGKmethode von $f'(x)$:

```
          1
--------|------>

--------0- - - - 1 - x
--------0- - - - 1 - x

     +    0    +
```

$\rightarrow f$ hat keine Extrempunkte. (Aber eine Wendestelle bei $x = 1$, da f' bei $x = 1$ ein Extremum hat.)

(XXX ist es richtig, zu sagen, bei $x = 1$ liege eine Wendestelle, aber kein Wendepunkt vor?)

d) Zeichne nun G_f.

e) Begründe, weshalb f umkehrbar ist. Gib die Funktionsgleichung $y = f^{-1}(x)$ für die Umkehrfunktion f^{-1} von f sowie den Definitions- und den Wertebereich von f^{-1} an.

f ist umkehrbar, weil es bei beiden Ästen streng monoton ist und weil sich die Äste nicht „überlappen"; f ist injektiv.

$f(y) = \frac{2y-4}{1-y}$; $\Leftrightarrow$ $f(y) - yf(y) = 2y - 4$; $\Leftrightarrow$ $y = \frac{-4-f(y)}{-f(y)-2} = \frac{f(y)+4}{f(y)+2} = f^{-1}(f(y))$;

$f(y) + 2 \neq 0$; $\Leftrightarrow$ $f(y) \neq -2$;

$D_{f^{-1}} = W_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$; $\quad W_{f^{-1}} = D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$;

(XXX wieso ist -2 nicht 1, gespiegelt an $y = x$?)

f) Berechne die Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen G_f und $G_{f^{-1}}$.

($G_{f^{-1}}$ ist der Graph von $f^{-1}\colon x \mapsto y$)

$f(x) = \frac{2x-4}{1-x} \stackrel{?}{=} \frac{x+4}{x+2} = f^{-1}(x)$; $\Leftrightarrow$

$(2x-4)(x+2) = 2x^2 + 4x - 4x - 8 \stackrel{?}{=} x - x^2 + 4 - 4x = (x+4)(1-x)$; $\Leftrightarrow$

$3x^2 + 3x - 12 \stackrel{?}{=} 0$;

$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-12)}}{2 \cdot 3} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$;

$y_1 \approx 1{,}56$; $\quad y_2 \approx -2{,}56$;

g) Zeige, dass die Funktion $F\colon x \mapsto \ln\left[(1-x)^2\right] - 2x$ mit $D_F = D_f$ eine Stammfunktion von f ist.

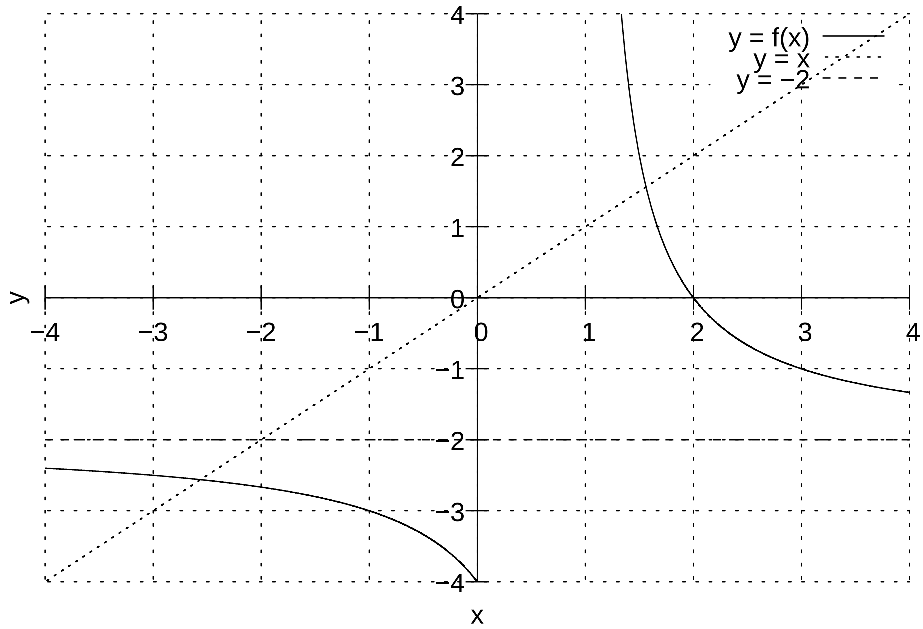
$F'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \cdot 2(1-x) \cdot (-1) - 2 = -\frac{2}{1-x} - 2 = f(x)$;

h) Bestimme den Flächeninhalt der Figur, die vom Graphen G_f, von der Geraden $y = x$ sowie von den beiden Geraden $y = -2$ und $x = 0$ begrenzt wird, auf zwei Dezimalstellen genau.

Schnittpunkte vom Graphen von $y = x$ und $f(x)$ = Schnittpunkte von G_f und $G_{f^{-1}}$.

$x_1 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$;

$\frac{1}{2}\left[2 + (2 + f(x_1))\right] \cdot x_1 + \int\limits_{x_1}^{\infty} f(x) - (-2) \,\mathrm{d}x = \infty$;



21.12.2006

4.120.3 Analysis-Buch Seite 172, Aufgabe 25

Gegeben ist die Funktion f_a mit $f_a(x) = \frac{a^2}{x^2} - \frac{x}{a}$ ($a > 0$). Der Graph von f_a heiße G_{f_a}.

a) Bestimme den maximalen Definitionsbereich D_{f_a}, die Nullstellen und die Asymptoten von G_{f_a}.

- Definitionsbereich:
  $x^2 \neq 0; \Leftrightarrow D_{f_a} = \mathbb{R} \setminus \{0\};$
- Nullstellen:
  $f_a(x) = \frac{a^2}{x^2} - \frac{x}{a} \overset{?}{=} 0; \Leftrightarrow a^3 \overset{?}{=} x^3; \Leftrightarrow f_a(a) = 0;$
- Asymptoten:
  $x = 0$; (Beweis: $\lim\limits_{x \to 0\pm} f_a(x) = \infty$;)
  $y = -\frac{x}{a}$; (Beweis: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f_a(x) + \frac{x}{a} = 0$;)

b) Berechne die Koordinaten (x_E, y_E) und die Art des Extremums von f_a. Hat G_{f_a} Wendepunkte? (Begründung!)

$f_a'(x) = -\frac{x^3+2a^3}{ax^3};$

$x^3 + 2a^3 \stackrel{?}{=} 0; \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{2}a;$

GERIGKmethode von $f_a'(x)$:

```
   -2^(1/3)a     0
-----------|-----|------>

- - - - - - - - - - - - - - -1
- - - - - -0------------- x^3 + 2a^3
- - - - - - - - - -0------- a x^3

   -      0  + [0]  -
```

VZW von $-$ nach $+$ bei $x = -\sqrt[3]{2}a$; $\rightarrow$ TIP bei $\left(-\sqrt[3]{2}a, \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \sqrt[3]{2}\right)$;

$f_a''(x) = \frac{6a^2}{x^4} > 0$ auf ganz D_{f_a}; trotzdem aber Wendestelle von f_a bei $x = 0$.

c) Zeichne den zu $a = 2$ gehörigen Graphen G_{f_2}.

d) Wie lässt sich die Tatsache interpretieren, dass y_E den Parameter a nicht enthält?

Alle Tiefpunkte liegen auf einer gemeinsamen Geraden.

e) Berechne $F_2(x) = \int\limits_1^x f_2(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_1^x \left(\frac{4}{t^2} - \frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t$.

$F_2(x) = \int\limits_1^x \left(\frac{4}{t^2} - \frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t = \left[-\frac{4}{t} - \frac{t^2}{4}\right]_1^x = -\frac{4}{x} - \frac{x^2}{4} + \frac{17}{4};$

f) Begründe die Existenz eines Maximums von F_2 und berechne dessen Koordinaten.

GERIGKmethode von $f_a(x) = \frac{a^2}{x^2} - \frac{x}{a} = \frac{a^3 - x^3}{ax^2}$:

```
      0      a
------|------|------>

-------------0- - - - a^3 - x^3
------0-------------- a x^2

  +  [0]  +  0   -
```

VZW von $f_a(x)$ von $+$ nach $-$ bei $x = a$; $\rightarrow$ HOP bei $\left(a, -\frac{4}{a} - \frac{a^2}{4} + \frac{17}{4}\right)$;

g) Für welche Werte von k hat die Gerade

$g_k\colon y = -\frac{1}{a}x + k$

mit G_{f_a} keine Punkte gemeinsam? Welche Schnittpunkte ergeben sich für $k = a^2$?

Konventioneller Ansatz über $y = -\frac{1}{a}x + k \overset{?}{=} \frac{a^3-x^3}{ax^2} = f_a(x)$; führt nicht zum Ziel, da die Nullstellen eines Polynoms vierter Ordnung zu finden wären.

Stattdessen Überlegung mit den Erkenntnisen der a): y ist für $k = 0$ Asymptote von G_{f_a}, mit $f_a(x) > -\frac{x}{a}$ für alle $x \in D_{f_a}$.

Also: Für $k \leq 0$ gibt es keine Schnittpunkte.

$-\frac{1}{a}x + a^2 = \frac{-x+a^3}{a} = \frac{a^3-x^3}{ax^2}$; $\Leftrightarrow$

$-x^3 + x^2a^3 = a^3 - x^3$; $\Leftrightarrow$ $|x| = 1$;

Schnittpunkte: $\left(\pm 1, \mp\frac{1}{a} + a^2\right)$;

h) Die Funktion h_a ist gegeben durch

$$h_a(x) = \begin{cases} \frac{a^2}{x^2} - \frac{x}{a} & \text{für } |x| \geq 1; \\ -\frac{x}{a} + a^2 & \text{für } |x| < 1; \end{cases}$$

Ihr Graph heiße G_{h_a}.

Zeichne den zu $a = 2$ gehörigen Graphen G_{h_2}.

Untersuche h_a an der Stelle $x = 1$ auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit.

$\lim\limits_{x\to 1-} h_a(x) = \lim\limits_{x\to 1-} -\frac{x}{a} + a^2 = -\frac{1}{a} + a^2 = h_a(1) = \lim\limits_{x\to 1+} \frac{a^2}{x^2} - \frac{x}{a} = \lim\limits_{x\to 1+} h_a(x)$;

$\to$ h_a ist an der Stelle $x = 1$ stetig.

Provisorische Ableitungsfunktion:

$$h_a'(x) = \begin{cases} -\frac{2a^2}{x^3} - \frac{1}{a} & \text{für } |x| \geq 1; \\ -\frac{1}{a} & \text{für } |x| < 1; \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 1-} h_a'(x) = \lim\limits_{x\to 1-} -\frac{1}{a} = -\frac{1}{a} \neq \lim\limits_{x\to 1+} -2a^2 - \frac{1}{a} = \lim\limits_{x\to 1+} -\frac{2a^2}{x^3} - \frac{1}{a} = \lim\limits_{x\to 1+} h_a'(x)$;

$\to$ h_a ist an der Stelle $x = 1$ nicht differenzierbar; das provisorisch aufgestellte h_a' ist nicht Ableitungsfunktion von h_a.

i) Berechne den Inhalt $J(r)$ des Flächenstücks, das von G_{h_a}, der Geraden $g_0\colon y = -\frac{1}{a}x$, der y-Achse und der Geraden $x = r$ ($r > 0$) eingeschlossen wird.

$h_a(0) = a^2;$

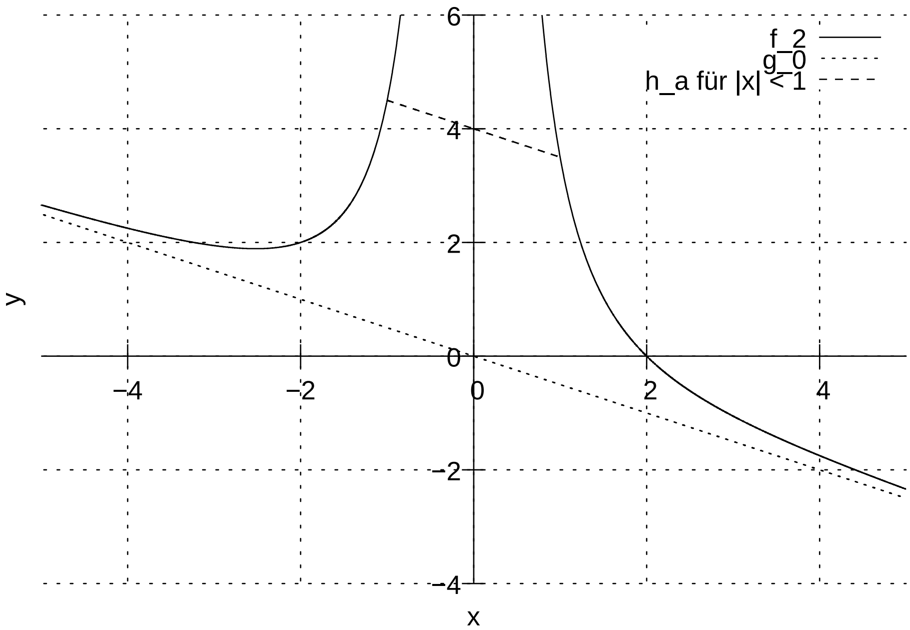
$A_1 = a^2 \cdot 1;$

$A_2 = \int\limits_1^r h_a(x) - y_{g_0}\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^r \frac{a^2}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{a^2}{x}\right]_1^r = -\frac{a^2}{r} + a^2 = a^2\left(1 - \frac{1}{r}\right);$

$$J(r) = \begin{cases} A_1 \cdot r = ra^2 & \text{falls } 0 < x < 1; \\ A_1 + A_2 = a^2\left(2 - \frac{1}{r}\right) & \text{sonst;} \end{cases};$$

j) Bestimme $\lim\limits_{r\to\infty} J(r)$.

$\lim\limits_{r\to\infty} J(r) = \lim\limits_{r\to\infty} a^2\left(2 - \frac{1}{r}\right) = 2a^2;$



25.01.2007

4.121 126. Hausaufgabe

4.121.1 Stochastik-Buch Seite 220, Aufgabe 2

Gegeben sei eine BERNOULLIkette der Länge 4 mit der Trefferwahrscheinlichkeit $0{,}3$.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

a) Auf zwei Treffer hintereinander folgen zwei Nieten.

$P_{\mathrm{a}} = p^2q^2 \approx 4{,}4\,\%$;

b) Auf zwei Nieten hintereinander folgen zwei Treffer.

$P_{\mathrm{b}} = P_{\mathrm{a}} = q^2p^2 \approx 4{,}4\,\%$;

c) Zwei Treffer und zwei Nieten treten jeweils hintereinander auf.

$P_{\mathrm{c}} = 2P_{\mathrm{a}} = 2p^2q^2 \approx 8{,}8\,\%$;

d) Nur die ersten drei Versuche verlaufen erfolgreich.

$P_{\mathrm{d}} = p^3q \approx 1{,}9\,\%$;

e) Die ersten drei Versuche verlaufen erfolgreich.

$P_{\mathrm{e}} = p^3q + p^3p = p^3(q+p) = p^3 = 2{,}7\,\%$;

f) Nur zwei Versuche sind erfolgreich.

$P_{\mathrm{f}} = \binom{4}{2}p^2q^2 \approx 26{,}5\,\%$;

4.121.2 Stochastik-Buch Seite 220, Aufgabe 3

Gegeben ist eine BERNOULLIkette der Länge 4 mit der Trefferwahrscheinlichkeit p.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau zwei Treffer aufeinander folgen.

$P_{\mathrm{a}} = P(\{1100, 0110, 0011, 1011, 1101\}) = 3p^2q^2 + 2p^3q$;

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau zwei Nieten aufeinander folgen.

$P_{\mathrm{b}} = P_{\mathrm{b}}$;

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau zwei Treffer oder genau zwei Nieten aufeinander folgen.

$P_{\mathrm{c}} = 4p^2q^2 + 2p^3q + 2pq^3 = 2p - 2p^2 = 2pq$;

4.121.3 Stochastik-Buch Seite 221, Aufgabe 7

Bei Beginn des Spiels **Mensch ärgere dich nicht** darf der Spieler dreimal würfeln. Wenn dabei eine Sechs fällt, darf er mit einer seiner Figuren starten.

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann man beim 1. Durchgang starten?

$P = p + qp + q^2p = 1 - q^3 \approx 42{,}1\,\%$;

4.121.4 Stochastik-Buch Seite 222, Aufgabe 17

Wie viel Mal muss man einen homogenen Würfel wenigstens werfen, um mit einer Mindestwahrscheinlichkeit von $90\,\%$ wenigstens einmal eine Sechs zu würfeln?

$n \geq \frac{\ln[1-90\,\%]}{\ln\left[1-\frac{1}{6}\right]} \approx 12{,}6$;

$\rightarrow n \geq 13$; 25.01.2007

4.122 127. Hausaufgabe

4.122.1 Stochastik-Buch Seite 222, Aufgabe 18

Wie oft muss man bei einem Spiel mit

a) einem Laplace-Würfel,

b) zwei Laplace-Würfeln,

c) drei Laplace-Würfeln

mindestens spielen, damit die Wahrscheinlichkeit,

a) wenigstens eine Sechs,

b) wenigstens eine doppelte Sechs,

c) wenigstens eine dreifache Sechs

zu würfeln, mindestens $50\,\%$ ist?

a) $n \geq \frac{\ln[1-50\,\%]}{\ln\left[1-\frac{1}{6}\right]} \approx 3{,}8; \rightarrow n \geq 4;$

b) $n \geq \frac{\ln[1-50\,\%]}{\ln\left[1-\left(\frac{1}{6}\right)^2\right]} \approx 24{,}6; \rightarrow n \geq 25;$

c) $n \geq \frac{\ln[1-50\,\%]}{\ln\left[1-\left(\frac{1}{6}\right)^3\right]} \approx 149{,}3; \rightarrow n \geq 150;$

4.122.2 Stochastik-Buch Seite 222, Aufgabe 19

Wie viele Tippfelder sind beim Lotto **6 aus 49** unabhängig voneinander auszufüllen, damit bei einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $99\,\%$ auf wenigstens einem Feld

a) sechs Richtige,

b) fünf Richtige

stehen?

a) $n \geq \frac{\ln[1-99\,\%]}{\ln[1-6!43!/49!]} \approx 64 \cdot 10^6;$

($6!43!/49! = \frac{1}{\binom{49}{6}}$)

b) $n \geq \frac{\ln[1-99\,\%]}{\ln\left[1-\frac{\binom{6}{5}\binom{43}{1}}{\binom{49}{6}}\right]} \approx 0{,}25 \cdot 10^6;$

27.01.2007

4.123 128. Hausaufgabe

4.123.1 Stochastik-Buch Seite 223, Aufgabe 23

Gegeben sei eine BERNOULLIkette der Länge 4 und der Trefferwahrscheinlichkeit $0{,}3$.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, beim i-ten Versuch zum ersten Mal einen Treffer zu erzielen ($i = 1, 2, 3, 4$).

Kurzschreibweisen: $s^n = \underbrace{sss\ldots sss}_{n}$; $\quad 1{*}{*}{*} = \{(1, a, b, c) \mid a, b, c \in \{0, 1\}\}$;

$P(1{*}{*}{*}) = p = 30\,\%$;

$P(01{*}{*}) = qp = 21\,\%$;

$P(001{*}) = q^2p = 14{,}7\,\%$;

$P(\{0001\}) = q^3p \approx 10{,}3\,\%$;

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich zum ersten Mal ein Treffer nach höchstens vier Versuchen einstellt?

$P(1{*}{*}{*} \cup 01{*}{*} \cup 001{*} \cup \{0001\}) = p{+}qp{+}q^2p{+}q^3p = p\,(1 + q + q^2 + q^3) = 1 - P(\{0000\}) \approx 76\,\%$;

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Treffer frühstens beim dritten Versuch zum ersten Mal einstellt?

$P(001{*} \cup \{0001\}) = q^2p + q^3p = p\,(q^2 + q^3) \approx 25\,\%$;

4.123.2 Stochastik-Buch Seite 223, Aufgabe 24

Eine Laplace-Münze wird so lange geworfen, bis zum ersten Mal **Kopf** erscheint, höchstens aber zehn Mal.

a) Konstruieren Sie einen passenden Ergebnisraum.

$\Omega = \{0, 1\}^{10}$;

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt spätestens beim 5. Wurf Kopf?

$P(1{*}^9 \cup 01{*}^8 \cup 001{*}^7 \cup 0001{*}^6 \cup 00001{*}^5) = p + qp + q^2p + q^3p + q^4p = p + p^2 + p^3 + p^4 + p^5 \approx 96{,}9\,\%$;

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt frühestens beim 5. Wurf Kopf?

$P(00001{*}^5) = q^4p = p^5 \approx 3{,}1\,\%$;

„Alternativ“:

$P(0000{*}^6) = q^4 \approx 6{,}3\,\%$;

d) Mit welcher Anzahl von Würfen ist das Spiel mit mehr als $99\,\%$ Wahrscheinlichkeit spätestens beendet?

$n \geq \frac{\ln[1-99\,\%]}{\ln[1-p]} \approx 6{,}6; \rightarrow n \geq 7;$

4.123.3 Stochastik-Buch Seite 223, Aufgabe 25

Ein Laplace-Würfel wird so lange geworfen, bis zum ersten Mal Augenzahl 6 erscheint, höchstens aber sechs Mal.

a) Suchen Sie einen geeigneten Ergebnisraum.

$\Omega = \{0, 1\}^6;$

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt genau beim 6. Wurf die Zahl 6?

$P(0^5 1) = q^5 p \approx 6{,}7\,\%;$

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt keinmal die Sechs?

$P(0^6) = q^5 \approx 33{,}5\,\%;$

d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt frühestens beim 5. Wurf die Sechs?

$P(0^4 *^2) = q^4 \approx 48{,}2\,\%;$

4.123.4 Stochastik-Buch Seite 224, Aufgabe 26

Gegeben sei eine BERNOULLIkette mit den Parametern n und p. Wir interessieren uns für die Ereignisse E_k: „In den ersten $(k-1)$ Versuchen kein Treffer, beim k-ten Versuch ein Treffer“ ($k = 0, 1, \ldots, n$).

a) Berechnen Sie $P(E_2)$.

$P(E_2) = qp;$

b) Berechnen Sie $P(E_3)$.

$P(E_3) = q^2 p;$

c) Berechnen Sie $P(E_k)$.

$P(E_k) = q^{k-1} p;$

d) Da wir uns für die Ereignisse E_k interessieren, können wir den Ergebnisraum der BERNOULLIkette vergröbert auch darstellen durch

$$\Omega = \left\{ 1, 01, 001, \ldots, \underbrace{000\ldots000}_{n-1}1, \underbrace{000\ldots000}_{n} \right\}.$$

Zeigen Sie, dass die Summe der Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse gleich 1 ist.

$\Omega' = \{0,1\}^n$;

$$\begin{array}{rrcl} f\colon & \Omega' & \to & \Omega \\ & 1{*}^{n-1} & \mapsto & 1 \\ & 01{*}^{n-2} & \mapsto & 01 \\ & 001{*}^{n-3} & \mapsto & 001 \\ & & \vdots & \end{array}$$

Mit $\omega \in \Omega$: $P(\omega) = P(\{\omega' \in \Omega' \mid f(\omega') = \omega\})$;

Da $P(\Omega') = 1$ und die Zerlegung über das Urbild der Elementarereignisse von Ω unter f disjunkt ist, muss auch $P(\Omega) = 1$ gelten.

Alternativ:

$P(\Omega) = p + pq + pq^2 + \cdots + pq^{n-1} + q^n = p\,(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}) + q^n = p \cdot \left[\frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot 1\right] + q^n = -q^n + 1 + q^n = 1$;

29.01.2007

4.124 129. Hausaufgabe

4.124.1 Stochastik-Buch Seite 222, Aufgabe 11

Die Ausschusswahrscheinlichkeit bei der Produktion eines Massenartikels sei $5\,\%$. Was ist wahrscheinlicher:

a) keine defekten unter 10 Stücken oder

b) wenigstens ein defektes unter 20 Stücken?

$q = 5\,\%$;

$P_{\text{a}} = p^{10} \approx 59{,}9\,\% < 64{,}2\,\% \approx 1 - p^{20} = P_{\text{b}}$; 30.01.2007

4.125 130. Hausaufgabe

4.125.1 Stochastik-Buch Seite 222, Aufgabe 13

Ein serienmäßig hergestelltes Gerät bestehe aus n Teilen. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Teil nicht funktioniert, sei für alle Teile gleich p. Fehlerhaftigkeit bzw. Brauchbarkeit der Teile seien unabhängige Ereignisse. Der Zusammenbau des Gerätes soll einwandfrei erfolgen. Das Gerät sei funktionsuntüchtig, wenn mindestens ein Teil fehlerhaft ist. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für Funktionsuntüchtigkeit in den Fällen

a) $n = 5$, $p = 0{,}03$,

b) $n = 250$, $p = 0{,}003$.

(Nach diesem Modell erklärt man sich das Versagen der Steuerung großer Raketen, die aus sehr vielen Einzelteilen zusammengesetzt sind.)

a) $P_{\mathrm{a}} = 1 - (1 - p)^5 \approx 14{,}1\,\%$;

b) $P_{\mathrm{b}} = 1 - (1 - p)^{250} \approx 52{,}8\,\%$;

4.125.2 Stochastik-Buch Seite 222, Aufgabe 14

Die Wahrscheinlichkeit eines sog. „China-Syndroms“ (Durchschmelzen eines Atomreaktors) wird auf maximal 10^{-5} geschätzt. Was kann man über die Wahrscheinlichkeit aussagen, dass 50 Atomreaktoren gleicher Sorte innerhalb der Wartungszeit störungsfrei arbeiten?

$q \leq 10^{-5}$;

$P \geq (1 - q)^{50} \approx 99{,}95\,\%$;

4.125.3 Stochastik-Buch Seite 222, Aufgabe 15

Es liegen Ergebnisse mehrerer Untersuchungen vor, in denen Angehörige eines medizinischen Personals, die sich Nadelstichverletzungen mit HIV-kontaminierten Nadeln zugezogen hatten, nachuntersucht wurden. Das Infektionsrisiko wird nach diesen Studien als unter $1\,\%$ liegend angesehen. Was lässt sich über die Wahrscheinlichkeit aussagen, dass von 10 so verletzten Personen mindestens eine infiziert wurde?

$q \leq 1\,\%$;

$P \leq 1 - (1-q)^{10} \approx 9{,}6\,\%$; 31.01.2007

4.126 131. Hausaufgabe

4.126.1 Stochastik-Buch Seite 235, Aufgabe 44

Auf einem Eisenbahnnetz, das von einem Bahnkraftwerk mit Strom versorgt wird, verkehren zehn Lokomotiven. Die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Minute eine Lokomotive anfährt und dabei eine Stromeinheit benötigt, sei für jede Lokomotive gleich $0{,}2$.

a) Mit welchem mittleren Strombedarf hat man zu rechnen?

$E(X) = 10\,E(X_i) = 10 \cdot 0{,}2 = 2$;

b) Die Stromleitung sei für maximal viel Stromeinheiten ausgelegt.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt es zu einer Überlastung der Stromversorgung?

$P_{0,2}^{10}(X > 4) = 1 - P_{0,2}^{10}(X \leq 4) \approx 3{,}3\,\%$;

c) Für wie viele Stromeinheiten ist die Versorgung auszulegen, damit die Gefahr der Überlastung nicht größer als $1\,\%$ wird?

$P_{0,2}^{10}(X > m) = 1 - P_{0,2}^{10}(X \leq m) \overset{!}{\leq} 1\,\%$;

Ausprobieren liefert: $m \geq 5$;

4.126.2 Stochastik-Buch Seite 235, Aufgabe 45

Bei einer Prüfung wird ein sog. „Multiple-Choice-Test“ mit Fragen angewendet. Es werden fünf Fragen gestellt. Zu jeder der Fragen sind in zufälliger Anordnung eine richtige und zwei falsche Antworten gegeben. Die Prüfung gilt als bestanden, wenn bei mindestens vier Fragen die richtige Antwort angekreuzt ist. Ein unvorbereiteter Prüfling wählt seine Antworten rein zufällig aus.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit besteht er die Prüfung?

$n = 5; \quad p = \frac{1}{3};$

$P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - P(X \leq 3) \approx 4{,}5\,\%;$

b) Wie groß sind Erwartungswert und Standardabweichung der Anzahl X seiner richtigen Antworten?

$E(X) = np \approx 1{,}7;$

$\sigma(X) = \sqrt{npq} \approx 1{,}1;$

4.126.3 Stochastik-Buch Seite 238, Aufgabe 57

Bei der laufenden „Gut-Schlecht-Prüfung“ eines Massenartikels habe sich ein Ausschuss von $10\,\%$ ergeben. Zur Überprüfung des Ausschussprozentsatzes in der weiteren Produktion greifen wir eine Stichprobe von 10 Stück zufällig heraus und lehnen die Hypothese, der Ausschussanteil sei weiter $10\,\%$ ab, falls sich in der Stichprobe zwei oder mehr Ausschussstücke befinden.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Hypothese zu Unrecht verworfen wird?

$n = 10; \quad p = 10\,\%;$

$P_{10\,\%}^{10}(X \geq 2) = 1 - P_{10\,\%}^{10}(X \leq 1) \approx 26{,}4\,\%;$

b) Wie groß ist bei dieser Entscheidungsregel die Wahrscheinlichkeit, dass die Hypothese nicht verworfen wird, wenn in Wirklichkeit der Ausschussanteil $20\,\%$ ist?

$P_{20\,\%}^{10}(X < 2) = P_{20\,\%}^{10}(X \leq 1) \approx 37{,}6\,\%;$

02.02.2007

4.127 132. Hausaufgabe

4.127.1 Stochastik-Buch Seite 238, Aufgabe 58

Eine Fabrik gibt den Ausschussanteil bei der Produktion elektrischer Sicherungen mit $1\,\%$ an. Der Käufer einer größeren Stückzahl entnimmt eine Stichprobe von 100 Stück und entscheidet nach folgendem Plan:

Sind unter den 100 Prüfstücken mehr als zwei defekt, wird die Lieferung zurückgewiesen. Sonst wird sie angenommen.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Kaufmann die Lieferung zurückweist, obwohl der Ausschussanteil der Angabe entspricht?

$P_{1\,\%}^{100}(X > 2) = 1 - P_{1\,\%}^{100}(X \leq 2) \approx 8{,}0\,\%$;

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Kaufmann die Lieferung annimmt, wenn der Ausschussanteil in Wirklichkeit $5\,\%$ ist?

$P_{5\,\%}^{100}(X \leq 2) \approx 11{,}8\,\%$;

4.127.2 Stochastik-Buch Seite 238, Aufgabe 59

In einer Lieferung von Schrauben einer bestimmten Sorte befinden sich nach Fabrikangabe $10\,\%$ Ausschussstücke. Zehn Schrauben werden zufällig mit Zurücklegen entnommen.

a) Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich in der Stichprobe keine schlechte (höchstens eine schlechte) Schraube befindet.

p: Wahrscheinlichkeit für eine schlechte Schraube

X: Anzahl der schlechten Schrauben

$P_{10\,\%}^{10}(X = 0) = (90\,\%)^{10} \approx 34{,}9\,\%$;

$P_{10\,\%}^{10}(X \leq 1) \approx 73{,}6\,\%$;

b) Der Käufer entschließt sich, die Lieferung zurückzusenden, wenn die Anzahl der defekten Schrauben in der Stichprobe drei oder noch größer sein sollte. Sonst wird die Lieferung angenommen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für irrtümliche Zurückweisung.

$P_{10\,\%}^{10}(X \geq 3) = 1 - P_{10\,\%}^{10}(X \leq 2) \approx 7{,}0\,\%$;

c) Angenommen, der Ausschussanteil ist nicht $10\,\%$, sondern in WAHRHEIT $20\,\%$.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird dann die Lieferung irrtümlicherweise angenommen?

$P_{20\,\%}^{10}(X < 3) = P_{20\,\%}^{10}(X \leq 2) \approx 67{,}8\,\%$;

d) Berechnen Sie die Annahmewahrscheinlichkeit für einen Ausschuss von $30\,\%$.

$P_{30\,\%}^{10}(X < 3) = P_{30\,\%}^{10}(X \leq 2) \approx 38{,}3\,\%$;

05.02.2007

„ich zwing dich nicht. . . ich lass´ dich durchfallen“ 05.02.2007

4.128 133. Hausaufgabe

4.128.1 Stochastik-Buch Seite 245, Aufgabe 67

Bestimmen Sie die Maximalwerte von

a) $B(10, 0{,}5)$,

$np - q = 10 \cdot 0{,}5 - 0{,}5 = 4{,}5$ nicht ganzzahlig

$B(n, p; k)$ maximal für $k = \lfloor (n+1)\,p \rfloor = \lfloor 5{,}5 \rfloor = 5$;

b) $B(15, 0{,}5)$,

$np - q = 15 \cdot 0{,}5 - 0{,}5 = 7$ ganzzahlig

$B(n, p; k)$ maximal für $k = (n+1)\,p - 1 = 7$ und $k = (n+1)\,p = 8$

c) $B(20, 0{,}5)$.

$np - q = 20 \cdot 0{,}5 - 0{,}5 = 9{,}5$ nicht ganzzahlig

$B(n, p; k)$ maximal für $k = \lfloor (n+1)\,p \rfloor = \lfloor 10{,}5 \rfloor = 10$;

4.128.2 Stochastik-Buch Seite 245, Aufgabe 69

Aus einer Urne, die zwei weiße Kugeln und eine schwarze Kugel enthält, sollen 12 Kugeln mit Zurücklegen gezogen werden.

a) Zeigen Sie, dass die Kombination von 8 weißen und 4 schwarzen Kugeln die wahrscheinlichste ist.

$p = \frac{2}{3}$: Trefferwahrscheinlichkeit (weiß)

$12 \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{23}{3}$ nicht ganzzahlig

$B\left(12, \frac{2}{3}\right)$ maximal für $k = \lfloor (12+1) \cdot \frac{2}{3} \rfloor = \lfloor 8{,}\overline{6} \rfloor = 8$;

b) Berechnen Sie diese Wahrscheinlichkeit.

$B\left(12, \frac{2}{3}; 8\right) \approx 23{,}8\,\%$;

07.02.2007

4.129 134. Hausaufgabe

4.129.1 Stochastik-Buch Seite 258, Aufgabe 2

X sei die Augenzahl beim Werfen eines echten Würfels.

a) Wie groß ist die maximale absolute Abweichung $|X-\mu|$?

$\mu = 3{,}5;$

$\max\{|X(\omega)-\mu| \mid \omega \in \Omega\} = 2{,}5;$

b) Berechnen Sie $P(|X-\mu| \leq 2{,}5)$ und $P(|X-\mu| > 2{,}5)$.

$P(|X-\mu| \leq 2{,}5) = 1;$

$P(|X-\mu| > 2{,}5) = 1 - P(|X-\mu| \leq 2{,}5) = 0;$

c) Welche Abschätzung liefert die Tschebyschew-Ungleichung für $P(|X-\mu| \leq 2{,}5)$ bzw. $P(|X-\mu| > 2{,}5)$?

$\sigma^2 = \frac{35}{12};$

$P(|X-\mu| \leq 2{,}5) > 1 - \frac{\sigma^2}{(2{,}5)^2} = 1 - \frac{35/12}{(2{,}5)^2} \approx 53{,}3\,\%;$

$P(|X-\mu| > 2{,}5) \leq \frac{\sigma^2}{(2{,}5)^2} = \frac{35/12}{(2{,}5)^2} \approx 46{,}7\,\%;$

4.129.2 Stochastik-Buch Seite 258, Aufgabe 3

Berechnen Sie von den folgenden Zufallsgrößen jeweils $P(|X-\mu| < t\sigma)$ für $t = 3/2$ und $t = 2$ und vergleichen Sie die exakten Werte mit den Schranken nach Tschebyschew:

a) X sei die Augensumme beim Werfen zweier Würfel.

$\mu = 7; \quad \sigma^2 = \frac{70}{12};$

$P\left(|X-\mu| < \frac{3}{2}\sigma\right) = \frac{30}{6^2} \approx 83{,}3\,\%;$ (Augensummen von 3 bis 11)

$P\left(|X-\mu| < \frac{3}{2}\sigma\right) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\left(\frac{3}{2}\sigma\right)^2} = 1 - \frac{4}{9} \approx 55{,}5\,\%;$

$P(|X-\mu| < 2\sigma) = \frac{34}{6^2} \approx 94{,}4\,\%;$ (Augensummen von 4 bis 10)

$P(|X-\mu| < 2\sigma) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{(2\sigma)^2} = 1 - \frac{1}{4} = 75\,\%;$

b) X sei die Anzahl der Wappen beim viermaligen Werfen einer einwandfreien Münze.

$\mu = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2; \quad \sigma^2 = 4 \cdot \frac{1}{2}\frac{1}{2} = 1;$

$P\big(|X-\mu| < \frac{3}{2}\sigma\big) = 87{,}5\,\%;$ (alle Ergebnisse außer 0^4 und 1^4)

$P\big(|X-\mu| < \frac{3}{2}\sigma\big) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\left(\frac{3}{2}\sigma\right)^2} = 1 - \frac{4}{9} \approx 55{,}5\,\%;$

$P(|X-\mu| < 2\sigma) = 87{,}5\,\%;$ (alle Ergebnisse außer 0^4 und 1^4)

$P(|X-\mu| < 2\sigma) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{(2\sigma)^2} = 1 - \frac{1}{4} = 75\,\%;$

4.129.3 Stochastik-Buch Seite 258, Aufgabe 4

Sei $k \in \mathbb{R}^+$. Eine Zufallsgröße X nehme die Werte $(-k)$, 0, k mit den Wahrscheinlichkeiten $P(X=-k) = \frac{1}{2\sqrt{k}}$, $P(X=0) = 1 - \frac{1}{\sqrt{k}}$, $P(X=k) = \frac{1}{2\sqrt{k}}$ an.

a) Berechnen Sie μ und σ^2.

Achtung: k muss größergleich $\frac{1}{4}$ sein, andernfalls ist $P(X = \pm k)$ größer 1!

$\mu = 0; \quad \sigma^2 = E(X^2) - E^2(X) = k^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} = k^{3/2};$

b) Berechnen Sie $P(|X| \geq k)$.

$P(|X| \geq k) = \frac{1}{\sqrt{k}};$ ($X = \pm k$)

c) Schätzen Sie $P(|X| \geq k)$ nach Tschebyschew ab.

$P(|X| \geq k) \leq \frac{k^{3/2}}{k^2} = \frac{1}{\sqrt{k}};$

d) Vergleichen Sie die beiden Ergebnisse.

Die TSCHEBYSCHEWschranke ist in diesem Fall optimal.

4.129.4 Stochastik-Buch Seite 258, Aufgabe 5

Bei der automatischen Herstellung von Stahlbolzen wird ein Durchmesser von $4{,}5\,\mathrm{mm}$ verlangt, wobei Abweichungen bis zu $0{,}2\,\mathrm{mm}$ zulässig sind. Eine Überprüfung ergab für den Durchmesser den Erwartungswert $4{,}5\,\mathrm{mm}$ bei einer Standardabweichung von $0{,}08\,\mathrm{mm}$. Mit welchem Anteil an unbrauchbaren Bolzen muss höchstenfalls gerechnet werden?

$P(|X - 4{,}5\,\mathrm{mm}| > 0{,}2\,\mathrm{mm}) < \frac{(0{,}08\,\mathrm{mm})^2}{(0{,}2\,\mathrm{mm})^2} = 16\,\%;$

4.129.5 Stochastik-Buch Seite 258, Aufgabe 6

Der Inhalt automatisch verpackter Fleischkonserven soll $1000\,\mathrm{g}$ betragen. Abweichungen von $30\,\mathrm{g}$ vom Soll seien zulässig. Bei der Überprüfung des Inhalts X vieler Konservendosen in g ergab sich als arithmatischer Mittelwert $\overline{x} = 1000\,\mathrm{g}$ und als empirische Varianz $s^2 = 100\,\mathrm{g}^2$.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt der Doseninhalt außerhalb der zulässigen Toleranz?

$P(|X - \overline{x}| > 30\,\mathrm{g}) < \frac{s^2}{(30\,\mathrm{g})^2} = \frac{1}{9} \approx 11{,}1\,\%;$

4.129.6 Stochastik-Buch Seite 258, Aufgabe 7

Der Fehleranteil serienmäßig hergestellter Produkte sei $1\,\%$. Aus einem Los sehr großen Umfangs N wird eine Stichprobe von $n = 1000$ Einheiten entnommen ($n \ll N$). Gefragt ist nach einer Abschätzung der Wahrscheinlichkeit, dass die Zahl X der fehlerhaften Elemente vom Erwartungswert um höchstens 10 Einheiten abweicht.

$\mu = 1000 \cdot 1\,\% = 10; \quad \sigma^2 = 1000 \cdot (1\,\%)\,(99\,\%) = 9{,}9;$

$P(|X - 10| \leq 10) > 1 - \frac{9{,}9}{10^2} = 90{,}1\,\%;$

4.129.7 Stochastik-Buch Seite 258, Aufgabe 8

Eine Anlage besteht aus 10 unabhängig voneinander arbeitenden Elementen, von denen jedes innerhalb der Wartungszeit mit der Wahrscheinlichkeit $5\,\%$ ausfällt. Es ist die Wahrscheinlichkeit dafür abzuschätzen, dass die Zahl X der ausfallenden Elemente vom Erwartungswert um mindestens 2 abweicht. Vergleich mit dem exakten Wert!

$\mu = 10 \cdot 5\,\% = 0{,}5; \quad \sigma^2 = 10 \cdot (5\,\%)\,(95\,\%) = 0{,}475;$

$P(|X - 0{,}5| \geq 2) \leq \frac{0{,}475}{2^2} \approx 11{,}9\,\%;$ 11.02.2007

4.130 135. Hausaufgabe

4.130.1 Stochastik-Buch Seite 260, Aufgabe 11

Die Lebensdauer X bestimmter Projektionslampen schwankt mit einer Standardabweichung von $\sigma = 10\,\mathrm{h}$ um den Erwartungswert $\mu = 150\,\mathrm{h}$.

a) Mit welcher Mindestwahrscheinlichkeit ergibt eine Zufallsauswahl von vier Lampen eine mittlere Lebensdauer zwischen 130 und 170 Stunden?

$P\left(\left|\overline{X} - 150\,\mathrm{h}\right| \leq 20\,\mathrm{h}\right) > 1 - \frac{(10\,\mathrm{h})^2}{4(20\,\mathrm{h})^2} \approx 93{,}8\,\%;$

b) Mit welcher Mindestwahrscheinlichkeit kann bei insgesamt 16 Lampen mit einer Gesamtlebensdauer zwischen 2240 und 2560 Stunden gerechnet werden?

$P\left(\left|X^\Sigma - 2400\,\mathrm{h}\right| \leq 160\,\mathrm{h}\,\mathrm{h}\right) > 1 - \frac{16(10\,\mathrm{h})^2}{(160\,\mathrm{h})^2} \approx 93{,}8\,\%;$

4.130.2 Stochastik-Buch Seite 260, Aufgabe 12

Für die Brenndauer X einer Glühlampenserie kann die Standardabweichung $\sigma < 100\,\mathrm{h}$ angenommen werden. Wie viele Lampen müssen mindestens getestet werden, damit der arithmetische Mittelwert der Brenndauer mit einer Wahrscheinlichkeit von wenigstens $95\,\%$ um weniger als $50\,\mathrm{h}$ vom Erwartungswert abweicht?

$95\,\% = P\left(\left|\overline{X} - \mu\right| < 50\,\mathrm{h}\right) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{n\cdot(50\,\mathrm{h})^2}; \Leftrightarrow$

$n \leq \frac{\sigma^2}{\left[1-P\left(\left|\overline{X}-\mu\right|<50\,\mathrm{h}\right)\right]c^2} = 80;$

XXX Fehler: n müsste $\geq$ irgendwas sein 4,21

4.130.3 Stochastik-Buch Seite 260, Aufgabe 13

Ein fairer Würfel wird n Mal unabhängig geworfen. X_i sei die beim i-ten Wurf erzielte Augenzahl.

a) Geben Sie mit Hilfe der Ungleichung von Tschebyschew eine Abschätzung der Wahrscheinlichkeit dafür an, dass das arithmetische Mittel $\overline{X}$ der erzielten Augenzahlen einen Wert aus dem Intervall $[3, 4]$ annimmt, wenn $n = 70$ Würfe durchgeführt werden.

Führen Sie dieses Experiment durch und berechnen Sie $\overline{x}$.

$\operatorname{Var}(X_i) = E(X_i^2) - E^2(X_i) = \frac{1}{6}\left[1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2\right] - (3{,}5)^2 = \frac{35}{12}$;

$P\left(\left|\overline{X} - 3{,}5\right| \leq 0{,}5\right) > 1 - \frac{35/12}{70 \cdot (0{,}5)^2} \approx 83{,}3\,\%$;

Berechnung von $\overline{x}$:

```
module Main where

import System.Random
import Control.Monad
import Data.List

main = study 10000 >>= putStrLn . show

run = fmap (avg . take 70 . randomRs (1,6))

study n = do
  ws <- replicateM n $ run (newStdGen >> getStdGen)
  let ok = filter (\x -> x >= 3 && x <= 4) ws
  return $ genericLength ok / genericLength ws

avg xs = fromIntegral (sum xs) / genericLength xs
```

Ergebnis: Mit ca. $98{,}679\,\%$ Wahrscheinlichkeit ($100\,100$ durchgeführte Experimente) liegt $\overline{x}$ in $[3, 4]$.

b) Wie oft muss man nach der Tschebyschew-Abschätzung mindestens werfen, damit $\overline{X}$ mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als $90\,\%$ einen Wert aus dem Intervall $[3{,}3, 3{,}7]$ annimmt?

$90\,\% = P\left(\left|\overline{X} - 3{,}5\right| \leq 0{,}2\right) > 1 - \frac{35/12}{n \cdot (0{,}2)^2}; \Leftrightarrow$

$n < \frac{35/12}{(1 - 90\,\%) \cdot (0{,}2)^2} \approx 729{,}2$; (XXX müsste $>$ heißen)

Man muss mindestens 730 Mal werfen. 19.02.2007

4.131 136. Hausaufgabe

4.131.1 Stochastik-Buch Seite 265, Aufgabe 17

In einer Urne befinden sich 1000 Kugeln, davon 200 weiße. Es wird 400 Mal eine Kugel mit Zurücklegen gezogen. Man gebe eine untere Schranke für die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass mindestens 40 Mal und höchstens 120 Mal eine weiße Kugel gezogen wird.

$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \leq \frac{40}{200}\right) > 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2} = 99\,\%$;

4.131.2 Stochastik-Buch Seite 265, Aufgabe 20

In einem Gefäß befinden sich 10^{23} Moleküle eines Gases. Für jedes Molekül sei die Wahrscheinlichkeit, sich in der linken Gefäßhälfte aufzuhalten, ebenso groß wie die, sich in der rechten Gefäßhälfte aufzuhalten. Die Moleküle mögen sich unabhängig bewegen.

Man schätze die Wahrscheinlichkeit dafür ab, dass sich zu einem bestimmten Zeitpunkt weniger als $49{,}99\,\%$ oder mehr als $50{,}01\,\%$ der Moleküle in der linken Hälfte des Gefäßes aufhalten.

$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| > 0{,}01\,\%\right) < \frac{pq}{n\varepsilon^2} = 2{,}5 \cdot 10^{-16};$

4.131.3 Stochastik-Buch Seite 266, Aufgabe 22

Wie oft muss man würfeln, damit sich die relative Häufigkeit für das Werfen einer Sechs mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $80\,\%$ um weniger als $1\,\%$ von der Wahrscheinlichkeit, eine Sechs zu würfeln, unterscheidet?

$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| < \varepsilon\,\%\right) \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2} \geq P; \Leftrightarrow$

$1 - P \geq \frac{pq}{n\varepsilon^2}; \Leftrightarrow$

$n \geq \frac{pq}{\varepsilon^2(1-P)};$

Speziell: $n \geq \frac{\frac{1}{6}\frac{5}{6}}{(1\,\%)^2 \cdot 20\,\%} \approx 6944{,}4; \rightarrow n \geq 6945;$

4.131.4 Stochastik-Buch Seite 266, Aufgabe 24

Man gebe eine Abschätzung für die Anzahl der Wahlberechtigten an, die man befragen muss, um mit mehr als $90\,\%$ Wahrscheinlichkeit das Wahlergebnis für eine bestimmte Partei mit einem Fehler von höchstens $1\,\%$ vorhersagen zu können.

$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) > 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2} \geq P; \Leftrightarrow$

$n \geq \frac{1}{4\varepsilon^2(1-P)};$

Speziell: $n \geq \frac{1}{4(1\,\%)^2 \cdot 10\,\%} = 25\,000;$ 26.02.2007

4.132 137. Hausaufgabe

4.132.1 Stochastik-Buch Seite 296, Aufgabe 1

Man berechne $\sum\limits_{i=0}^{25} B(50,1/2;i)$ nach der integralen Näherungsformel und vergleiche das Ergebnis mit dem Tabellenwert.

$\sum\limits_{i=0}^{25} B(50,1/2;i) = P_{1/2}^{50}(X \leq 25) \approx \phi\left(\frac{25-50\cdot 1/2+1/2}{\sqrt{50\cdot 1/2\cdot 1/2}}\right) \approx \phi(0{,}141421) \approx 0{,}55567;$

$F(50,1/2;25) \approx 0{,}55614;$

$\frac{0{,}55567-0{,}55614}{0{,}556140} \approx -0{,}085\,\%;$

4.132.2 Stochastik-Buch Seite 296, Aufgabe 2

Man berechne $B(72,1/3;26)$

a) nach der lokalen Näherungsformel,

$$B(72,1/3;26) \approx \frac{1}{\sqrt{72\cdot 1/3\cdot 2/3}} \cdot \varphi\left(\frac{26-72\cdot 1/3}{\sqrt{72\cdot 1/3\cdot 2/3}}\right) \approx \tfrac{1}{4}\varphi(0{,}5) \approx 0{,}088;$$

b) nach der integralen Näherungsformel.

$$B(72,1/3;26) \approx \phi\left(\frac{26-72\cdot 1/3+1/2}{\sqrt{72\cdot 1/3\cdot 2/3}}\right) - \phi\left(\frac{26-72\cdot 1/3-1/2}{\sqrt{72\cdot 1/3\cdot 2/3}}\right) \approx \phi(0{,}625) - \phi(0{,}375) \approx 0{,}73765 - 0{,}64803 = 0{,}08784;$$

27.02.2007

4.133 138. Hausaufgabe

4.133.1 Stochastik-Buch Seite 297, Aufgabe 13

Wir werfen 10.000 Mal eine Münze und nehmen an, dass die Ergebnisse „Zahl“ und „Wappen“ gleichwahrscheinlich sind. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich das Ergebnis „Wappen“ um höchstens 100 vom Erwarungswert unterscheidet.

$P(|X-\mu| \leq 100) > 1 - \frac{10\,000\cdot 1/2\cdot 1/2}{100^2} = 75\,\%;$

$P(|X-\mu| \leq 100) = P(4900 \leq X \leq 5100) = F_{1/2}^{10\,000}(5100) - F_{1/2}^{10\,000}(4899) =$?;

$P(|X-\mu| \leq 100) \approx 2 \cdot \phi\left(\frac{100+1/2}{\sqrt{10\,000 \cdot 1/2 \cdot 1/2}}\right) - 1 = \phi(2{,}01) \approx 95{,}556\,\%$;

4.133.2 Stochastik-Buch Seite 297, Aufgabe 17

In der Bundesrepublik Deutschland wurden jährlich ca. $6 \cdot 10^5$ Kinder geboren. Die Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt ist erfahrungsgemäß $0{,}514$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die relative Häufigkeit der Knabengeburten vom WAHREN Wert um höchstens $1/600$ abweicht?

$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \leq 1/600\right) > 1 - \frac{pq}{n(1/600)^2} \approx 85{,}0\,\%$;

$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \leq 1/600\right) \approx 2 \cdot \phi\left(\frac{6 \cdot 10^5 \cdot 1/600 + 1/2}{\sqrt{6 \cdot 10^5 \cdot 0{,}514 \cdot (1-0{,}514)}}\right) - 1 \approx 2\phi(2{,}58) - 1 \approx 99{,}0\,\%$;

Angabe schlecht formuliert: Der „wahre Wert“ der relativen Häufigkeit ist einfach der Wert der relativen Häufigkeit! Gemeint ist die Wahrscheinlichkeit.

Außerdem ist die angegebene „Wahrscheinlichkeit“ von $0{,}514$ eine rel. Häufigkeit...

Und zusätzlich ist nicht angegeben, auf welchen Zeitraum sich die „relative Häufigkeit der Knabengeburten“ bezieht. 28.02.2007

4.134 139. Hausaufgabe

4.134.1 Stochastik-Buch Seite 299, Aufgabe 23

Wie oft muss man einen Laplace-Würfel werfen, damit die relative Trefferhäufigkeit der Augenzahl 6 von der Trefferwahrscheinlichkeit um höchstens $\varepsilon = 1\,\%$ abweicht bei einer Wahrscheinlichkeit von ca. $\beta = 95\,\%$?

$\phi(t) = \frac{1+\beta}{2} = 97{,}5\,\%; \rightarrow t \approx 1{,}96$;

$n > \langle \tilde{n} \rangle = \langle pq \cdot \frac{t^2}{\varepsilon^2} \rangle \approx \langle 5335{,}6 \rangle = 5336$; (mit $\langle \cdot \rangle$ der Rundungsfunktion) 04.03.2007

4.135 140. Hausaufgabe

4.135.1 Stochastik-Buch Seite 299, Aufgabe 25

Welche Versuchszahl ist erforderlich, damit die relative Trefferhäufigkeit von der unbekannten Trefferwahrscheinlichkeit um weniger als $0{,}1\,\%$ abweicht bei einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $99\,\%$?

$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{n}\sqrt{pq}$; $\rightarrow$ für unbekanntes p: $\sigma \leq \sqrt{n}/2$;

$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| < 0{,}1\,\%\right) = 99\,\% \approx 2 \cdot \phi\left(\frac{n \cdot 0{,}1\,\%}{\sqrt{n}/2}\right) - 1; \Leftrightarrow$

$\frac{1}{2}\left(1 + 99\,\%\right) = \phi\left(\frac{n \cdot 0{,}1\,\%}{\sqrt{n}/2}\right); \Leftrightarrow$

$\phi^{-1}\left(\frac{1+99\,\%}{2}\right) = \frac{n \cdot 0{,}1\,\%}{\sqrt{n}/2} = 2\sqrt{n} \cdot 0{,}1\,\%; \Leftrightarrow$

$n = \left[\frac{\phi^{-1}\left(\frac{1+99\,\%}{2}\right)}{2 \cdot 0{,}1\,\%}\right]^2 \approx \left[\frac{2{,}58}{2 \cdot 0{,}1\,\%}\right]^2 = 1\,664\,100;$

4.135.2 Stochastik-Buch Seite 299, Aufgabe 26

Wie viele Wahlberechtigte muss man befragen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $90\,\%$ das Wahlergebnis für eine bestimmte Partei mit einem Fehler von höchstens $1\,\%$ vorhersagen können?

$n \approx \left[\frac{\phi^{-1}\left(\frac{1+90\,\%}{2}\right)}{2 \cdot 1\,\%}\right]^2 \approx \left[\frac{1{,}64}{2 \cdot 1\,\%}\right]^2 = 6724;$

„und dann schuf Gott die Welt, und sie war so, wie jetzt“

„mach´ so, dass es gut ist“ 05.03.2007

4.136 141. Hausaufgabe

4.136.1 Stochastik-Buch Seite 300, Aufgabe 29

Geben Sie die Maximalabweichung der relativen Geburtenhäufigkeit für Knaben bei 1000 Neugeborenen von der Geburtenwahrscheinlichkeit $0{,}514$ an, die man mit einer Wahrscheinlichkeit zu $50\,\%$ zu erwarten hat.

$P(|X/n - p| \leq \varepsilon) \approx 2 \cdot \phi\left(\frac{1000\varepsilon + 1/2}{\sigma}\right) - 1 \stackrel{!}{=} 50; \Leftrightarrow$

$\phi^{-1}(3/4)\sqrt{1000 \cdot 0{,}514 \cdot (1 - 0{,}514)} = 1000\varepsilon \approx 10{,}1;$ 06.03.2007

4.137 142. Hausaufgabe

4.137.1 Stochastik-Buch Seite 300, Aufgabe 30

Eine Laplace-Münze wird 4000 Mal geworfen. Bestimmen Sie diejenigen Grenzen der relativen Häufigkeit von Wappen gegenüber dem normalen Wert $0{,}5$, welchen die Wahrscheinlichkeit $50\,\%$ zukommt, sodass es ebenso wahrscheinlich ist, der Wert werde zwischen sie fallen bzw. sie überschreiten.

$P(|X/4\,000 - p| \leq \varepsilon) \approx 2 \cdot \phi\left(\frac{4\,000\varepsilon + 1/2}{10\sqrt{10}}\right) - 1 \stackrel{!}{=} 50\,\%; \Leftrightarrow$

$\varepsilon = \frac{\phi^{-1}(3/4) \cdot 10\sqrt{10} - 1/2}{4\,000} \approx \frac{20{,}7}{4000};$

4.137.2 Stochastik-Buch Seite 309, Aufgabe 41

In einem Großversuch wurde an einer Universität ermittelt, dass der mittlere IQ (Intelligenzquotient) der Stundenten normal verteilt ist mit einem Mittelwert von 110 und einer Standardabweichung von 12.

a) Welcher Anteil der Studenten der obigen Universität hat einen IQ von höchstens 100?

$P(X \leq 100) = \phi\left(\frac{100-110}{12}\right) \approx 20{,}2\,\%;$

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit besitzt ein zufällig ausgewählter Student der obigen Universität einen IQ von mehr als 107?

$P(X > 107) = 1 - P(X \leq 107) = 1 - \phi\left(\frac{107-110}{12}\right) \approx 61{,}3\,\%;$

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt der IQ eines zufällig ausgewählten Studenten der obigen Universität im Intervall $[104, 116]$?

$P(104 \leq X \leq 116) = \phi\left(\frac{116-110}{12}\right) - \phi\left(\frac{104-110}{12}\right) \approx -0{,}2531\,\%;$ **(XXX)**

19.03.2007

4.138 144. Hausaufgabe

4.138.1 Stochastik-Buch Seite 337, Aufgabe 5

Bei der Kreuzung zweier Blumensorten ergeben sich rot blühende und weiß blühende Pflanzen. Eine der beiden Farben ist ein „dominantes“, die andere ein „rezessives“ Merkmal. Nach den MENDELschen Gesetzen tritt das dominante Merkmal mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{4}$, das rezessive mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ auf. Bei einem Kreuzungsversuch ergeben sich 15 Nachkommen. Das häufiger auftretende Merkmal soll als dominant gelten. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Entscheidung nicht richtig?

X: Anzahl rot blühender Pflanzen
Y: Anzahl weiß blühender Pflanzen
n: Gesamte Anzahl Pflanzen ($X + Y = n$)

p: Wahrscheinlichkeit für rot blühende Pflanze

$P_{1/4}^{n}(X > Y) = P_{1/4}^{n}(X > n - X) = P_{1/4}^{n}(X > n/2) = 1 - P_{1/4}^{n}(X \leq n/2) \approx 1{,}7\,\%$;

[Ps unterschiedlicher Räume nicht addieren!]

„zur Zeit geht viel kaputt. . . das ist ein Zeichen, dass etwas zu Ende geht. . .“ 20.03.2007

4.139 145. Hausaufgabe

4.139.1 Stochastik-Buch Seite 336, Aufgabe 3

Bei einem Stichprobenumfang von $n = 20$ soll über die beiden Hypothesen H_1: $p = 0{,}25$ und H_2: $p = 0{,}5$ entschieden werden. Die irrtümliche Entscheidung für H_2 soll höchstens mit $5\,\%$ Wahrscheinlichkeit vorkommen.

a) Bestimmen Sie die Entscheidungsregel.

$\mathrm{An}\,H_1 = \{0, 1, \ldots, k\}$; $\quad \mathrm{An}\,H_2 = \{k + 1, \ldots, n\}$;

$P_{H_1}^{20}(X \in \mathrm{An}\,H_2) = P_{0{,}25}^{20}(X \geq k + 1) = 1 - P_{0{,}25}^{20}(X < k + 1) = 1 - P_{0{,}25}^{20}(X \leq k) = 1 - F(20, 0{,}25; k) \overset{!}{\leq} 5\,\%$; $\Leftrightarrow$

$F(20, 0{,}25; k) \geq 1 - 5\,\% = 95\,\%$; $\Leftrightarrow k \geq 8$;

$\mathrm{An}\,H_1 = \{0, 1, \ldots, 8\}$; $\quad \mathrm{An}\,H_2 = \{9, 10, \ldots, 20\}$;

b) Stellen Sie die Wahrscheinlichkeiten für richtige und irrtümliche Entscheidungen in einer Vierfeldertafel entsprechend Beispiel 15.1 zusammen.

	$X \in \mathrm{An}\,H_1$	$X \in \mathrm{An}\,H_2$
H_1 „in Wahrheit"	$P_{0{,}25}^{20}(X \leq 8) \approx 95{,}9\,\%$	$P_{0{,}25}^{20}(X > 8) \approx 4{,}1\,\%$
H_2 „in Wahrheit"	$P_{0{,}5}^{20}(X \leq 8) \approx 25{,}2\,\%$	$P_{0{,}5}^{20}(X > 8) \approx 74{,}8\,\%$

c) Für welche Entscheidungsregel sind die beiden Fehlerwahrscheinlichkeiten etwa gleich groß? Entwerfen Sie auch in diesem Fall eine Vierfeldertafel der Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Entscheidungen.

$\mathrm{An}\,H_1 = \{0, 1, \ldots, k\};\qquad \mathrm{An}\,H_2 = \{k+1, \ldots, n\};$

$P_{0{,}25}^{20}(X \geq k+1) \overset{!}{\approx} P_{0{,}5}^{20}(X \leq k);\ \Leftrightarrow$

$1 - P_{0{,}25}^{20}(X \leq k) \overset{!}{\approx} P_{0{,}5}^{20}(X \leq k);$

Ausprobieren liefert: $k = 7$;

Fehlerwahrscheinlichkeiten sind dann $10{,}2\,\%$ bzw. $13{,}2\,\%$.

22.03.2007

4.140 146. Hausaufgabe

4.140.1 Stochastik-Buch Seite 337, Aufgabe 4

In einem Betrieb werden Schrauben 1. Wahl mit $5\,\%$ Ausschussstücken und Schrauben 2. Wahl mit $20\,\%$ Ausschussstücken in getrennten Schachteln verpackt. Von einer Schachtel ist das Etikett verloren gegangen. Der Werkmeister will schnell entscheiden, um welche Sorte es sisch handelt. Er entnimmt 10 Schrauben und überprüft, ob sie sich in die entsprechenden Muttern einwandfrei eindrehen lassen. Sollte höchstens eine Schraube nicht passen, entschließt er sich, den Inhalt der Schachtel für 1. Wahl, ansonsten für 2. Wahl zu halten.

a) Formulieren Sie mit Worten die beiden Möglichkeiten für falsche Entscheidungen.

Es ist möglich, dass der Werkmeister die Schachtel für 2. Wahl hält, obwohl sie „in Wahrheit" eine 1. Wahl ist (Fehler 1. Art), und dass der Werkmeister die Schachtel für 1. Wahl hält, obwohl sie „in Wahrheit" eine 2. Wahl ist (Fehler 2. Art).

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt es jeweils zu den falschen Entscheidungen?

H_1: Schachtel 1. Wahl, H_2: Schachtel 2. Wahl

Testgröße Z: Anzahl nicht passender Schrauben

$\mathrm{An}\, H_1 = \{0, 1\}$; $\quad \mathrm{An}\, H_2 = \{2, 3, \ldots, 10\}$;

$P(\text{Fehler 1. Art}) = P^{10}_{5\,\%}(Z \geq 2) = 1 - P^{10}_{5\,\%}(Z \leq 1) \approx 8{,}6\,\%$;

$P(\text{Fehler 2. Art}) = P^{10}_{20\,\%}(Z \leq 1) \approx 37{,}6\,\%$;

c) Wie muss die Entscheidungsregel lauten, damit 1. Wahl höchstens mit $5\,\%$ Wahrscheinlichkeit für 2. Wahl gehalten wird?

Wie groß ist in diesem Fall die Wahrscheinlichkeit, 2. Wahl irrtümlich für 1. Wahl zu halten?

$\mathrm{An}\, H_1 = \{0, 1, \ldots, k\}$; $\quad \mathrm{An}\, H_2 = \{k + 1, \ldots, 20\}$;

$P(\text{Fehler 1. Art}) = P^{10}_{5\,\%}(Z \geq k + 1) = 1 - P^{10}_{5\,\%}(Z \leq k) \overset{!}{\leq} 5\,\%$; $\Leftrightarrow$

$P^{10}_{5\,\%}(Z \leq k) \overset{!}{\geq} 95\,\%$; $\Leftrightarrow$

$k \geq 2$; $\rightarrow$

$\mathrm{An}\, H_1 = \{0, 1, 2\}$; $\quad \mathrm{An}\, H_2 = \{3, 4, \ldots, 20\}$;

$P(\text{Fehler 2. Art}) = P^{10}_{20\,\%}(Z \leq 2) \approx 67{,}8\,\%$;

d) Lässt sich die Wahrscheinlichkeit der irrtümlichen Entscheidung für 1. Wahl unter $10\,\%$ senken? (Begründung!)

$P(\text{Fehler 2. Art}) = P^{10}_{20\,\%}(Z \leq k) \overset{!}{<} 10\,\%$;

Nein, es ist möglich, da schon $P^{10}_{20\,\%}(Z \leq 0)$ größer als $10\,\%$ ist und $k \mapsto P^{10}_{20\,\%}(Z \leq k)$ in k monoton steigt.

(Es wäre noch der „Hack“ $\mathrm{An}\, H_1 = \{\}$ möglich. Außerdem könnte man den Umfang der Stichprobe erhöhen.)

23.03.2007

„insofern ist Mathematik für viele Menschen sowieso Wahrscheinlichkeitsrechnung. . . “ 23.03.2007

4.141 147. Hausaufgabe

4.141.1 Stochastik-Buch Seite 340, Aufgabe 7

Bei der Entscheidung über die Qualität der Widerstände von Beispiel 15.1 soll höchstens mit $5\,\%$ Wahrscheinlichkeit eine Schachtel mit Widerständen 1. Wahl irrtümlich für 2. Wahl gehalten werden, wobei 130 Wiederstände überprüft werden.

a) Bestimmen Sie die Entscheidungsregel.

H_1 (1. Wahl): $p = 0{,}1$; $\quad \mathrm{An}\, H_1 = \{0, 1, \ldots, k\}$;

H_2 (2. Wahl): $p = 0{,}3$; $\quad \mathrm{An}\, H_2 = W_Z \setminus H_1 = \{k+1, k+2, \ldots, 130\}$;

$1 - P_{0,1}^{130}(X \leq k) \approx 1 - \phi\left(\frac{k-130\cdot 0{,}1+1/2}{\sqrt{130\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9}}\right) \overset{!}{\leq} 5\,\%$; $\Leftrightarrow$

$\phi(t) \geq 95\,\%$; $\Leftrightarrow$

$t = \frac{k-130\cdot 0{,}1+1/2}{\sqrt{130\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9}} \geq 1{,}65$; $\Leftrightarrow$

$k \geq 18{,}1$; $\rightarrow$

$\mathrm{An}\, H_1 = \{0, 1, 2, \ldots, 19\}$;

b) Berechnen Sie auch die zweite Fehlerwahrscheinlichkeit.

$P_{0,3}^{130}(X \leq 19) \approx \phi\left(\frac{19-130\cdot 0{,}3+1/2}{\sqrt{130\cdot 0{,}3\cdot 0{,}7}}\right) \approx \phi(-3{,}73) = 1 - \phi(3{,}73) \approx 0{,}01\,\%$;

26.03.2007

„drum vergammelt ihr nur“

„viele Schüler erschrecken ja, wenn Unterricht stattfindet“

„sehr gut, hast dich noch verbessert. . . sonst hätt´ ich wieder »1000 Punkte« gesagt“

„bloß das schlimme ist, danach [nach dem Unfall] steht er [der Baum] ja nicht mehr, und dann stimmt´s doch nicht mehr“ 26.03.2007

4.142 148. Hausaufgabe

4.142.1 Stochastik-Buch Seite 350, Aufgabe 11

Ein Elektrohändler vereinbart mit einem Lieferanten von Glühbirnen, dass er einen bestimmten Preisnachlass erhält, falls der Anteil p an defekten Glühbirnen einer größeren Lieferung $10\,\%$ übersteigt.

Vereinbarungsgemäß werden der ganzen Sendung 50 Glühbirnen zufällig entnommen und geprüft. Ergeben sich mehr als 7 defekte Glühbirnen, so soll angenommen werden, p übersteige $10\,\%$.

(Bemerkung: Selbstverständlich werden die Glühbirnen ohne Zurücklegen entnommen. Da es sich aber um eine sehr große Lieferung handelt, macht es für die Rechnung keinen wesentlichen Unterschied, ob mit oder ohne Zurücklegen entnommen wird.)

a) Wie groß ist das Risiko des Lieferanten, einen Preisnachlass gewähren zu müssen, obwohl nur $10\,\%$ der Glühbirnen defekt sind?

X: Anzahl defekter Glühbirnen

$P^{50}_{10\,\%}(X > 7) = 1 - P^{50}_{10\,\%}(X \leq 7) \approx 12{,}2\,\%;$

b) Wie groß ist das Risiko des Händlers, keinen Preisnachlass zu erhalten, obwohl nur $20\,\%$ der Glühbirnen defekt sind?

$P^{50}_{20\,\%}(X \leq 7) \approx 19{,}0\,\%;$

c) Wie müsste das Entscheidungsverfahren eingerichtet werden, damit der Händler höchstens mit einer Wahrscheinlichkeit von $5\,\%$ zu Unrecht einen Preisnachlass erhält?

$P^{50}_{10\,\%}(X > c) = 1 - P^{50}_{10\,\%}(X \leq c) \overset{!}{\leq} 5\,\%; \Leftrightarrow$

$P^{50}_{10\,\%}(X \leq c) \geq 95\,\%; \Leftrightarrow$

$c \geq 9;$

Nimmt man die Hypothese, p übersteige $10\,\%$, dann an, wenn $X > 9$ ist, so ist die Erforderung der Aufgabenstellung erfüllt.

d) Wie müsste die Entscheidungsregel lauten, damit der Händler mit mindestens $50\,\%$ Wahrscheinlichkeit einen Preisnachlass erhält, wenn $20\,\%$ der Glühbirnen defekt sind?

$P^{50}_{20\,\%}(X > c) = 1 - P^{50}_{20\,\%}(X \leq c) \overset{!}{\geq} 50\,\%; \Leftrightarrow$

$P^{50}_{20\,\%}(X \leq c) \leq 50\,\%; \Leftrightarrow$

$c \leq 9;$

Nimmt man die Hypothese, p übersteige $10\,\%$, dann an, wenn $X > 9$ ist, so ist die Erforderung der Aufgabenstellung erfüllt.

27.03.2007

4.143 149. Hausaufgabe

4.143.1 Stochastik-Buch Seite 350, Aufgabe 12

Ein Unternehmen beauftragt eine Werbeagentur, für eines seiner Produkte eine große Fernsehwerbung durchzuführen. Sollte nach Beendigung der Werbeaktion der Bekanntheitsgrad des Produkts mehr als $40\,\%$ betragen, so ist das Unternehmen bereit, über den vereinbarten Preis für die Werbeaktion hinaus einen zusätzlichen Betrag an die Werbeagentur zu zahlen.

Zur Entscheidung darüber soll eine Umfrage unter 100 zufällig ausgewählten Personen durchgeführt werden.

a) Wie lautet die zu testende Nullhypothese?

H_0: $p \leq 40\,\%$;

b) Wie muss die Entscheidungsregel lauten, damit das Risiko für das Unternehmen, zu Unrecht mehr zu zahen, höchstens $1\,\%$ beträgt?

$\mathrm{An}\, H_0 = \{0, 1, \ldots, k\}$;

$p \leq 40\,\%$: $P_p^{100}(X > k) \leq P_{40\,\%}^{100}(X > k) = 1 - P_{40\,\%}^{100}(X \leq k) \overset{!}{\leq} 1\,\%$;

$P_{40\,\%}^{100}(X \leq k) \geq 99\,\%$; $\Leftrightarrow k \geq 52$;

$\mathrm{An}\, H_0 = \{0, 1, \ldots, 52\}$;

c) Wie groß ist dann das Risiko der Werbeagentur, den zusätzlich vereinbarten Betrag nicht zu erhalten, obwohl der Bekanntheitsgrad des Produkts nach der Werbeaktion bei $50\,\%$ liegt?

$P_{50\,\%}^{100}(X \leq 52) \approx 69{,}1\,\%$;

4.143.2 Stochastik-Buch Seite 350, Aufgabe 13

Man werfe eine Münze 100 Mal und teste mit $\alpha = 10\,\%$ ($5\,\%$) die Nullhypothese, dass es sich um eine Laplace-Münze handelt.

XXX: Was ist der Arbeitsauftrag? 16.04.2007

4.144 150. Hausaufgabe

4.144.1 Stochastik-Buch Seite 351, Aufgabe 16

In einer Klinik hat sich nach langjähriger Erfahrung gezeigt, dass $60\,\%$ der Patienten, bei denen eine bestimmte Darmoperation durchgeführt wird, als geheilt angesehen werden können. Ein Arzt entwickelt eine neue Operationstechnik, die bei 22 von 30 Patienten erfolgreich ist. Kann man daraus signifikant oder gar hochsignifikant schließen, dass die neue Operationstechnik besser ist?

$H_0\colon p > 60\,\%$;

$\mathrm{An}\ H_0 = \{22, 23, \ldots, 30\}$;

$P_p^{30}(X \geq 22) \leq P_{60\,\%}^{30}(X \geq 22) = 1 - P_{60\,\%}^{30}(X \leq 21) \approx 9{,}4\,\%$; mit $p \leq 60\,\%$;

Nein, man kann weder von einer signifikanten noch von einer hochsignifikanten Steigerung sprechen.

[„H_0 ist die Hypothese des Etablierten"]

[Beim „Signifikanzansatz" muss in die $P(\cdots)$-Klammern der Ablehnungsbereich der Nullhypothese!]

[Annahme der „Signifikanzvermutung" = Ablehnung der Nullhypothese] 17.04.2007

4.145 151. Hausaufgabe

4.145.1 Stochastik-Buch Seite 351, Aufgabe 18

Aufgrund längerer Erfahrung weiß man in einem Betrieb, der Glühbirnen herstellt, dass etwa $25\,\%$ der gefertigten Glühlampen eine Brenndauer von weniger als 6000 Stunden haben. Durch ein neuartiges Herstellungsverfahren soll die Qualität verbessert werden. Aus der neuen Fertigung werden 100 Glühlampen entnommen. Wie viele davon müssen mindestens mehr als 6000 Stunden brennen, damit man das neue Verfahren als signifikant bzw. hochsignifikant besser bezeichnen kann?

$H_0\colon p \leq 75\,\%$; $\quad \mathrm{An}\, H_0 = \{0, \ldots, k\}$;

$P_{75\,\%}^{100}(X > k) = 1 - P_{75\,\%}^{100}(X \leq k) \leq \alpha$;

Für $\alpha = 5\,\%$: $k \geq 83$; $\quad \mathrm{Ab}\, H_0 = \{84, \ldots, 100\}$;

Für $\alpha = 1\,\%$: $k \geq 36$; $\quad \mathrm{Ab}\, H_0 = \{87, \ldots, 100\}$; 18.04.2007

4.145.2 152. Hausaufgabe

Stochastik-Buch Seite 351, Aufgabe 19

Ein Wirtschaftsinstitut behauptet, dass in einer bestimmten Großstadt $50\,\%$ der Bevölkerung ein monatliches Brutto-Einkommen von höchstens 1500 € und $50\,\%$ der Bevölkerung mehr als 1500 € haben.

Eine Zufallsstichprobe von 100 Familien ergibt, dass nur 41 ein Einkommen von mehr als 1500 € haben. Kann man die Angaben des Wirtschaftsinstituts mit dem Signifikanzniveau $5\,\%$ als falsch bezeichnen?

$X =$ Anzahl Familien mit Einkommen mehr als 1500 €;

$H_0\colon p \geq 50\,\%$; (Behauptung des Wirtschaftsinstituts)

$P_{50\,\%}^{100}(X \leq 41) \approx 4{,}4\,\% \leq 5\,\%$;

($\mathrm{Ab}\, H_0 = \{0, \dots, 41\}$;)

Ja, man kann die Angaben mit dem Signifikanzniveau $5\,\%$ als falsch bezeichnen. 14.11.2005

5 Tests

5.1 1. Klausur am 9.11.2005

1. Berechne $\int\limits_1^5 \left(\frac{1}{4}x^3 - 3x + 5\right) \mathrm{d}x$.

   $\int\limits_1^5 \left(\frac{1}{4}x^3 - 3x + 5\right) \mathrm{d}x = \ldots = 23$;

2. Berechne den Inhalt der Fläche, die von den Graphen der Funktionen f und g eingeschlossen wird. Dabei ist

   $\mathrm{f}(x) = 5x^3 - 2x^2 - 6; \quad x \in \mathbb{R};$ und
   $\mathrm{g}(x) = 3x^3 + 2x^2 + 10x - 18; \quad x \in \mathbb{R};$

   $\mathrm{f}(x) - \mathrm{g}(x) = 2x^3 - 4x^2 - 10x + 18;$

   Nullstellen: -2, 1, 3

   $\phi'(x) = \mathrm{f}(x) - \mathrm{g}(x);$

$\phi(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{4}{3}x^3 - 5x^2 + 12x;$
$A = |\phi(1) - \phi(-2)| + |\phi(3) - \phi(1)| = \frac{253}{6};$
„Aber es ist in keiser Weise stringent[3]“

3. Gegeben sind die Geraden $\mathrm{g} : x = 1$ und $\mathrm{h} : y = 1$ sowie die Funktion f_a, $a \in \mathbb{R}$ mit $\mathrm{f}_a(x) = a \cdot x^2$. [Spätere Ergänzung: $x \geq 0$]

   Berechne den Inhalt der angegebenen Fläche.

   a) Fläche, die von den Geraden g und h und dem Graphen von f_4 eingeschlossen ist.
   $A = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} 4x^2 \,\mathrm{d}x - \frac{1}{2} = \ldots = \frac{2}{3};$

   b) Fläche, die von der Geraden g und h und dem Graphen von $\mathrm{f}_{\frac{1}{5}}$ eingeschlossen ist.
   $A = \sqrt{5} - 1 - \int\limits_{1}^{\sqrt{5}} \frac{1}{5}x^2 \,\mathrm{d}x = \ldots = \frac{2}{3}\sqrt{5} - \frac{14}{15};$
   „das kann man halt noch eintippen und dann kommt halt irgendwas ´raus“

   c) $A = 1 - 2\int\limits_{0}^{1} x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{3};$

4. Für $0 < a < b$ sei $q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$, $n \in \mathbb{N}$ und $x_k = a \cdot q^k$, $k = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. 16.11.2005

   a) Zeige, dass gilt: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b;$
   $x_0 = a \cdot q^0 = a;$
   $x_n = a \cdot q^n = a\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}\right)^n = a \cdot \frac{b}{a} = b;$
   $x_{k+1} = x_k \cdot q > x_k$, da $q > 1$, weil $b > a > 0$.

   b) Bestimme für festes n den maximalen Abstand d_n benachbarter Stellen x_k und untersuche das Verhalten von d_n für $n \to \infty$.
   $x_{k+1} - x_k = aq^{k+1} - aq^k = aq^k\,(q-1)$, maximal für $k = n - 1$.
   $d_n = b - a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n-1}{n}} \to b - a\left(\frac{b}{a}\right)^1 = b - b = 0$ für $n \to \infty$.

[3] „folgerichtig, einsichtig, nachvollziehbar“

c) Zeige, dass die Untersumme zur Funktion f_α, $a \in \mathbb{N}$ mit $f_\alpha(x) = x^\alpha$, $x \in [a,b]$ bezogen auf die Stellen x_k gegeben ist durch $a^{\alpha+1} \cdot (q-1) \cdot \left(1 + q^{\alpha+1} + q^{2(\alpha+1)} + \cdots + q^{(n-1)(\alpha+1)}\right)$

$$\begin{aligned} s_n &= (aq-a)\,a^\alpha + (aq^2 - aq)\,(aq)^\alpha + (aq^3 - aq^2)\,(aq^2)^\alpha + \cdots + \\ &+ (aq^n - aq^{n-1})\,(aq^{n-1})^\alpha = \\ &= a \cdot a^\alpha \cdot (q-1) \cdot \left(1 + q \cdot q^\alpha + q^2 \cdot q^{2\alpha} + \cdots + q^{n-1} \cdot q^{(n-1)\alpha}\right) = \\ &= a^{\alpha+1}\,(q-1)\left(1 + q^{\alpha+1} + q^{2(\alpha+1)} + \cdots + q^{(n-1)(\alpha+1)}\right); \end{aligned}$$

14.11.2005

5. Betrachtet werden die auf $[a,b]$ definierten Funktionen f, F_k und F_l mit $\mathrm{F}_k(x) = \int\limits_k^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t$ und $\mathrm{F}_l(x) = \int\limits_l^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t$ gemäß folgender Skizze:

   [Skizze]

   a) Skizziere in ein Koordinatensystem möglichst genau die Graphen von F_k und F_l.

   b) Gib einen Zusammenhang zwischen F_k und F_l an.

   c) Skizziere den Graphen einer Stammfunktion von f, die nicht als Integralfunktion darstellbar ist, und begründe deine Wahl.

23.01.2006

5.2 2. Klausur am 11.1.2006

1. Zu Beginn einer Unterrichtsstunde wird in einem Kurs aus vier Mädchen und fünf Jungen eine Anwesenheitskontrolle durchgeführt.

   Beschreibe drei Zufallsexperimente mit den Ergebnisräumen Ω_1, Ω_2 und Ω_3 so, dass Ω_2 eine Vergröberung von Ω_1 und Ω_3 eine Vergröberung von Ω_2 ist.

   Gib die Ergebnisräume beschreibend oder explizit einschließlich ihrer Mächtigkeiten an und stelle die beiden Vergröberungsabbildungen dar. (16 P)

   $\Omega_1 = \{a, \overline{a}\}$; $\quad |\Omega_1| = 2^9$;

$\Omega_2 = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$; $\quad |\Omega_2| = 10$;

$\Omega_3 = \{\text{alle da}, \text{nicht alle da}\}$; $\quad |\Omega_3| = 2$;

$\Omega_1 \to \Omega_2 \quad$ 9-Tupel (Anzahl der „a" in einem 9-Tupel sei z) $\mapsto z$

$\Omega_2 \to \Omega_3 \quad 0 \mapsto$ nicht alle da, $1 \mapsto$ nicht alle da, $\ldots, 8 \mapsto$ nicht alle da, $9 \mapsto$ alle da

2. Aus einer Urne mit von 1 bis N durchnummerierten Kugeln werden n Kugeln unter Beachtung der Reihenfolge gezogen. Sowohl das Ziehen mit Zurücklegen als auch das Ziehen ohne Zurücklegen werden dabei als Laplace-Experimente angenommen.

   Untersuche, ob es unter den gegebenen Bedingungen sinnvoll ist, auch die beiden anderen Zieharten ohne Beachtung der Reihenfolge als Laplace-Experimente aufzufassen. (5½ P aufs Ziehen ohne Zurücklegen, 6½ aufs Ziehen mit Zurücklegen)

3. In einem Klassenzimmer mit von 1 bis 22 durchnummerierten Tischen soll ein Kurs mit 17 Teilnehmern eine Klausur schreiben. Dabei soll jeder Prüfling allein an einem Tisch sitzen. (22 P)

   a) Bestimme die Anzahl der unterschiedlichen Belegungen, wenn nur darauf geachtet wird, welche Tische von den Prüflingen benutzt werden. Berechne damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Tische mit den Nummern
   $\binom{22}{17} = 26\,334$;

   aa)
   6 bis 22
   $P = \frac{1}{26\,334} \approx 3{,}1 \cdot 10^{-5}$;

   ab)
   1 und 7
   $P = \frac{\binom{20}{15}}{26\,334} \approx 58{,}9\,\%$;

   ac)
   3 bis 21
   $P = \frac{0}{26\,334} = 0$;

   ad)
   2 bis 8
   $P = \frac{\binom{15}{10}}{26\,334} \approx 11{,}4\,\%$;

   besetzt sind. (14 P)

b) Bestimme die Anzahl der unterschiedlichen Belegungen, wenn bei jedem Prüflung darauf geachtet wird, an welchem Tisch er sitzt. Berechne damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass (8 P)

$22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot \dots \cdot 7 \approx 9{,}37 \cdot 10^{18}$;

ba)

zwei bestimmte Prüflinge an Tischen mit Nummern größer als 15 sitzen.

$P = \frac{(7 \cdot 6) \cdot (20 \cdot 19 \cdot \dots \cdot 6)}{22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot \dots \cdot 7} \approx 9{,}1\,\%$;

bb)

zwei Prüflinge an Tischen mit aufeinanderfolgenden Nummern sitzen.

$P = 1$;

4. Vier verschiedene Haarwaschmittel a, b, c und d sollen in einem Testverfahren auf ihre Hautverträglichkeit hin untersucht werden. Dabei wird nur zwischen „hautverträglich“ und „nicht hautverträglich“ unterschieden. Die möglichen Ergebnisse sollen durch geeignete Viertupel beschrieben werden. (22 P)

a) Erläutere die Bedeutung der von die verwendeten Viertupel und gib den Ergebnisraum dieses Tests durch Auflisten der Ergebnisse an. Verwende dazu ein Baumdiagramm. (11 P)

b) Beschreibe die folgenden Sachverhalte durch jeweils ein Ereignis und berechne seine Wahrscheinlichkeit. (11 P)

- A: Nur das Haarwaschmittel a ist hautverträglich.
- B: Mindestens zwei Haarwaschmittel sind hautverträglich.
- C: Das Haarwaschmittel a ist hautverträglich.

5. Bestimme die Anzahl der Teiler von $13 \cdot 17^2 \cdot 19^2 \cdot 23$ unter Erläuterung deiner Überlegungen. 24.01.2006

- Nicht zerlegbare Teiler: 5
- Teiler aus zwei Primfaktoren: $\binom{4}{2} + 1 + 1 = 8$;
- Teiler aus drei Primfaktoren: $\binom{4}{3} + \binom{3}{1} + \binom{3}{1} = 10$;
- Teiler aus vier Primfaktoren: $\binom{4}{4} + \binom{3}{2} + \binom{3}{2} + 1 = 8$;

- Teiler aus fünf Primfaktoren: 4
- Teiler aus sechs Primfaktoren: 1

[Oder: $|\{0,1\} \times \{0,1,2\} \times \{0,1,2\} \times \{0,1\}| = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 = 36$;]

24.04.2006

5.3 3. Klausur am 5.4.2006

1. Bei der Einschulung wurden alle Schüler eines Jahrgangs einem Eignungstest unterzogen. Am Ende der Schulzeit bestehen $35\,\%$ dieser Schüler die Abschlussprüfung nicht. Davon hatten $85\,\%$ im Eignungstest ein schlechtes Ergebnis. Von den Schülern mit bestandener Abschlussprüfung hatten $2\,\%$ im Eignungstest schlecht abgeschnitten. (6 P)

   a) Stelle diesen Sachverhalt in einem Baumdiagramm dar und gib dabei für jeden Ast die zugehörige Wahrscheinlichkeit an. (2 P)

   A: Abschlussprüfung bestanden
   E: Eignungstest gut

```
          +---+---+
    0,65 /         \ 0,35
        /           \
       /             
      A               A̅
0,98 / \ 0,02  0,15  / \ 0,85
    /   \           /   \
   E     E̅         E     E̅
```

   b) Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Schüler mit schlechtem Ergebnis im Eignungstest die Abschlussprüfung nicht besteht. (4 P)

   $P_{\overline{E}}(\overline{A}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{E})}{P(\overline{E})} = \frac{P(\overline{A} \cap E)}{P(A)P_A(E) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(E)} \approx 95{,}8\,\%$;

2. Aus der Menge der ersten dreißig natürlichen Zahlen wird zufällig eine Zahl ausgewählt. Untersuche, ob die Geradzahligkeit der Zahl selbst stoachstisch unabhängig ist von der Geradzahligkeit ihrer Quersumme. (4 P)

```
     *     *     *     *
  1  2  3  4  5  6  7  8  9 10
     *     *     *     *

                             *
 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
 *     *     *     *     *  *
```

```
     *    *    *    *
21 22 23 24 25 26 27 28 29 30
     *    *    *    *
```

$|G| = 15$; $|QG| = 14$; $|G \cap QG| = 9$;
$P(G)P(QG) = \frac{15}{30}\frac{14}{30} = \frac{7}{30} \neq \frac{9}{30} = P(G \cap QG)$;
$\Rightarrow$ Grund für QG abhängig.

3. Gegeben sind die Ebene $E\colon x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0$ und die Geradenschar $g_a\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ a^2 \end{pmatrix} + k\vec{v_a}$ mit $\vec{v_a} = \begin{pmatrix} 1-a \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $a, k \in \mathbb{R}$. (6 P)

   a) S_a ist die Spitze des Repräsentanten von $\vec{v_a}$, der den Ursprung als Fußpunkt hat. Beschreibe in Worten die geometrische Bedeutung der Menge $M = \{S_a | a \in \mathbb{R}\}$ möglichst genau. (2 P)
   $\vec{v_a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $a \in \mathbb{R}$;
   M ist eine Gerade parallel zur x_1-Achse durch den Punkt $(1, 2, 3)$.

   b) Bestimme alle Werte für a, für die gilt: (4 P)
   $g_a \cap E\colon 2 + k\,(1 - a) - 3 + 2k + a^2 + 3k - 1 = 0$;
   $k\,(6 - a) = 2 - a^2$;

   (a) Fall: $6 - a \neq 0$;
   $k = \frac{2-a^2}{6-a}$, d.h. k ist eindeutig bestimmt.

   (b) Fall: $6 - a = 0$;
   $6 = a$;
   $k \cdot 0 \neq 2 - 36$;
   Es gibt keine Lösung für k.

   α)
   $|g_a \cap E| = 1$;
   $a \neq 6$;

   β)
   $g_a \cap E = \{\}$;
   $a = 6$;

   γ)
   $g_a \cap E = g_a$;
   Nicht möglich, d.h. es gibt keinen Fall für a.

4. Gegeben sind der Punkt $A(4, 2, 6)$, die Geraden

$g_1\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad k \in \mathbb{R};$

$g_2\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad l \in \mathbb{R};$

$g_3\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad m \in \mathbb{R};$ und die Ebene

$F\colon \vec{X} = u \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad u, v \in \mathbb{R};$ (24 P)

a) Zeige, dass sich g_1 und g_2 schneiden und berechne ihren Schnittpunkt. Untersuche g_1 und g_3 auf ihre gegenseitige Lage hin. (6 P)

g_1–g_3: Gleichungssystem nicht lösbar

b) Gib eine vektorielle Parameterdarstellung der Ebene E an, die parallel zur x_3-Achse ist und deren Schnittgerade mit der x_1–x_2-Ebene durch $x_1 - 2x_2 - 6 = 0$ beschrieben ist. (3 P)

$g_1 \cap g_2$: $S(0, 0, 0)$

$x_1 - 2x_2 - 6 = 0;$

$A(6, 0, 0); \quad B(0, -3, 0);$

$s\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \varrho \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \varrho \in \mathbb{R};$

$E\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \varrho \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \varrho, \sigma \in \mathbb{R};$

c) Zeige, dass F echt parallel zu E ist und g_1 und g_2 in der Ebene F liegen. (9 P)

$F \cap x_1$–x_2-Ebene: $\vec{X} = w \begin{pmatrix} -4+2 \\ -2+1 \\ 0 \end{pmatrix} = w \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad w \in \mathbb{R};$

$(0, 0, 0) \in F;$

g_1–F [ergibt Lösbarkeit, Abhängigkeit von einem Parameter]

d) Untersuche, ob es eine Gerade h gibt, die parallel zu E ist und die Geraden g_1, g_2 und g_3 schneidet. Gib gegebenfalls eine Gleichung für h an. (6 P)

$E \parallel F;$

$g_1, g_2 \in F;$

$g_1 \cap g_2 = \{(0, 0, 0)\};$

h existiert genau dann, wenn $g_3 \cap F \neq \varnothing;$

$g_3 \cap F = \{T\} = \{(4, 2, 6)\};$

$h = 0T;$

$h\colon \vec{X} = \mu' \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix};$

22.06.2006
04.07.2006
08.07.2006

5.4 4. Klausur am 21.6.2006

1. Untersuche, ob $V = \{\binom{a}{b} \,|\, a, b \in \mathbb{R}\}$ mit $\binom{a_1}{b_1} + \binom{a_2}{b_2} = \binom{a_1+a_2}{b_1+b_2}$ und $k \cdot \binom{a_1}{b_1} = \binom{k \cdot a_1}{b_1}$, $k \in \mathbb{R}$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ ist. (6 P)

   $\lambda \binom{a}{b} + \mu \binom{a}{b} = \binom{\lambda a}{b} + \binom{\mu a}{b} = \binom{\lambda a + \mu a}{2b} = \binom{(\lambda+\mu)a}{2b} \neq \binom{(\lambda+\mu)a}{b} = (\lambda + \mu) \binom{a}{b}$ für $b \neq 0$;

   $\rightarrow V$ ist kein Vektorraum über $\mathbb{R}$.

2. Untersuche, ob aus der linearen Unabhängigkeit von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ die lineare Unabhängigkeit von $\vec{v}$, $\vec{w}$ und $\vec{z}$ folgt, wenn gilt:

   $\vec{v} = \vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c}$ und
   $\vec{w} = 2\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$ und
   $\vec{z} = \vec{b} - \vec{c}$. (10 P)

   $k\vec{v} + l\vec{w} + m\vec{z} = k\left(\vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c}\right) + l\left(2\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}\right) + m\left(\vec{b} - \vec{c}\right) = \vec{a}\,(k + 2l) + \vec{b}\,(2k - l + m) + \vec{c}\,(3k + 2l - m) = \vec{0}$;

   $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ linear unabhängig, also:

   $k + 2l = 0; \quad 2k - l + m = 0; \quad 3k + 2l - m = 0;$

   $\Rightarrow k = l = m = 0$, d.h. $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{z}$ linear unabhängig.

3. Gegeben ist für $a \in \mathbb{R}_0^+$ die Funktionenschar f_a mit $\mathrm{f}_a(x) = 4 \cdot e^{-x}\left(a - e^{-x}\right)$, $x \in \mathbb{R}$. (20 P)

   a) Untersuche die Graphen der Scharfunktionen auf Achsenschnittpunkte, relative Hoch- und Tiefpunkte und Wendepunkte. Bestimme gegebenenfalls die Koordinaten dieser Punkte. (8 P)

   - Für $a = 0$: $\mathrm{f}_0(x) = -4e^{-2x}$;
     Schnittpunkt mit y-Achse: $(0, -4)$
     Kein Schnittpunkt mit x-Achse
     Keine Extrem- und Wendestellen
   - Für $a > 0$:
     $\mathrm{f}_a'(x) = 4e^{-x}\left(2e^{-x} - a\right)$;
     $\mathrm{f}_a''(x) = 4e^{-x}\left(a - 4e^{-x}\right)$;
     $\mathrm{f}_a'(x) = 0$ für $x = -ln\frac{a}{2} = \ln\frac{2}{a}$;
     $\mathrm{f}_a''\left(-\ln\frac{a}{2}\right) = -2a^2 > 0$;

Hochpunkt: $\left(-\ln\frac{a}{2}, a^2\right)$
Vorzeichenwechsel von $f_a''(x)$ bei $-ln\frac{a}{4}$, da $4e^{-x}$ stets größer 0 und $(a-4e^{-x})$ echt monoton wachsend.

b) Bestimme das Verhalten von $f_a(x)$ für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$. (2 P)

$\lim\limits_{x\to\infty} 4e^{-x}\left(a-e^{-x}\right) = 4\cdot 0\cdot(a-0) = 0;$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \underbrace{4e^{-x}}_{\to+\infty}\underbrace{\left(a-e^{-x}\right)}_{\to-\infty} = \lim\limits_{x\to-\infty} 4e^{-2x}\left(\frac{a}{e^{-x}}-1\right) = -\infty;$

c) Zeige, dass F_a mit $F_a(x) = 2\left(a-e^{-x}\right)^2$, $x \in \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f_a ist. (2 P)

d) Zeige, dass für $\alpha \in \mathbb{R}^+$ die Funktion $\tilde{F}_\alpha$ mit $\tilde{F}_\alpha(x) = 2\left(\alpha-e^{-x}\right)^2$, $x \in \left]-\ln\alpha, \infty\right[$ eine Umkehrfunktion hat, und gib Definitionsmenge und Funktionsterm der Umkehrfunktion an. (8 P)

$\tilde{F}'_\alpha(x) = f_\alpha(x)$ für $x \in \left]-\ln a, \infty\right[;$
$\tilde{F}'_\alpha(x)$ hat auf $\left]-\ln a, \infty\right[$ keine Nullstellen, d.h. $\tilde{F}_\alpha$ ist echt monoton auf $\left]-\ln a, \infty\right[$.
Also ist $\tilde{F}_\alpha$ injektiv.
$\tilde{F}_\alpha$ ist surjektiv, falls als Zielbereich $W_{\tilde{F}_\alpha}$ verwendet wird. (2 P)
$D_{\tilde{F}_\alpha^{-1}} = W_{\tilde{F}_\alpha} = \left[0, 2\alpha^2\right[;$ (da $\tilde{F}_\alpha$ stetig und echt monoton)
$\lim\limits_{x\to-\ln\alpha} \tilde{F}_\alpha(x) = 0; \quad \lim\limits_{x\to\infty} \tilde{F}_\alpha(x) = 2\alpha^2;$ (3 P)
$y = 2\left(\alpha-e^{-x}\right)^2 > 0; \quad x > -\ln\alpha;$
$\sqrt{y} = \sqrt{2\left(\alpha-e^{-x}\right)^2} = \sqrt{2}\left|\alpha-e^{-x}\right| = \sqrt{2}\left(\alpha-e^{-x}\right);$
...
$\tilde{F}_\alpha^{-1}(x) = -\ln\left(\alpha-\sqrt{\frac{x}{2}}\right);$

„Ich will gar nicht immer Recht haben... Unter dem Schicksal leide ich schon seit langem...“ 06.11.2006
07.11.2006

5.5 Formelsammlung zur 5. Klausur

5.5.1 Analytische Geometrie

Umrechnungen zwischen Parameter- und Koordinaten/Normalenform

- Umrechnung der Parameterform einer Ebene mit Aufpunkt A und Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ in die Normalenform:
  - $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}; \quad n_0 = -\vec{n}\vec{A};$
    $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AX} = n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_0 = 0;$
  - $\det\left(\overrightarrow{AX}, \vec{u}, \vec{v}\right) \stackrel{!}{=} 0$, da $\left\{\overrightarrow{AX}, \vec{u}, \vec{v}\right\}$ komplanar ist/sein muss.

- Umrechnung der Koordinatenform einer Ebene in die Parameterform:

  Definition: $x_2 := \lambda; \quad x_3 := \mu;$

  Koordinatenform nach x_1 auflösen $\rightarrow$ Term für x_1

  x_1, $x_2 = \lambda$ und $x_3 = \mu$ in $\vec{X} = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right)$ einsetzen und nach 1, λ und μ gruppieren.

Winkel

- Winkel $\angle(\vec{u}, \vec{v}) \in [0°, 180°]$ zwischen zwei Vektoren:

  $\cos\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u}\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|};$

- Winkel $\angle(g, h) \in [0°, 90°]$ zwischen zwei Geraden mit Richtungsvektoren $\vec{g}$ und $\vec{h}$:

  $\cos\angle(g, h) = \left|\frac{\vec{g}\vec{h}}{|\vec{g}||\vec{h}|}\right|;$

- Winkel $\angle(g, E) \in [0°, 90°]$ zwischen einer Geraden mit Richtungsvektor $\vec{g}$ und einer Ebene mit Normalenvektor $\vec{n}$:

  $\cos[90° - \angle(g, E)] = \sin\angle(g, E) = \left|\frac{\vec{g}\vec{n}}{|\vec{g}||\vec{n}|}\right|;$

- Winkel $\angle(E, F) \in [0°, 90°]$ zwischen zwei Ebenen mit Normalenvektoren $\vec{e}$ und $\vec{f}$:

  $\cos\angle(E, F) = \left|\frac{\vec{e}\vec{f}}{|\vec{e}||\vec{f}|}\right|;$

Abstände, Normalen

- Abstand $d(P, Q)$ von zwei Punkten:

  $d(P, Q) = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{\overrightarrow{PQ}^2};$

- Abstand $d(P, g)$ von einem Punkt zu einer Geraden mit Richtungsvektor $\vec{g}$ und Laufparameter λ:

  - Allgemeinen Abstand $d(P, X_g(\lambda))$ berechnen (in Abhängigkeit von λ), diesen dann ableiten, auf Null setzen und dann nach λ auflösen
    Kurz: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left|\overrightarrow{PX_g(\lambda)}\right|^2 \stackrel{!}{=} 0;$
  - $d(P, g) = d(P, F) = \left|\overrightarrow{PF}\right|$, wobei $\underbrace{\overrightarrow{PF}}_{\overrightarrow{PX(\lambda)}} \cdot \vec{g} = 0;$
  - Hilfsebene H (Normalenvektor $\vec{h}$) durch P senkrecht zu g legen:
    $\vec{h} := \vec{g}; \quad h_0 = -\vec{h}\vec{P};$
    Dann $\vec{X}_g$ in die Normalenform von H einsetzen, auflösen (eine Gleichung; Unbekannte ist λ)
    Dann weiter wie oben.

- Abstand $d(P, E)$ von einer Ebene mit Normalenvektor $\vec{n}$ zu einem Punkt:

  $d(P, E) = d(P, F)$ mit $E \cap n = \{F\}$ und $n\colon \vec{X} = \vec{P} + \lambda\vec{n};$

- Abstand $d(g, E)$ von einer Ebene zu einer parallelen Geraden:

  $d(g, E) = d(P, E)$, mit P als beliebigen festen Punkt von g

- Abstand $d(E, F)$ von zwei parallenen Ebenen:

  $d(E, F) = d(P, F)$, mit P als beliebigen festen Punkt von E

Projektion

- (Senkrechte) Projektion eines Vektors $\vec{a}$ auf einen Vektor $\vec{n}$:

  $\vec{n}_{\vec{a}} = \vec{n}^0 \cdot |\vec{a}| \cos\varphi;$

- (Senkrechte) Projektion eines Punkts auf eine Gerade:

  Die Projektion ist der Lotfußpunkt des Lots durch den Punkt auf die Gerade.

- (Senkrechte) Projektion eines Punkts P auf eine Ebene (Normalenvektor $\vec{e}$):

  Die Projektion ist der Lotfußpunkt des Lots durch den Punkt auf die Ebene.

  Besonders schneller Weg zur Normalengleichung:

  $n\colon \vec{X} = \vec{P} + \lambda\vec{e};$

- (Senkrechte) Projektion einer Geraden auf eine Ebene:

  Zwei beliebige feste Punkte der Geraden auf die Ebene projezieren und die Projektionspunkte dann verbinden. (Zweckmäßigerweise ist einer der Punkte der Schnittpunkt von Gerade und Ebene)

5.5.2 Stochastik

Definitionen

– Definitionen zur Zufallsgröße

- Zufallsgröße: $X\colon \Omega \to \mathbb{R};$
- Wahrscheinlichkeitsverteilung:

  $P_X\colon W_X \to [0,1]\,; \quad x \mapsto P(X=x);$

- Wahrscheinlichkeitsfunktion:

  $\tilde{P}_X\colon \mathbb{R} \to [0,1]\,;$

  x-Werte, die an denen P_X nicht definiert ist, werden auf 0 gesetzt.

- Kumulative Verteilungsfunktion:

  $F_X\colon \mathbb{R} \to [0,1]\,; \quad x \mapsto P(X \leq x);$

- Dichtefunktion

- Gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung: $P_{X,Y}\colon W_X \times W_Y \to [0,1]$;
- Unabhängigkeit zweier Zufallsgrößen X und $Y \Leftrightarrow$
  $P(X = x)P(Y = y) = P(X = x \cap Y = y)$ für alle $x \in W_X$ und für alle $y \in W_Y$;

– Definitionen zu Charakteristika von Zufallsgrößen

- Erwartungswert $E(X) = \mu \in \mathbb{R}$ einer Zufallsgröße:
  $E(X) = \sum\limits_{x \in W_X} xP(X = x) = \sum\limits_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\{\omega\})$;
- Varianz $\operatorname{Var}(X) = \sigma^2(X) = \sigma^2 \in \mathbb{R}$ einer Zufallsgröße:
  $\operatorname{Var}(X) = E\left[(X - E(X))^2\right] = \sum\limits_{x \in W_X} (x - E(x))^2\, P(X = x) = \sum\limits_{\omega \in \Omega} (X(\omega) - E(x))^2\, P(\{\omega\})$;
- Standardabweichung einer Zufallsgröße: $\sigma(X) = \sqrt{\operatorname{Var}(X)} \in \mathbb{R}_0^+$;

Rechenregeln

– Rechenregeln zum Erwartungswert

- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$;
- $E(aX + b) = aE(X) + b$;
- $E(XY) = E(X)E(Y)$, sofern X und Y unabhängig sind.

– Rechenregeln zur Varianz

- (Spezielle) Verschiebungsregel: $\operatorname{Var}(X) = E(X^2) - E^2(X)$;
- $\operatorname{Var}(X+Y) = \operatorname{Var}(X)+\operatorname{Var}(Y)$, sofern X und Y unabhängig sind.
- $\operatorname{Var}(aX + b) = a^2 \operatorname{Var}(X)$;

– Rechenregeln zu gemittelten Zufallsgrößen

- $E(\overline{X}) = E(X)$;
- $\mathrm{Var}(\overline{X}) = \mathrm{Var}(X)/n$;

07.11.2006
08.11.2006
10.11.2006

5.6 5. Klausur am 7.11.2006

1. Ein Torwart hält einen Elfmeter mit der Wahrscheinlichkeit $20\,\%$. Im Training schießt ein Spieler solange aus der Elfmeterposition, bis er zwei Tore erzielt hat, jedoch höchstens viermal. (13 P)

   a) Stelle die Trainingseinheit einschließlich der zugehörigen Wahrscheinlichkeiten in einem Baumdiagramm dar. (5 P)

   [11 Pfade]

   b) Berechne den Erwartungswert der erzielten Tore in einer Trainingseinheit. (8 P)

```
x | 0       | 1            | 2
--+---------+--------------+------------------------------
P | 0,2^4   | 4*0,8*0,2^3  | 0,8^2+2*0,8^2*0,2+3*0,8^2*0,2
```

   $E(X) = 1{,}9712$;

2. Lackierte Kunststoffteile, z.B. Gehäuse von Außenspiegeln für Fahrzeuge, werden vor der Auslieferung auf optische Mängel hin untersucht. Während seiner gesamten Arbeitszeit fällt ein Kontrolleur bei der Begutachtung eines Kunststoffteils mit $95\,\%$ Wahrscheinlichkeit eine richtige Entscheidung.

   Berechne den Erwartungswert und die Standardabweichung für die Anzahl der falschen Entscheidungen des Kontrolleurs, wenn er a) ein Teil (6 P) bzw. b) zweihundert Teile (6 P) überprüft. (12 P)

   a) X_1 = Anzahl der falschen Entscheidungen bei einem Teil;

```
x1 | 0      | 1
---+--------+----
P  | 95 %   | 5 %
```

   $E(X_1) = 0{,}05$;

   $\mathrm{Var}(X_1) = 0{,}05^2 \cdot 0{,}95 + 0{,}95^2 + 0{,}05 = 0{,}05 \cdot 0{,}95 = 0{,}0475$; $\quad \sigma(X_1) \approx 0{,}22$;

b) $X_i =$ Anzahl der falschen Entscheidungen beim i-ten Teil; $i = 1, 2, \ldots, 200$;
$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_{200}$;
$E(X) = 200 \cdot 0{,}05 = 10$;
$\text{Var}(X) = \text{Var}(X_1+X_2+\cdots+X_{200}) = 200\,\text{Var}(X_1) = 9{,}5$; $\sigma(X) \approx 3{,}08$;

3. Gegeben sind die Punkte $A(8,0,0)$, $B(8,3,0)$, $C_t(4t+5,3,-3t)$ und $D(0,0,6)$. Dabei ist t eine reelle Zahl. (19 P)

a) Bestimme alle Werte von t, für die das Dreieck ABC_t rechtwinklig und gleichschenklig ist. (6 P)

b) Berechne den Abstand des Punktes D von der Geraden AC_0 und den Flächeninhalt des Dreiecks AC_0D. (6 P)

c) Das Volumen der Pyramide $ADBC_t$ ist unabhängig von t (Nachweis nicht verlangt). Gib eine geometrische Deutung dafür an und beweise deine Aussage. (7 P)

4. D, E und F bezeichnen die Mitten der Seiten eines Dreiecks ABC. Gegen den Uhrzeigersinn werden die genannten Punkte in der Abfolge $ADBECF$ durchlaufen. S ist ein Punkt der Ebene, in der das Dreieck liegt. Wir betrachten folgende Aussage:
Aus $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{SD} = 0$ und $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{SF} = 0$ folgt: $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{SE} = 0$. (13 P)

a) Fertige eine Skizze an, die die Aussagen widerspiegelt, und formulieren den Satz der Dreieckslehre, den die Aussage ausdrückt. (6 P)

b) Beweise die Aussage. (2 P)

$$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{SE} = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{SD} + \underbrace{\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}}_{\overrightarrow{DB}} + \underbrace{\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}}_{\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}}\right) = \underbrace{\overrightarrow{BA}\overrightarrow{SD}}_{0} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}\overrightarrow{AC} +$$
$$\overrightarrow{AC}\overrightarrow{SD} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}^2 = \overrightarrow{AC}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{SD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)}_{\overrightarrow{SF}} = 0;$$

„dann passiert das, wovor ich gewarnt hab´, dass man sich freut. . . “ 18.12.2006
22.01.2007

5.7 6. Klausur am 18.12.2006

1. Gegeben ist die Ebene $E\colon 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 1 = 0$. (12 P)

   a) Erläutere die geometrische Bedeutung der beiden HESSE-normierungen und gib den HESSEterm an. (3 P)

   b) Begründe für einen Punkt im positiven Halbraum von E bezüglich des HESSEvektors mittels einer Skizze die Bedeutung des Werts des HESSEterms für diesen Punkt. (3 P)

   c) Untersuche, welche der Punkte $A(1,1,1)$, $B(-1,3,5)$, $C(-2,3,-5)$ im selben Halbraum bezüglich E liegen, und berechne den Abstand von C zu E. (3 P)

   d) Durch Spiegelung von E am Punkt $P(1,2,3)$ entsteht die Ebene E'. Bestimme eine Gleichung von E'. (3 P)

2. Ein Zylinder mit unbegrenzt langer Achse a und Radius $\sqrt{2}$ liegt im 1. und 4. Oktanten so zwischen den Ebenen $E\colon x_1 - x_3 = 0$ und $F\colon x_1 = 0$ eingekeilt, dass er E in der Geraden e und F in der Geraden f berührt. (10 P)

   a) Fertige eine aussagekräftige Skizze an, die den Schnitt der x_1–x_3-Ebene mit dem Zylinder und den Ebenen E und F darstellt. (4 P)

   b) Bestimme eine Gleichung für die Achse a. Verwende dazu möglichst wenig elementargeometrische Rechentechniken, sondern setze die Techniken der Vektorgeometrie ein. (6 P)

3. Bestimme eine Stammfunktion von f. Verwende dazu die partielle Integration oder die Substitutionsmethode. (10 P)

   a) $f(x) = \sin x \cdot \cos x; \quad x \in \mathbb{R}$; (3 P)

   b) $f(x) = \frac{x \ln\left(x^2+1\right)}{\sqrt{x^2+1}}; \quad x \geq 0$; (7 P)

4. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$, $x \in \mathbb{R}_0^+$. (12 P)

   a) Untersuche das Monotonieverhalten von f sowie das Verhalten von f für $x \to \infty$. Skizziere den Graphen von f. (6 P)

b) Zeige mittels der Substitutionsmethode, dass F mit $F(x) = -\left(e^x + 1\right)^{-1}$, $x \in \mathbb{R}_0^+$ eine Stammfunktion von f ist. (3 P)

c) Die Gerade $x = t \geq 0$, die x-Achse und der Graph von f begrenzen eine unendlich ausgedehnte Fläche.
Berechne den Inhalt dieser Fläche. (3 P)

09.02.2006

6 Facharbeit

6.1 Überlegungen zum Thema

- Einführung in den axiomatischen Aufbau der natürlichen, ganzen, rationalen, reellen und surrealen Zahlen
- Gründe für die Einführung der verschiedenen Zahlen; praktische Anwendungsgebiete (bzw. Hervorhebung und Begründung der „Praxislosigkeit“)
- Beweis der Gültigkeit der Gruppen-/Körperaxiome der genannten Zahlenmengen/-klassen (evtl. mit Auslassungen, insbesondere bei den surrealen Zahlen; Ziel soll nicht stures Abschreiben aus anderen Büchern sein)
- Einbettung von $\mathbb{N}/\mathbb{Z}/\mathbb{Q}/\mathbb{R}$ in $\mathbb{Z}/\mathbb{Q}/\mathbb{R}$/die surrealen Zahlen
- Abzählbarkeit/Überabzählbarkeit
- Permanenter Blick aufs Zählen; Definition der Verknüpfungen $+, -, \cdot, :$
- Unterstreichung der Eleganz des Aufbaus der surrealen Zahlen und Vergleich mit dem der reellen Zahlen
- Untersuchung der Praxisnähe der surrealen Zahlen; Einführung von Kurzschreibweisen etc.
- Konzepte der surrealen Zahlen im normalen Unterricht/Lehrstoff; Anwendungen (z.B. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ vs. $\frac{1}{\omega} = \varepsilon$)
- Eingehen auf die Thematik der „Erschaffung“ der natürlichen Zahlen „aus dem Nichts“ (Formulierung nach Keith Devlin)

27.08.2006

6.2 Stichpunkte

6.2.1 Ziel der Facharbeit

- Systematischer Aufbau der verschiedenen konventionellen Zahlbereiche ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$)
- Ideen hinter dem Aufbau
- Alternativer Ansatz durch die surrealen Zahlen

6.2.2 Zahlbegriff

- Abstraktion
- Gemeinsamkeiten zwischen Mengen:
  Drei Autos, drei Äpfel, etc. $\rightarrow 3$
- Zählen

6.2.3 Natürliche Zahlen

- Mehrere äquivalente ($\rightarrow$ isomorphe) Möglichkeiten, damit freie Wahl der Realisierung (zwecks Praktikabilität (Computer), einfacheren Denkens etc.)
- Beim Aufbau der natürlichen Zahlen können wir nur wenig voraussetzen. Beispielsweise wäre „$\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} | n > 0\}$“ unpraktisch, weil wir in dieser Definition bereits $\mathbb{Z}$ verwenden.

[Problematik $\mathbb{N} \in \mathbb{Z}$]

Natürliche Zahlen nach Peano

[Eigentl. Peano-Dedekindsche Axiome, siehe »http://de.wikipedia.org/wiki/Nat%C3%

- Es gibt eine kleinste natürliche Zahl. Diese bezeichnen wir beispielsweise mit 0.

- Es gibt eine Nachfolgerfunktion S (engl. Successor), die einer natürlichen Zahl ihren (eindeutigen) Nachfolger („$+1$") zuordnet. Jede natürliche Zahl hat einen Nachfolger.

  S würde man als streng monoton steigend bezeichnen. Problematisch bei dieser Kategorisierung ist, dass – wenn man die Zahlen selbst erst definiert – das mächtige Werkzeug der Kurvendiskussion etc. noch nicht zur Verfügung hat.

  Man kann aber die Bedingung umformulieren: Haben zwei Zahlen den gleichen Nachfolger, so sind die zwei Zahlen gleich. In Formeln: $S(m) = S(n) \Leftrightarrow m = n$

- Die Menge der natürlichen Zahlen ist dann:

  $\mathbb{N} = \{0, S(0), S(S(0)), S(S(S(0))), \ldots\}$

- Der Einfachheit halber definiert man Namen für die Zahlen, die durch wiederholte Anwendung der Nachfolgerfunktion entstehen: $1 := S(0)$, $2 := S(1)$, etc.

- Bisher haben wir jetzt also die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ und S, wir können also Zählen.

– Addition

Jetzt können wir Addition definieren. Da wir als einzige Operation bisher nur das Zählen kennen, müssen wir Addition irgendwie aufs Zählen zurückführen.

- Addiert man zu einer beliebigen natürlichen Zahl 0, so ist das Ergebnis die gleiche natürliche Zahl: $n + 0 := n$

- Addiert man zu einer natürlichen Zahl n den Nachfolger einer natürlichen Zahl m, so ist das Ergebnis der Nachfolger der Summe von n und m: $m + S(n) := S(m + n)$

Diese Definition ist rekursiv, d.h. sie führt auf sich selbst zurück. Beispiel:

$2+3 = 2+S(2) = S(2+2) = S(2+S(1)) = S(S(2+1)) = S(S(2+S(0))) = S(S(S(2+0))) = S(S(S(2))) = 5$

Abschnittsweise definiert:

$$m + n := \begin{cases} m & \text{falls } n = 0 \\ S(m + n_{-1}) & \text{sonst, mit } n = S(n_{-1}) \end{cases}$$

Der Term, der nicht auf die Addition zurückgreift – der für $n = 0$ –, nennt man auch Rekursionsanfang (oder engl. base case), den anderen Ast Rekursionsschritt.

Die Idee hinter dieser Definition ist, dass das Zählen – das Inkrementieren – „herausgezogen“ wird: Um beispielsweise zu 2 3 dazuzuzählen, zählt man zuerst von der 0 beginnend zur 2, also zur $S(S(0))$. Dann zählt man noch dreimal weiter: $S(S(S(2))) = S(S(S(S(S(0))))) = 5$.

– Subtraktion

Subtraktion kann man ebenfalls rekursiv definieren.

- Als Fall, der die Rekursion „bricht“, nutzt man die Subtraktion von 0: $m - 0 := m$
- Die Differenz des Nachfolgers einer Zahl m und des Nachfolgers einer Zahl n ist die Differenz von m und n: $S(m) - S(n) := m - n$
- Für alle anderen Fälle ist die Subtraktion nicht definiert.

Geschrieben als abschnittsweise Definition:

$$m - n := \begin{cases} m & \text{falls } n = 0 \\ m_{-1} - n_{-1} & \text{sonst, mit } m = S(m_{-1}) \text{ und } n = S(n_{-1}) \\ \text{undefiniert} & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Idee hinter dem Rekursionsschritt ist, dass Differenz „relativ“ ist:

$$5 - 3 = S(4) - S(2) = 4 - 2 = S(3) - S(1) = 3 - 1 = S(2) - S(0) = 2 - 0 = 2$$

– Multiplikation

Multiplikation kann ebenfalls rekursiv definiert werden.

Als Rekursionsanfang dient die Multiplikation mit 0:

$$n \cdot 0 := 0$$

Der Rekursionsschritt kann man so herleiten, wie auch Multiplikation in der Grundschule [hier Referenz anführen] beigebracht wird:

$n \cdot m = \underbrace{n + n + \cdots + n + n}_{m \text{ Mal}}$

Oder, rekursiv formuliert:

$n \cdot S(m) = \underbrace{n + n + \cdots + n + n}_{S(m) \text{ Mal}} = \underbrace{n + n + \cdots + n + n}_{m \text{ Mal}} + n$

Also:

$$n \cdot m := \begin{cases} 0 & \text{falls } m = 0 \\ n + n \cdot m_{-1} & \text{sonst, mit } m = S(m_{-1}) \end{cases}$$

– Division

Die letzte noch fehlende Grundrechenart [Thematik „**Grund**rechenart“ eingehen?] ist die Division.

Als Rekursionsanfang nutzen wir:

$0 : n = 0$, falls $n \neq 0$.

Den Rekursionsschritt können wir wie folgt herleiten:

$\frac{m}{n} = \frac{m+(n-n)}{n} = \frac{(m-n)+n}{n} = \frac{m-n}{n} + 1$

Also:

$$m : n := \begin{cases} \text{undefiniert} & \text{falls } n = 0 \\ 0 & \text{falls } m = 0 \text{ und } n \neq 0 \\ (m-n) : n + 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

[„Korrektheit“ der Definitionen; Herleitung der Definitionen nur als Stütze; kein Weg, Definitionen herzuleiten, da Definitionen Definitionen sind]

[Überprüfung der Definitionen, dass bspw. nirgendwo $0 = S(n)$ steht etc.]

– Vergleichsoperatoren

Noch nicht definiert haben wir die Vergleichsoperatoren. [Nur $=$ und $\neq$; dazu genauer eingehen, dass wir das nicht definieren müssen (Stichwort structural equality)]

Anstatt zu jedem der vier noch fehlenden Vergleichsoperatoren $\leq$, $<$, $>$, $\geq$ zu versuchen, eine Definition zu finden, überlegen wir zuerst, ob man nicht einige Vergleichsoperatoren durch andere ausdrücken kann.

Das geht in der Tat. Üblicherweise nimmt man $\leq$ als Basis und leitet die anderen davon ab. [Referenz und Fußnote, dass man das auch bei den surrealen Zahlen so macht]

$n > m \Leftrightarrow n \nleq m$

$n \geq m \Leftrightarrow n > m$ oder $n = m$

$n < m \Leftrightarrow n \leq m$ und $n \neq m$

Wir müssen also nur $\leq$ definieren. Dabei nutzen wir die Eigenschaften der Nachfolgerfunktion aus und nutzen wieder Rekursion. Wir definieren:

$n \leq n$

$n \nleq 0$, falls $n \neq 0$

$n \leq m \Leftrightarrow n \leq m_{-1}$ mit $m = S(m_{-1})$

Beispiel:

$2 \leq 5 = S(4) \Leftrightarrow 2 \leq 4 = S(3) \Leftrightarrow 2 \leq 3 = S(2) \Leftrightarrow 2 \leq 2 \Leftrightarrow$ wahr

– Natur des Anfangselements 0 und der Nachfolgerfunktion S

In den Definitionen der Grundrechenarten oben haben wir nirgends Anforderungen an die Struktur von 0 und S gestellt. Das lässt verschiedene Realisationen zu.

Wir kennen das bereits vom abstrakten Vektorraum: Ein Vektor kann ein Tripel reeller Zahlen sein, oder im entarteten, ein-dimensionalen Vektorraum, eine reelle Zahl selbst etc.

Eine Realisation wäre beispielsweise:

$0 := \varnothing$; 0 ist die leere Menge.

$S(M) := M \cup \{x\}$ mit einem eindeutig festgelegten $x \notin M$; zum Zählen fügt man ein Element der Menge hinzu.

Beispiel:

$0 = \varnothing$

$1 = S(0) = \{\text{Apfel}\}$

$2 = S(1) = \{\text{Apfel}, \text{Birne}\}$

$3 = S(1) = \{\text{Apfel}, \text{Birne}, \ldots\}$

Nimmt man für x in der Definition von $S(M)$ M, erhält man:

$0 := \varnothing$

$1 = 0 \cup \{0\} = \{0\}$

$2 = 1 \cup \{1\} = \{0, 1\}$

$3 = 2 \cup \{2\} = \{0, 1, 2\}$

Also:

$S(M) := M \cup \{M\}$

In dieser Realisation kann $\leq$ auf $\in$ zurückgeführt werden: $n \leq m \Leftrightarrow n \in m$ [Referenz]

Anderes Beispiel:

$0 :=$ Nichts tun

$1 =$ Klopfen

$2 =$ Klopfen, dann erneut Klopfen

Also:

$S(n) := n$ dann Klopfen

All diese Definitionen sind äquivalent, in dem Sinne, als dass zwischen jeder Menge der natürlichen Zahlen, die jeweils gebildet wird, zu jeder anderen ein Isomorphismus besteht.

Beispiel:

Nichts tun $\mapsto \varnothing$

Klopfen $\mapsto \{\varnothing\}$

Klopfen, dann Klopfen $\mapsto \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

etc.

[Notation n_{-1}; Erklärung, dass man „von rechts nach links“ lesen muss] 04.11.2006

6.2.4 Ganze Zahlen

- Verschiedene Ansätze zur Definition der ganzen Zahlen und der Operationen auf den ganzen Zahlen denkbar.

Ganze Zahlen als Verknüpfung der positiven Zahlen mit zwei Symbolen

$\mathbb{Q} := \mathbb{N}^+ \times \{+, -\} \cup \{0\}$

- Dahinter steckt die Idee, dass man die ganzen Zahlen als Verknüpfung der natürlichen Zahlen mit zwei Symbolen ansieht. Zahlen mit dem Symbol $+$ interpretiert man als positiv, Zahlen mit dem Symbol $-$ als negativ.

- Diese Idee mag einem zuerst in den Sinn kommen, hat jedoch einige Probleme, wenn es darum geht, die Verknüpfungen auf den ganzen Zahlen zu definieren:

  Es sind viele Fallunterscheidungen notwendig. [Hier Beispiele anführen? Verweis auf Anhang?]

  [Verwendung der bereits definierten Verknüpfungen der natürlichen Zahlen]

Ganze Zahlen als Paare natürlicher Zahlen

$\mathbb{Q} = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$

- Hinter dieser Definition steckt die Idee, dass man eine ganze Zahl als Differenz zweier natürlicher Zahlen sieht.

  Beispiel: $5 = 8 - 3, \ -3 = 0 - 3 = 1 - 4 = 2 - 5 = \cdots$

- Diese Definition lässt sehr elegante Definitionen der Verknüpfungen zu. Dabei werden die Verknüpfungen über die natürlichen Zahlen benutzt.

  [Doppeldeutigkeiten! Bedeutet $+$ die Addition auf den natürlichen oder den ganzen Zahlen? Unterscheidung durch Indizes, beispielsweise $+_{\mathbb{N}_0}$ oder $+_{\mathbb{Z}}$]

- Eine ganze Zahl hat in dieser Definition keine eindeutige Darstellung (siehe obiges Beispiel; $5 = 8 - 3 = 9 - 4 = 10 - 5 = \cdots$). Warum das ein Problem ist und wie man es lösen kann steht weiter unten.

– Addition

Zur Herleitung der Additionsvorschrift betrachten wir zwei ganze Zahlen, (a, b) und (α, β). Im Herleitungsprozess benutzen wir unser Wissen über äquivalente Termumformungen. [Hier auch wieder die Thematik mit der Korrektheit der Definitionen etc. anbringen. Auch nutzen wir in der Herleitung Verknüpfungen, die wir gar nicht vollständig definiert haben!]

$(a, b) + (\alpha, \beta) = (a - b) + (\alpha - \beta) = a - b + \alpha - \beta = a + \alpha - b - \beta = (a + \alpha) - (b + \beta) = (a + \alpha, b + \beta)$

Kurz: $(a, b) + (\alpha, \beta) := (a + \alpha, b + \beta)$

Diese Definition kommt ohne Fallunterscheidungen aus!

Beispiel: $\underbrace{(2, 3)}_{-1} + \underbrace{(9, 14)}_{-5} = (2 + 9, 3 + 14) = \underbrace{(11, 17)}_{-6}$

– Subtraktion

Es gibt zwei Möglichkeiten, die Subtraktion zu definieren: Einmal wie in der 7. Klasse über die Negation und einmal wie bei der Addition.

- **Definition über die Negation**

  Dazu müssen wir zunächst die Negation definieren. Dies gestaltet sich einfach:

  $-(a, b) = -(a - b) = -a - (-b) = -a + b = b - a = (b, a)$

  Kurz: $-(a, b) := (b, a)$

  Jetzt können wir die Subtraktion definieren:

  $(a, b) - (\alpha, \beta) := (a, b) + [-(\alpha, \beta)] = (a, b) + (\beta, \alpha) = (a + \beta, b + \alpha)$

- **Definition über Herleitung wie bei der Addition**

  $(a, b) - (\alpha, \beta) = (a - b) - (\alpha - \beta) = a - b - \alpha + \beta = a + \beta - b - \alpha = (a + \beta) - (b + \alpha) = (a + \beta, b + \alpha)$

Es spielt also keine Rolle, welchen Weg man zur Herleitung hernimmt. [Bedeutung als nachträgliche Rechtfertigung, unser Wissen über Minusklammern, Kommutativität etc. auszunutzen]

Beispiel: $\underbrace{(2, 3)}_{-1} - \underbrace{(9, 14)}_{-5} = (2 + 14, 3 + 9) = \underbrace{(16, 12)}_{4}$

[Bemerkung, dass diese Definitionen nicht rekursiv sind, und dass das gut ist, wegen der Zeitkomplexität etc.]

– Multiplikation

$(a, b) \cdot (\alpha, \beta) = (a - b) \cdot (\alpha - \beta) = a\alpha - a\beta - b\alpha + b\beta = (a\alpha + b\beta) - (a\beta + b\alpha) = (a\alpha + b\beta, a\beta + b\alpha)$

Beispiel: $\underbrace{(2, 3)}_{-1} \cdot \underbrace{(9, 14)}_{-5} = (2 \cdot 9 + 3 \cdot 14, 2 \cdot 14 + 3 \cdot 9) = \underbrace{(60, 55)}_{5}$

[Bemerkung, dass es nicht schlimm ist, dass die Zahlen größer werden; Bemerkung, dass, wenn es einen doch stört, man „kürzen" kann; Verweis auf Normalisierung weiter unten]

– Division

Die Division kann leider nicht so einfach hergeleitet werden.

- Der Weg über die Herleitung wie bei Addition und Multiplikation schlägt fehlt:

  $\frac{(a,b)}{(\alpha,\beta)} = \frac{a-b}{\alpha-\beta} = ?$

- Der alternative Weg, Division als Multiplikation mit dem Kehrbruch zu definieren, schlägt ebenfalls fehl, da es nicht möglich ist, den Kehrbruch einer ganzen Zahl zu definieren:

  $\frac{1}{z}$ ist, außer für $z = \pm 1$ und $z = 0$, keine ganze Zahl!

- Wir müssen daher die Division ein bisschen umständlich definieren:

  $\frac{x}{y} = \frac{|x|}{|y|} \cdot \operatorname{sgn} x \cdot \operatorname{sgn} y$

  wobei wir mit $\frac{|x|}{|y|}$ folgendes meinen:

  $\frac{|x|}{|y|} = \left(\frac{|x|}{|y|}, 0\right)$, wobei mit der Division auf der rechten Seite die bereits definierte Division über die natürlichen Zahlen gemeint ist. [XXX formal nicht so einfach, die $|x|$ und $|y|$ ganze Zahlen, nicht natürliche Zahlen sind. Aber einfacher Isomorphismus zwischen den nichtnegativen natürlichen Zahlen und den nichtnegativen ganzen Zahlen. Ähnlich wie $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. Kasten?]

- Es fehlen noch die Definitionen der Betragsfunktion $|\cdot|$ und der Signumfunktion sgn.

  Die Betragsfunktion können wir auf die Signumfunktion zurückführen: $|x| := x \cdot \operatorname{sgn} x$

  $$\operatorname{sgn}(a,b) := \begin{cases} -1 & \text{für } a < b \\ 0 & \text{für } a = b \\ 1 & \text{für } a > b \end{cases}$$

  (Diese Definition bedient sich der Vergleichsoperatoren über die natürlichen Zahlen.)

– Vergleichsoperatoren

- **Gleichheit und Ungleichheit**

  Anders als bei den natürlichen Zahlen sind bei unserer Definition der ganzen Zahlen die Definitionen der Gleichheit und Ungleichheit nicht sofort offensichtlich.

  Herleitung:

  $(a, b) = a - b = \alpha - \beta = (\alpha, \beta)$

  Herüberbringen von b und β ermöglicht es, die Gleichheit auf den ganzen Zahlen auf die Gleichheit auf den natürlichen Zahlen zurückzuführen:

  $a + \beta = \alpha + b$

  Kurz: $(a, b) = (\alpha, \beta) \Leftrightarrow a + \beta = \alpha + b$

- **Kleinergleich**

  Wie bei den natürlichen Zahlen wollen wir auch bei den ganzen Zahlen nicht jede der fehlenden Vergleichsoperatoren ($<$, $\leq$, $\geq$, $>$) einzeln definieren, sondern nur $\leq$ erklären. Die anderen Vergleichsoperatoren ergeben sich dann daraus.

  Zur Herleitung erfolgt analog zur Definition der Gleichheit:

  $(a, b) = a - b \leq \alpha - \beta = (\alpha, \beta)$

  Herüberbringen von b und β...

  $a + \beta \leq \alpha + b$

  Kurz: $(a, b) \leq (\alpha, \beta) \Leftrightarrow a + \beta \leq \alpha + b$

– Eindeutigkeit der Repräsentation

Das Problem wurde schon kurz zu Beginn des Kapitels und bei der Definition der Gleichheit angerissen: Bei unser Definition der ganzen Zahlen ist die Repräsentation einer Zahl nicht eindeutig.

Das erklärt auch, wieso wir die Gleichheitsrelation definieren mussten.

[XXX noch mehr darauf eingehen, wieso das ein Problem ist]

Es gibt nun zwei klassische Wege, das Problem zu lösen.

- **Normalisierung**

  Beim Weg über die Normalisierung definiert man eine Normalisierungsfunktion, die einer beliebigen Repräsentation einer ganzen Zahl eine eindeutige Repräsentation zuweist.

  Eine Normalisierungsfunktion könnte beispielsweise sein:

  $n\colon (a,b) \mapsto n(a,b) := \begin{cases} (a-b,0) & \text{für } a \geq b \\ (0,b-a) & \text{für } a < b \end{cases}$

  Danach definiert man die Menge der ganzen Zahlen und die Verknüpfungen neu:

  $\mathbb{Z}' := \{n(x) \,|\, x \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{Z}$

  $x +_{\mathbb{Z}'} y := n(x +_{\mathbb{Z}} y)$

  $x -_{\mathbb{Z}'} y := n(x -_{\mathbb{Z}} y)$

  $x \cdot_{\mathbb{Z}'} y := n(x \cdot_{\mathbb{Z}} y)$

  etc.

  Nachteil an dieser Methode kann sein, dass sie dem persönlichen Geschmack nicht entspricht: Es sieht so aus, als ob die ursprünglichen Definitionen bzw. die Ideen hinter den Definitionen unzureichend sind und eine nachträgliche Anpassung benötigen.

- **Äquivalenzklassen**

  Ein alternativer Weg geht über Äquivalenzklassen. Die Idee ist, eine Zahl als die Menge aller Repräsentationen zu definieren, die äquivalent (=) zur Zahl sind. Man schreibt $[x]$, wenn man die Äquivalenzklasse meint.

  In Formeln: $[x] = \{r \in \mathbb{Z} \,|\, r = x\}$

Beispiel: $[(3,0)] = \{(3,0),(4,1),(5,2),\ldots\}$

Diese Mengen sind unendlich groß; das ist aber kein Problem, da man zum Rechnen nur ein einziges Element benötigt.

Die Menge der ganzen Zahlen definiert man dann auf:

$\mathbb{Z}' := \{[x] \,|\, x \in \mathbb{Z}\}$

Auch muss man die Verknüpfungen anpassen:

$[x] +_{\mathbb{Z}'} [y] := [x +_{\mathbb{Z}} y]$ etc.

Der Einfachheit wegen kann man zusätzlich noch die Zahlensymbole neu definieren:

$0_{\mathbb{Z}'} := [0_{\mathbb{Z}}]$

$1_{\mathbb{Z}'} := [1_{\mathbb{Z}}]$ etc.

[Äquivalenzklassen auch bei den Brüchen und surreallen Zahlen]

[Äquivalenzklassen auch im Alltag; beispielsweise die Zahl 3 als Menge aller Mengen mit drei Elementen]

6.2.5 Rationale Zahlen

Zur Definition der rationalen Zahlen werden wir ähnlich verfahren wie bei der Definition der ganzen Zahlen als Paare zweier natürlicher Zahlen.

Dieser Ansatz ist bei den rationalen Zahlen über die Repräsentation über die Bruchschreibweise offensichtlich.

Also: $\mathbb{Q} := \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$

Beispiel: $-2{,}5 = \frac{-5}{2} = (-5,2) = ((0,5),(2,0))$

Anders als bei der Definition der ganzen Zahlen müssen wir hier eine Einschränkung treffen – Null darf nicht im Nenner stehen.

Die Repräsentation ist wie bei den ganzen Zahlen nicht eindeutig: In $\mathbb{Q}$ kommen ungekürzte Brüche vor und negative gekürzte Brüche haben jeweils zwei Repräsentationen, $(-a,b)$ und $(a,-b)$. Zur Lösung werden wir Äquivalenzklassen einsetzen.

Die Definition der Rechenoperatoren übernehmen wir von der Einführung in der 6. Klasse.

Addition

Herleitung über Bildung des Hauptnenners:

$(a, b) + (\alpha, \beta) = \frac{a}{b} + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{a\beta}{b\beta} + \frac{\alpha b}{b\beta} = \frac{a\beta + \alpha b}{b\beta} = (a\beta + \alpha b, b\beta)$

Die Addition über den rationalen Zahlen führen wir also auf die Addition über den ganzen Zahlen zurück, die ihrerseits auf die Addition über den natürlichen Zahlen zurückführt. [Bemerkung irgendwo, dass es keine Rolle spielt, welche Repräsentation der natürlichen Zahlen zugrundeliegt.]

Subtraktion

Herleitung über Negation:

$(a, b) - (\alpha, \beta) = (a, b) + [-(\alpha, \beta)] = (a, b) + (-\alpha, \beta) = (a\beta - \alpha b, b\beta)$

Alternativ:

$(a, b) - (\alpha, \beta) = (a, b) + [-(\alpha, \beta)] = (a, b) + (\alpha, -\beta) = (-a\beta + \alpha b, -b\beta)$

Die beiden Definitionen sind äquivalent, was Ausklammern von (-1) im Zähler und Kürzen mit (-1) bestätigt.

Multiplikation

$(a, b) \cdot (\alpha, \beta) = \frac{a}{b}\frac{\alpha}{\beta} = \frac{a\alpha}{b\beta} = (a\alpha, b\beta)$

Es zeigt sich eine beeindruckende Symmetrie zur Definition der Addition bei den ganzen Zahlen: Vertauscht man $\cdot$ durch $+$, erhält man die Definition der Addition über die ganzen Zahlen! [XXX wieso?]

Division

Herleitung über das Inverse:

$$\frac{1}{(a, b)} = \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a} = (b, a)$$

$(a, b) : (\alpha, \beta) = (a, b) \cdot (\beta, \alpha) = (a\beta, b\alpha)$

[XXX wieder beeindruckende Symmetrie]

Vergleichsoperatoren

– Gleichheit

$(a, b) = \frac{a}{b} = \frac{\alpha}{\beta} = (\alpha, \beta)$

Herüberbringen von b und β bringt:

$a\beta = \alpha b$

Kurz: $(a, b) = (\alpha, \beta) \Leftrightarrow a\beta = b\alpha$

– Kleinergleich

$(a, b) = \frac{a}{b} < \frac{\alpha}{\beta} = (\alpha, \beta) \Leftrightarrow$

$a\beta < b\alpha$, falls $b\beta > 0$

$a\beta > b\alpha$, falls $b\beta < 0$

(Der Fall $b\beta = 0$ kann nicht auftreten, da $b, \beta \neq 0$.) 27.08.2006

6.3 Stichpunkte

6.3.1 Einleitung

Im Schulunterricht wird üblicherweise nicht darüber gesprochen, **was** Zahlen eigentlich sind. Oft werden die Zahlen mit ihren Dezimalrepräsentationen identifiziert, wodurch die originellen Ideen, die hinter der Formalisierung der verschiedenen Zahlenmengen stecken, untergehen.

An ihrer Stelle lehrt man algorithmisches Denken: Wie multipliziert man zwei ganze Zahlen schriftlich? Wie addiert man zwei Brüche?

Fragen seitens der Schüler kommen, wenn überhaupt, erst bei der Einführung der irrationalen Zahlen – „was **ist** $\sqrt{2}$?“. Dass sie genausowenig wissen, was schon lange bekannte Zahlen **sind** – „was **ist** 2?“ –, ist vielen von ihnen nicht mehr bewusst.

Ich habe dieses Facharbeitsthema deswegen gewählt, weil ich die zugrundeliegenden Ideen aufdecken wollte; die Art und Weise, wie bekannte mathematische Konzepte formalisiert werden und so Informationen sehr dicht „gepackt“ werden können, fasziniert mich sehr.

Diese Arbeit ist in fünf Abschnitte gegliedert. Im ersten Abschnitt stelle ich die natürlichen Zahlen vor. Dazu gehören Definitionen der

Zahlen, Rechenregeln und Relationen, wobei ich besonders auf die Ideen, die hinter den Definitionen stecken, eingehen werden. Dabei wird sich herausstellen, dass kleine Kinder noch viel näher an der mathematischen Formalisierung liegen als der Schulunterricht.

Im zweiten Abschnitt werden die ganzen Zahlen behandelt. Dabei werde ich zwei Formalisierungsansätze vorstellen und ihre Vor- und Nachteile abwägen. Einen Ansatz werde ich genauer ausführen und auf ihm auch die Operatoren und Relationen definieren.

Eine Realisierung der rationalen Zahlen wird im dritten Abschnitt vorgestellt. Verglichen mit den ganzen Zahlen kommen dabei keine neuen grundlegenden Ideen vor.

Die Vorstellung von zwei Formalisierungen der reellen Zahlen erfolgt im vierten Abschnitt und ist sehr kurz, da für eine eingehende Behandlung der reellen Zahlen ein ausgeschärfter Formalismus notwendig ist, der in der Schule nicht behandelt wird.

Den letzten Abschnitt bildet die Behandlung der surrealen Zahlen, einem alternativen Ansatz, der einige Unzulänglichkeiten des konventionellen Aufbaus der Zahlenbereiche löst. Da Rechnungen bei den surrealen Zahlen vergleichsweise lang sind, werde ich mich vor allem auf Anwendungen der surrealen Zahlen konzentrieren, deren Darlegung nur Grundlagen der surrealen Zahlen erfordert.

6.3.2 Natürliche Zahlen

In diesem ersten Teil der Facharbeit soll der Aufbau der natürlichen Zahlen mathematisch formalisiert werden. Fragen wie „was ist 1?“, „was bedeutet es, wenn man zu einer Zahl Eins addiert?“, „woran erkennt man, ob eine Zahl kleiner als eine andere ist?“ werden in diesem Teil beleuchtet.

Die erste Frage, was 1 sei, ist ein Spezialfall der allgemeineren Frage „was sind die Elemente von $\mathbb{N}$?“.

Um diese Frage mathematisch rigoros zu klären, darf man nur wenig voraussetzen. Beispielsweise ist die denkbare Definition von $\mathbb{N}$ als die Menge der ganzen Zahlen, die größer oder gleich Eins sind – $\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} \,|\, n \geq 1\}$ –, unpraktisch, da sie bereits Definitionen von $\mathbb{Z}$ und der Größergleichrelation ($\geq$) voraussetzt.

Wie sich herausstellen wird, gibt es mehrere Möglichkeiten, die natürlichen Zahlen zu realisieren. Von diesen ist keine besonders ausgezeichnet; je nach Situation und persönlichem Geschmack kann man frei zwischen den verschiedenen Realisierungen wählen.

Im Folgenden schließe ich die Null mit ein, wenn ich von „natürlichen Zahlen“ spreche.

Natürliche Zahlen nach Peano

Der italienische Mathematiker Giuseppe Peano (1858–1932) entdeckte/erfand 1889 eine Formalisierung der natürlichen Zahlen ([[PeanoPerson]], S. 4), die man heute als Standardformalisierung begreift. Später bettete Richard Dedekind (1831–1916) [[NWikiDeDedekindPerson]], deutscher Mathematiker, die Arbeit Peanos in die Mengenlehre ein.

Bei der Definition der natürlichen Zahlrepräsentanten nach Peano legt man zunächst fest, dass es einen kleinsten natürlichen Zahlrepräsentanten gibt. Diesem Repräsentanten gibt man die Bezeichnung „Null“ und verwendet zur Notation den üblichen Glyphen für Null, „0“.

Dann fordert man eine Nachfolgerfunktion S (engl. successor function), die jedem Repräsentanten einer natürlichen Zahl, n, ihren eindeutigen Nachfolgerrepräsentanten $S(n)$ (manchmal schreibt man auch „$\mathrm{Succ}(n)$“ oder „n'“; übliche Schreibweise: „$n + 1$“) zuordnet. [[NWikiDePeano]]

(Man kann an dieser Stelle noch nicht „$n + 1$“ schreiben, da man weder definiert hat, was unter „1“ zu verstehen ist, noch was die Bedeutung des Pluszeichens ist.)

Die Forderung an die Nachfolgerfunktion S, dass der Nachfolger jedes Zahlrepräsentanten eindeutig ist, kann man in Symbolen schreiben: $S(n) = S(m) \Rightarrow n = m$.

Diese zwei Objekte – einen kleinsten natürlichen Zahlrepräsentant, den man mit „0“ bezeichnet, und eine Nachfolgerfunktion S – genügen bereits, um die Menge der Repräsentanten natürlicher Zahlen zu formulieren:

$\mathbb{N}_0 = \{0, S(0), S(S(0)), S(S(S(0))), \ldots\}$

Der besseren Lesbarkeit halber gibt man den Zahlrepräsentanten $S(0)$, $S(S(0))$, ... noch zusätzliche Bezeichnungen: $S(0)$ schreibt man auch als „1“, $S(S(0))$ als „2“, usw.

Wie sich herausstellen wird, sobald man Rechenoperationen eingeführt hat, haben die Objekte, denen man die Bezeichnungen „0“, „1“, „2“, usw. gegeben hat, auch tatsächlich die Eigenschaften, die ihre Bezeichnungen suggerieren. Ohne Definition der Rechenoperatoren sind es aber lediglich Elemente einer Menge, denen man bekannte Namen gegeben hat.

Definition der Zahlensymbole für natürliche Zahlen

$$\begin{array}{lll} 0 & & \text{wird vorausgesetzt} \\ 1 & := & S(0) \\ 2 & := & S(1) = S(S(0)) \\ 3 & := & S(2) = S(S(S(0))) \\ 4 & := & S(3) = S(S(S(S(0)))) \\ & \vdots & \end{array}$$

Die Nachfolgerfunktion drückt die Idee des Zählens aus: $S(n)$ ist der Repräsentant der Zahl, die man erhält, wenn man von n ausgehend eins hochzählt.

$\mathbb{N}_0$ definiert man dann als die Menge der Zahlrepräsentanten, die man erreicht, wenn man, von 0 beginnend, schrittweise hochzählt, also sukzessive die Nachfolgerfunktion anwendet.

Meine Arbeit hat keinen absoluten Anspruch; ich definiere nicht die Zahlen selbst, sondern mögliche Repräsentanten der Zahlen. Dementsprechend beantwortet diese Arbeit auch nicht, wie in der Einleitung vereinfachend geschrieben, Fragen wie „was **ist** 2?“, sondern Fragen wie „wie kann 2 mathematisch repräsentiert werden?“.

Für die Praxis ist die Unterscheidung zwischen dem Repräsentanten einer Zahl und der Zahl selbst bei den natürlichen Zahlen von geringem Belang. Da aber die Unterscheidung bei den ganzen, rationalen und surrealen Zahlen eine wichtige Rolle spielen wird, nutze ich schon hier die sprachlich sauberere Darstellung.

– Rechenoperatoren

In den folgenden Abschnitten sollen die Definitionen der Grundrechenarten und der Relationen für natürliche Zahlen aufgestellt werden. Von vornherein problematisch ist dabei die Frage, inwieweit man sicher gehen kann, dass die hier vorgestellten Vorschriften auch wirklich zu den Vorschriften äquivalent sind, die man kennt und im Alltag benutzt.

Genauer liegt das Problem darin, dass die normalen, bekannten Vorschriften zunächst nicht axiomatisch präzisiert vorliegen: Die

Symbolmanipulationsvorschriften wie beispielsweise schriftliche Addition und schriftliche Subtraktion erlernt man in der Grundschule nicht über formale, abstrakte Definitionen, sondern „spielerisch" und anhand konkreter Beispiele. Auch sind die Regeln, die Taschenrechner benutzen, im Allgemeinen nicht einsehbar.

Man könnte meinen, dass die Überprüfung vieler Einzelfälle die Korrektheit der hier vorgestellten Definitionen, also die Übereinstimmung der Ergebnisse der Anwendung der Definitionen mit der Erfahrung, also mit den Ergebnissen der Anwendung der erlernten Symbolmanipulationsvorschriften oder dem Taschrenrechner, bezeugt.

Für einen mathematischen Beweis genügt das jedoch nicht, da man durch Überprüfung von Einzelfällen nur die Korrektheit dieser Einzelfälle bestätigen kann – nicht aber der unendlich vielen anderen Fälle, die man nicht überprüfen konnte.

Alternativ könnte man versuchen, die bekannten Vorschriften zu formalisieren, wobei man die Korrektheit jedes Schritts einzeln beweisen müsste. Man müsste also Schritt für Schritt die bekannten Vorschriften, die auf der sehr hohen Ebene der Symbolmanipulation von Ziffern vorliegen, auf das Zählkonzept, also auf bestimmte Arten und Weisen der Anwendung der Nachfolgerfunktion, zurückführen – ein umständlicher Prozess.

Umständlich wäre dieses Vorgehen deswegen, da man kompliziertere Konzepte, die es in der Realisierung der natürlichen Zahlen nach Peano nicht gibt, wie beispielsweise die Dezimalrepräsentation, formalisiert einführen müsste. Das Dezimalsystem vereinfacht zwar den alltäglichen Umgang mit Zahlen in der Hinsicht, dass sich das Rechnen mit Dezimalrepräsentationen schneller gestaltet als direkt mit der Peano-Repräsentation, wie gleich klar werden wird, erlaubt jedoch keine grundlegend neuen Operationen und ist insofern, was die Darstellung der Ideen hinter den Definitionen angeht, unnötig.

In dieser Arbeit wird es genügen müssen, die Definitionen über bereits bekanntes Wissen über Termumformungen herzuleiten und stellenweise die Gültigkeit bestimmter Gesetze zu beweisen.

Da das Muster der Eigenschaftsbeweise bei den natürlichen Zahlen immer das Prinzip der vollständigen Induktion ist und die Beweise in vielen anderen Quellen bereits ausführlich dargelegt werden (beispielsweise [[NBew]]), werde ich bei den natürlichen Zahlen weitgehend auf Beweise verzichten. Die Beweise bei den ganzen

Zahlen dagegen bringen einen echten Erkenntnisgewinn und fungieren darüberhinaus als Beispiele der Anwendung der Rechengesetze, weswegen ich bei den ganzen Zahlen Beweise nicht aussparen werde.

Addition

In diesem Abschnitt wird eine mögliche Definition der Addition hergeleitet. Diese Additionsvorschrift wird von einer für den Schulunterricht ungewöhnlichen Form sein; weswegen ich die Zulässigkeit der Vorschrift genauer thematisieren werde.

Schließlich wird die hergeleitete Definition der Addition mit den Rechenmethoden von Kindern und Erwachsenen verglichen.

Herleitung der Additionsvorschrift

Um eine mathematische Formalisierung der Addition auf den natürlichen Zahlen herzuleiten, kann man zunächst den einfachen Fall der Addition von Null betrachten. Die Addition von Null soll, bildlich gesprochen, ohne Auswirkung sein; man definiert daher:

$n + 0 := n$ mit $n \in \mathbb{N}_0$.

Erst ab dieser Stelle hat das Element aus $\mathbb{N}_0$, dem man den Namen „Null“ gegeben hat, auch wirklich die Bedeutung der Null.

Zur Herleitung der Definition der Addition einer Zahl ungleich Null kann man das bekannte Wissen über Termumformungen nutzen. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit werde ich öfter das „bekannte Wissen über Termumformungen“ nutzen; diese Rechnungen finden außerhalb des bereits definierten Formalismus statt – beispielsweise nutzen sie Operatoren, die noch nicht definiert wurden, oder Umformungsregeln, deren Gültigkeit ohne Beweis vorausgesetzt werden. Diese Rechnungen dienen nur der schriftlichen Fixierung des Herleitungswegs.

$$\begin{aligned} & n + k = && \textit{(Schreiben von } k \textit{ als Nachfolger von } m\textit{)} \\ = \; & n + (m + 1) = && \textit{(Anwenden des Assoziativgesetzes)} \\ = \; & (n + m) + 1 \end{aligned}$$

Addiert man also zu einem Zahlrepräsentanten n den Nachfolgerrepräsentanten $S(m)$ eines Zahlrepräsentanten m, so erhält man als Ergebnis den Nachfolgerrepräsentanten $S(n+m)$ der Summe $n+m$; man führt die Addition aufs Zählen zurück. In Symbolen:

Definition der Addition auf den natürlichen Zahlen

$$
\begin{array}{llcll}
\text{I.} & n & + & 0 & := n \\
\text{II.} & n & + & S(m) & := S(n+m)
\end{array}
$$

mit $n, m \in \mathbb{N}_0$.

Es mag zunächst ungewohnt erscheinen, dass man, obwohl man die Bedeutung der Addition gerade erst definiert, auch auf der rechten Seite der Definition addiert – in der Schule kommt diese Art von Definition („rekursive Definitionen“) üblicherweise nicht vor; formal zulässig ist sie aber durchaus.

Nutzbarkeit der Definition als Arbeitsvorschrift

In diesem Abschnitt werde ich zeigen, dass die angegebene rekursive Definition der Addition nicht nur formal zulässig ist, sondern auch nützt – dass sie also nicht nur $n + S(m)$ mit $S(n + m)$ in Beziehung setzt, sondern die Addition auch wirklich aufs Zählen zurückführt.

Ein Beispiel für eine Definition, die lediglich formal zulässig ist, aber nicht nützt, ist $n + m := m + n$. Mit dieser Definition wüsste man zwar, dass die Summationsreihenfolge unerheblich ist, eine konkrete Arbeitsvorschrift – ein Algorithmus –, wie man zwei Zahlrepräsentanten addieren sollte, liefert die Vorschrift jedoch nicht.

Um als Arbeitsvorschrift einsetzbar zu sein, muss die Additionsregel, unabhängig von der Wahl der Summanden, nach einer endlichen Anzahl wiederholter Anwendungen „terminieren“, d.h. jede Rechnung muss einen Schluss haben.

Ein Zahlenbeispiel verdeutlicht diesen Sachverhalt:

$$
\begin{array}{lll}
 & 2+3 = & \textit{(Schreiben des zweiten Summanden als Nachfolger)} \\
= & 2+S(2) = & \textit{(Anwenden der Additionsvorschrift)} \\
= & S(2+2) = & \textit{(Schreiben des zweiten Summanden als Nachfolger)} \\
= & S(2+S(1)) = & \textit{(Erneutes Anwenden der Additionsvorschrift)} \\
= & S(S(2+1)) = & \textit{(Schreiben des zweiten Summanden als Nachfolger)} \\
= & S(S(2+S(0))) = & \textit{(Erneutes Anwenden der Additionsvorschrift)} \\
= & S(S(S(2+0))) = & \textit{(Anwenden von Regel I. der Additionsvorschrift)} \\
= & S(S(S(2))) = & \textit{(Schreiben als Dezimalzahl)} \\
= & S(S(3)) = S(4) = 5 &
\end{array}
$$

Schrittweise wird also die Anwendung der Nachfolgerfunktion S aus dem zweiten Summanden „herausgezogen“ und auf die gesamte Summe bezogen, bis eine Summe auftritt, bei der zweite Summand 0 ist.

Man kann beweisen, dass, egal welche zwei Zahlrepräsentanten $n, m \in \mathbb{N}_0$ man addiert, nach einer endlichen Anzahl von Schritten immer die Addition von Null auftritt und so eine endlose Wiederholung der Additionsvorschrift verhindert wird:

Die problematisch erscheinende, rekursive Regel II. der Definition greift, wenn der zweite Summand nicht Null, sondern ein Nachfolger ist. Der Definition zufolge addiert man dann zum ersten Summanden den Vorgänger des zweiten Summanden; jede wiederholte Anwendung der Additionsvorschrift ergibt eine Summe, bei der der zweite Summand kleiner ist als der jeweils ursprüngliche Summand.

Da jede natürliche Zahl selbst nur endlich groß ist, ist nach einer endlichen Anzahl Schritte eine Rechnung erreicht, bei der der zweite Summand Null ist, und die einfache Vorschrift $n + 0 := n$ greift; „die Rekursion ist gebrochen“, die Additionsvorschrift kann daher sinnvoll als Arbeitsvorschrift eingesetzt werden.

Vergleich der Idee hinter der Definition mit den Rechenmethoden von Kindern und Erwachsenen

Die Idee hinter dieser Definition ist, dass das Zählen „herausgezogen“ wird, ähnlich wie es kleine Kinder machen: Um beispielsweise zu 2 3 zu addieren, beginnen Kinder zunächst bei Null (geschlossene Hand).

Dann zählen sie zweimal, also bis zu $S(S(0)) = 2$. Bei der 2 angelangt zählen sie schließlich noch dreimal weiter und gelangen auf diese Weise zu $S(S(\underbrace{S(S(S(0)))}_{3})) = 5$.

Ältere Kinder und Erwachsene dagegen nutzen nicht mehr direkt das Zählen bzw. die Nachfolgerfunktion zur Addition, sondern betreiben Symbolmanipulation: Tabellen wie in Abb. [[BILD:NSymbTab]] auf S. [[LINK:NSymbTab]] dargestellt sind verinnerlicht, und kompliziertere Rechnungen denkt man sich als aus den auswendig gelernten Rechnungen mit bekannten Ergebnissen zusammengesetzt.

Addition mehrerer Summanden

Die Addition mehrerer Summanden muss man nicht eigens definieren, da sie sich aus der Definition der Addition zweier Summanden ergibt:

$+$	0	1	2	3	$4\cdots$
0	0	1	2	3	$4\cdots$
1	1	2	3	4	$5\cdots$
2	2	3	4	5	$6\cdots$
3	3	4	5	6	$7\cdots$
4	4	5	6	7	$8\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

$\cdot$	0	1	2	3	$4\cdots$
0	0	0	0	0	$0\cdots$
1	0	1	2	3	$4\cdots$
2	0	2	4	6	$8\cdots$
3	0	3	6	9	$12\cdots$
4	0	4	8	12	$16\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Abbildung 1: Grundlagen der Symbolmanipulationen des Alltags

$x + y + z = (x + y) + z$

Bei der Addition ist die Wahl der Klammerung beliebig, da die $\mathbb{N}_0$-Addition assoziativ ist. (Diese Eigenschaft habe ich hier jedoch nicht bewiesen; ein Beweis findet sich in [[NBew]] auf S. 4.)

Subtraktion

Eine mögliche Definition der Subtraktion wird in diesem Abschnitt vorgestellt. Wie auch die Additionsvorschrift wird die hergeleitete Subtraktionsvorschrift rekursiv sein.

Herleitung der Subtraktionsvorschrift

Zur Herleitung der Subtraktionsvorschrift für die natürlichen Zahlen kann man wie bei der Herleitung der Additionsvorschrift vorgehen und zunächst den einfachen Fall der Subtraktion von Null betrachten. Die Subtraktion von Null soll (bildlich gesprochen) keine Auswirkung haben; man definiert daher:

$n - 0 := n$ mit $n \in \mathbb{N}_0$.

Zur Herleitung des anderen Falls, der Subtraktion eines Zahlrepräsentanten v ungleich Null von einem natürlichen Zahlrepräsentanten u, kann man den Term $u-v$ ansetzen und dann das bereits bekannte Wissen über äquivalente Termumformungen nutzen:

$$\begin{aligned}
& u - v = && \textit{(Schreiben von } u \textit{ als Nachfolger von } n\textit{)} \\
= \; & (n+1) - v = && \textit{(Schreiben von } v \textit{ als Nachfolger von } m\textit{)} \\
= \; & (n+1) - (m+1) = && \textit{(Ausmultiplizieren der Klammern)} \\
= \; & n + 1 - m - 1 = && \textit{(Vereinfachen)} \\
= \; & n - m &&
\end{aligned}$$

Zieht man also vom Nachfolgerrepräsentanten $S(n)$ eines Zahlrepräsentanten n den Nachfolgerrepräsentanten $S(m)$ eines Zahlrepräsentanten m ab, so ist das Ergebnis das gleiche, als wenn man von n m abzieht. In Symbolen:

Definition der Subtraktion auf den natürlichen Zahlen

I. $n - 0 := n$

II. $S(n) - S(m) := n - m$ (nur für $n \geq m$ definiert)

mit $n, m \in \mathbb{N}_0$.

Die Angabe, der Ausdruck auf der rechten Seite von Regel II. sei nur für $n \geq m$ definiert, ist rein informeller Natur. Würde man diese Angabe als Bestandteil der Definition ansehen, so wäre die Definition an dieser Stelle ohne Sinn, da die Bedeutung des Größergleichzeichens noch nicht definiert wurde.

Diese Definition ist, wie auch die Additionsvorschrift, rekursiv – auf der rechten Seite von Regel II. der Definition steht das Minuszeichen, dessen Bedeutung erst durch die Definition selbst definiert wird.

Die Art und Weise, wie die Subtraktionsvorschrift „arbeitet“, verdeutlicht ein Zahlenbeispiel:

$$\begin{aligned}
& 5 - 3 = && \textit{(Schreiben als Nachfolger)} \\
= \; & S(4) - S(2) = && \textit{(Anwenden der Subtraktionsvorschrift)} \\
= \; & 4 - 2 = && \textit{(Schreiben als Nachfolger)} \\
= \; & S(3) - S(1) = && \textit{(Anwenden der Subtraktionsvorschrift)} \\
= \; & 3 - 1 = && \textit{(Schreiben als Nachfolger)} \\
= \; & S(2) - S(0) = && \textit{(Anwenden der Subtraktionsvorschrift)} \\
= \; & 2 - 0 = && \textit{(Anwenden von Regel I. der Subtraktionsvorschrift)} \\
= \; & 2
\end{aligned}$$

Nutzbarkeit der Definition als Arbeitsvorschrift

Anders als die Additionsvorschrift, die für alle Paare natürlicher Zahlen anwendbar ist, ergibt die Subtraktion auf den natürlichen Zahlen nur dann Sinn, wenn der Minuend größergleich dem Subtrahend ist.

Um zu überprüfen, ob die soeben hergeleitete Subtraktionsvorschrift auch diese Eigenschaft hat, und nicht etwa auch für Differenzen, bei denen der Minuend kleiner als der Subtrahend ist, Ergebnisse liefert, ist es hilfreich, vor einem allgemeinen Beweis zunächst ein Zahlenbeispiel zu betrachten:

$$\begin{aligned} & 1-4= && \textit{(Schreiben als Nachfolger)} \\ = \; & S(0)-S(3)= && \textit{(Anwenden der Subtraktionsvorschrift)} \\ = \; & 0-3=\,? && \end{aligned}$$

Auf den Ausdruck der letzten Zeile, $0-3$, passt weder die Vorschrift $n-0:=n$, da der Subtrahend nicht Null ist, noch die Vorschrift für den zweiten Fall, da man den Minuenden, 0, nicht als Nachfolger schreiben kann.

Allgemein: Setzt man die Differenz $n-m$ an, wobei n größergleich m ist, so sind Minuend und Subtrahend der sich durch wiederholte Anwendungen der Subtraktionsvorschrift ergebenden Folgerechnungen jeweils um eins kleiner.

Nach einer endlichen Anzahl Schritte ergibt sich eine Differenz, bei der der Subtrahend Null ist; Regel I. greift und die Rekursion ist gebrochen. Die Subtraktionsvorschrift entspricht also für den Fall, dass der Subtrahend kleinergleich dem Minuend ist, der Erwartung, ist in diesem Sinne also korrekt.

Ist nun aber der Subtrahend größer als der Minuend, so tritt nach einer endlichen Anzahl Schritte ein Fall der Form „$0-k$“ (mit $k \in \mathbb{N}^+$) auf, für den keine Regel definiert ist; die Subtraktion einer größeren Zahl von einer kleineren Zahl ist also der hergeleiteten Subtraktionsvorschrift nach (wie auch gewünscht) nicht definiert.

Somit ist die hergeleitete Definition der Subtraktion nicht nur formal zulässig, sondern auch als brauchbare Arbeitsvorschrift verwendbar.

Idee hinter der Definition

Hinter der hergeleiteten Definition der Subtraktion steckt die Idee der „Relativität“ der Subtraktion: Der Unterschied – die Differenz – zweier Zahlen ist von den absoluten Zahlwerten unabhängig.

Kleine Kinder subtrahieren, indem sie zunächst zum Minuenden hochzählen und dann so oft, wie der Subtrahend groß ist, rückwärts zählen. Dieses Vorgehen wird Grundlage der Realisierung der ganzen Zahlen sein, spiegelt sich in der hergeleiteten Definition der Subtraktion auf den natürlichen Zahlen jedoch nicht unmittelbar wieder.

Subtraktion mehrerer Zahlen

Die Subtraktion mehrerer Zahlen muss man, analog zur Addition mehrerer Summanden, nicht eigens definieren, da sie sich aus der Definition der Subtraktion einer Zahl ergibt:

$a - b - c = (a - b) - c$

Anders als bei der Addition ist bei der Subtraktion die Klammerung nicht frei wählbar; man hat daher definiert, dass man von links nach rechts rechnet (in der Informatik sagt man, das Minuszeichen „assoziiere nach links“):

$a - b - c - d = (a - b) - c - d = [(a - b) - c] - d$

Multiplikation

In diesem Abschnitt wird die Multiplikation auf den natürlichen Zahlen vorgestellt. Drei Interpretationsvorschläge der Vorschrift werden gegeben.

Herleitung der Multiplikationsvorschrift

Zur Herleitung der Multiplikationsvorschrift für die natürlichen Zahlen kann man wie bei der Herleitung der Addition und der Subtraktion zwischen dem einfachen Fall der Multiplikation mit Null und dem komplizierteren Fall der Multiplikation mit einer Zahl ungleich Null unterscheiden.

Die Multiplikation eines jeden Zahlrepräsentanten $n \in \mathbb{N}_0$ mit Null soll Null ergeben. In Symbolen:

$n \cdot 0 := 0$ mit $n \in \mathbb{N}_0$.

Zur Herleitung der Vorschrift für den anderen Fall – der zweite Faktor ist ungleich Null – kann man das bereits bekannte Wissen über Termumformungen, insbesondere über das Distributivgesetz nutzen:

$$\begin{array}{lll} & n \cdot k = & \textit{(Schreiben von } k \textit{ als Nachfolger von} m\textit{)} \\ = & n \cdot (m+1) = & \textit{(Ausmultiplizieren)} \\ = & n \cdot m + n \cdot 1 = & \textit{(Vereinfachen des zweiten Summanden)} \\ = & n \cdot m + n & \end{array}$$

Dieses Ergebnis deckt sich mit der Art und Weise, wie Multiplikation in der Grundschule [[NMultGrund]] eingeführt wird:

$$\begin{array}{lllll} & n \cdot k & = \underbrace{n+n+\cdots+n+n}_{k \text{ Mal}} & \Leftrightarrow & \textit{(Schreiben von } k \textit{ als Nachfolger} \\ \Leftrightarrow & n \cdot (m+1) & = \underbrace{n+n+\cdots+n+n}_{(m+1) \text{ Mal}} & \Leftrightarrow & \textit{(Herausziehen eines Summande} \\ \Leftrightarrow & n \cdot (m+1) & = \underbrace{\underbrace{n+n+\cdots+n+n}_{m \text{ Mal}}+n}_{(m+1) \text{ Summanden}} & \Leftrightarrow & \textit{(Schreiben als Produkt)} \\ \Leftrightarrow & n \cdot (m+1) & = nm+n & & \end{array}$$

Also:

Definition der Multiplikation auf den natürlichen Zahlen

$$\begin{array}{lcccl} \text{I.} & n & \cdot & 0 & := 0 \\ \text{II.} & n & \cdot & S(m) & := n \cdot m + n \end{array}$$

mit $n, m \in \mathbb{N}_0$.

Nutzbarkeit der Definition als Arbeitsvorschrift

Auch diese Definition ist rekursiv, da auf der rechten Seite von Regel II. das Malzeichen verwendet wird, dessen Bedeutung aber erst durch die Definition festgelegt wird.

Wie auch die rekursiven Definitionen der Addition und Subtraktion terminiert auch die Definition der Multiplikation für alle $n, m \in \mathbb{N}_0$, da der sich ergebende zweite Faktor mit jeder wiederholten Anwendung der Multiplikationsvorschrift jeweils um eins kleiner ist; nach einer endlichen Anzahl von Schritten ergibt sich ein Produkt, dessen zweiter Faktor Null ist, womit Regel I., $n \cdot 0 := 0$, greift und die Rekursion gebrochen ist. Die Definition kann man also als Arbeitsvorschrift einsetzen.

Ein Zahlenbeispiel demonstriert das:

$$\begin{array}{lll} & 2 \cdot 3 = & \text{(Schreiben des zweiten Faktors als Nachfolger)} \\ = & 2 \cdot S(2) = & \text{(Anwenden der Multiplikationsvorschrift)} \\ = & 2 \cdot 2 + 2 = & \text{(Schreiben des zweiten Faktors als Nachfolger)} \\ = & 2 \cdot S(1) + 2 = & \text{(Erneutes Anwenden der Multiplikationsvorschrift)} \\ = & 2 \cdot 1 + 2 + 2 = & \text{(Schreiben des zweiten Faktors als Nachfolger)} \\ = & 2 \cdot S(0) + 2 + 2 = & \text{(Erneutes Anwenden der Multiplikationsvorschrift)} \\ = & 2 \cdot 0 + 2 + 2 + 2 = & \text{(Anwenden von Regel I. der Multiplikationsvorschrift)} \\ = & 0 + 2 + 2 + 2 = & \text{(Ausrechnen der Summe über mehrmaliges Anwenden der} \\ = & 6 & \end{array}$$

Idee hinter der Definition

Hinter der Definition steckt die Auffassung der Multiplikation als wiederholte Addition, wobei der zweite Faktor angibt, wie oft der erste wiederholt wird.

Genauso möglich ist eine Definition der Multiplikation, bei der der erste Faktor angibt, wie oft der zweite wiederholt wird:

$$\begin{array}{lcccl} \text{I.} & 0 & \cdot & n & := 0 \\ \text{II.} & S(m) & \cdot & n & := m \cdot n + m \end{array}$$

Der Beweis, dass diese alternative Definition der Multiplikation zu der zuvor hergeleiteten äquivalent ist, läuft über vollständige Induktion über zwei Variablen und ist daher recht lang, weswegen ich ihn hier nicht ausführe. Finden kann man den Beweis beispielsweise in [[NBewMultKomm]].

Division

In diesem Abschnitt wird eine Definition der Division hergeleitet und ihre rekursive Natur genauer thematisiert. Anschließend wird die hergeleitete Vorschrift mit der Art und Weise, wie kleine Kinder dividieren, verglichen.

Herleitung der Divisionsvorschrift

Auch zur Herleitung der Definition der Division auf den natürlichen Zahlen kann man zwei Fälle, Dividend gleich Null und Dividend ungleich Null, unterscheiden.

Die Division von Null durch jede positive natürliche Zahl soll Null sein. In Symbolen:

$0 : m := 0$ mit $m \in \mathbb{N}^+$.

Zur Herleitung der Divisionsvorschrift für den anderen Fall, Dividend ungleich Null, kann man das bereits bekannte Wissen über äquivalente Umformungen von Brüchen nutzen:

$$\begin{aligned} & \frac{n}{m} = && \textit{(Hinzufügen und Abziehen von } m \textit{ im Zähler)} \\ = \; & \frac{n + (m - m)}{m} = && \textit{(Stellen von } (+m) \textit{ an den Beginn)} \\ = \; & \frac{m + (n - m)}{m} = && \textit{(Aufspalten des Bruchs nach dem ersten Summanden)} \\ = \; & \frac{m}{m} + \frac{n-m}{m} = && \textit{(Vereinfachen des ersten Summanden)} \\ = \; & 1 + \frac{n-m}{m} \end{aligned}$$

Also:

Definition der Division auf den natürlichen Zahlen
I. $0 : m := 0$
II. $n : m := 1 + (n - m) : m$ (nur für $n \geq m$ definiert)
mit $n, m \in \mathbb{N}^+$.

Nutzbarkeit der Definition als Arbeitsvorschrift

Die rekursive Definition terminiert unabhängig von der Wahl von Dividend und Divisor. Um diese Aussage zu überprüfen, ist es zweckmäßig, zwei Fälle zu unterscheiden – den Fall, bei dem der Divisor ein Teiler des Dividenden ist, die Division also „aufgeht“, und den Fall, bei der die Division nicht aufgeht.

Die Unterteilung in zwei Fälle ist nur eine Darstellungshilfe; formal ist sie problematisch, da an dieser Stelle das Teilerkonzept noch nicht definiert wurde und darüberhinaus sich das Teilerverhältnis ja gerade aus der Eigenschaft der Division, entweder aufzugehen oder nicht aufzugehen, ergibt.

Folgendes Zahlenbeispiel demonstriert die Anwendung der Divisionsvorschrift für den ersten Fall:

$$\begin{aligned}
& 4 : 2 = && \textit{(Anwenden der Divisionsvorschrift)} \\
= \; & 1 + (4 - 2) : 2 = && \textit{(Ausrechnen des Dividenden durch mehrmaliges Anwen} \\
= \; & 1 + 2 : 2 = && \textit{(Anwenden der Divisionsvorschrift)} \\
= \; & 1 + 1 + (2 - 2) : 2 = && \textit{(Ausrechnen des Dividenden durch mehrmaliges Anwen} \\
= \; & 1 + 1 + 0 : 2 = && \textit{(Anwenden von Regel I. der Divisionsvorschrift)} \\
= \; & 1 + 1 = 1 + S(0) = && \textit{(Anwenden der Additionsvorschrift)} \\
= \; & S(1 + 0) = S(1) = 2 &&
\end{aligned}$$

Für den zweiten Fall – die Division geht nicht auf – terminiert das Verfahren ebenfalls, lässt aber, anders als bei der Anwendung der Divisionsvorschrift auf Divisionen, die aufgehen, das Ergebnis undefiniert:

$$\begin{aligned}
& 4 : 3 = && \textit{(Anwenden der Divisionsvorschrift)} \\
= \; & 1 + (4 - 3) : 3 = && \textit{(Ausrechnen des Dividenden durch mehrmaliges Anwen} \\
= \; & 1 + 1 : 3 = && \textit{(Anwenden der Divisionsvorschrift)} \\
= \; & 1 + 1 + \underbrace{(1 - 3)}_{\text{nicht definiert}} : 3 &&
\end{aligned}$$

Allgemein: Bei jeder wiederholten Anwendung der Divisionsvorschrift ergibt sich ein kleinerer Dividend. Ist der Divisor ein Teiler des ursprünglichen Dividenden, so ist nach endlich vielen Schritten ein Quotient erreicht, dessen Dividend Null ist, womit Regel I. der Divisionsvorschrift greift und die Rekursion gebrochen ist.

Im anderen Fall tritt nach endlich vielen wiederholten Anwendungen der Divisionsvorschrift eine Subtraktion auf, deren Wert (wie gewünscht) nicht definiert ist.

Da also unabhängig von Dividend und Divisor die Rekursion nach endlich vielen Schritten gebrochen wird, ist die hergeleitete Definition als Arbeitsvorschrift verwendbar.

Vergleich mit der Divisionsmethode von Kindern

Kinder veranschaulichen sich das Dividieren durch Aufteilen einer gegebenen Menge mit so vielen Gegenständen, wie der Dividend groß ist, auf so viele Plätze, wie der Divisor groß ist. Geht die Division auf, liegen nach Abschluss des Verfahrens auf jedem Platz gleich viele Gegenstände; die Anzahl der Gegenstände pro Platz ist das Ergebnis der Division.

Diese Divisionsmethode spiegelt sich, mit einer kleinen Veränderung, auch in der hergeleiteten Divisionsvorschrift wieder: Während Kinder üblicherweise bei jedem Schritt nur einen einzigen Gegenstand auf einen Platz verteilen, kann man sich die hergeleitete Vorschrift so veranschaulichen, als ob sie pro Schritt auf alle Plätze jeweils einen Gegenstand verteilt.

Die Division $n : m$ bedeutet also, dass insgesamt n Gegenstände auf m Plätze verteilt werden. Die rechte Seite der Regel II., $1 + (n - m) : m$, bedeutet dann, dass m Gegenstände verteilt wurden, und für den nächsten Schritt dementsprechend nur noch $n - m$ Gegenstände übrig sind. Dass jeder Platz jeweils einen Gegenstand erhalten hat, begründet das Hinzustellen des Summanden 1.

– Relationen

In den folgenden Abschnitten wird definiert, was es bedeutet, wenn zwei Zahlrepräsentanten zueinander kleinergleich, kleiner, gleich, größer oder größergleich sind.

Die Definition der Gleichheit ist oberflächlich betrachtet trivial, führt jedoch das Konzept der „strukturellen Gleichheit“ ein, das bei den ganzen, rationalen und surrealen Zahlen eine wichtige Rolle spielt.

Bei der Definition der Kleinergleichrelation wird sich eine bemerkenswerte Symmetrie zeigen.

Gleichheit

Bei den natürlichen Zahlen wie hier vorgestellt ergibt sich die Gleichheit aus der sog. strukturellen Gleichheit (structural equality). „Strukturelle Gleichheit“ bedeutet, dass man die Gleichheit nicht etwa über bestimmte Eigenschaften der Zahlen festlegt (man könnte beispielsweise definieren: „Zwei Zahlen sind genau dann äquivalent, wenn ihre Quersummen gleich sind.“), sondern dass die Gleichheit unmittelbar aus dem Aufbau der Objekte – aus ihrer Identität – folgt.

Zwei Zahlen sind also genau dann gleich, wenn die Nachfolgerfunktion gleich oft angewendet wurde. In Symbolen:

$$\begin{array}{rcll} 0 & = & 0 & \Leftrightarrow \text{ (wahr)} \\ S(n) & = & S(m) & \Leftrightarrow n = m \end{array}$$

Das mag zunächst trivial erscheinen; bei der Definition der ganzen, rationalen und surrealen Zahlen aber muss man um die strukturelle Gleichheit wissen, da dort die strukturelle Gleichheit keine sinnvolle Äquivalenzrelation darstellt.

Kleiner-, Kleinergleich-, Größergleich- und Größerrelation

Weniger trivial als die Definition der Gleichheitsrelation sind die Definitionen von Kleiner-, Kleinergleich-, Größergleich- und Größerrelation.

Anstatt die Definitionen der Relationen alle eigens herzuleiten, ist es praktischer, zunächst zu untersuchen, in welcher Beziehung die Relationen zueinander stehen – insbesondere, ob man einige Relationen durch andere ausdrücken kann.

Dabei erkennt man, dass man alle Relationen durch die Kleinergleichrelation ausdrücken kann ([[STondering]], S. 10):

Ausdruck der Kleiner-, Größer- und Größergleichrelation der natürlichen Zahlen durch die Kleinergleichrelation

$$\begin{array}{rcll} n & < & m & :\Leftrightarrow n \leq m \text{ und } n \neq m \\ n & > & m & :\Leftrightarrow n \not\leq m \\ n & \geq & m & :\Leftrightarrow n > m \text{ oder } n = m \end{array}$$

mit $n, m \in \mathbb{N}_0$.

Definiert man also die Kleinergleichrelation ($\leq$), so ergibt sich die Bedeutung der anderen Relationen „automatisch“.

Zur Herleitung der Kleinergleichrelation kann man ähnlich wie zur Herleitung der Rechenoperatoren verfahren; man betrachtet also zunächst einfache Fälle, auf die man den komplizierten Fall zurückführt.

Im Fall der Kleinergleichrelation sind die Vergleich von und mit Null einfach; man definiert:

$0 \leq n :\Leftrightarrow$ (wahr) mit $n \in \mathbb{N}_0$.

$n \not\leq 0 :\Leftrightarrow$ (wahr) mit $n \in \mathbb{N}^+$, oder, umgeformt: $S(n) \not\leq 0$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ – jeder Nachfolger ist größer als Null.

Zur Herleitung der Definition für die anderen Fälle kann man $u \leq v$ ansetzen und dann das bereits bekannte Wissen über Äquivalenzumformungen von Ungleichungen nutzen:

$$\begin{array}{llllll} & u & \leq & v & \Leftrightarrow & \textit{(Schreiben von } u \textit{ und } v \textit{ als Nachfolger)} \\ \Leftrightarrow & n+1 & \leq & m+1 & \Leftrightarrow & \textit{(Abziehen von } 1 \textit{ auf beiden Seiten)} \\ \Leftrightarrow & n & \leq & m & & \end{array}$$

Anders geschrieben:

Definition der Kleinergleichrelation auf den natürlichen Zahlen

$$\begin{array}{rlllll} \text{I.} & 0 & \leq & m & :\Leftrightarrow & \text{(wahr)} \\ \text{II.} & S(n) & \not\leq & 0 & :\Leftrightarrow & \text{(wahr)} \\ \text{III.} & S(n) & \leq & S(m) & :\Leftrightarrow & n \leq m \end{array}$$

mit $n, m \in \mathbb{N}_0$.

Beispiele:

$$\begin{array}{lrcll} & 1 & \leq & 3 & \Leftrightarrow \quad \textit{(Schreiben als Nachfolger)} \\ \Leftrightarrow & S(0) & \leq & S(2) & \Leftrightarrow \quad \textit{(Anwenden der Kleinergleichrelationsvorschrift)} \\ \Leftrightarrow & 0 & \leq & 2 & \Leftrightarrow \text{(wahr)} \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcll} & 3 & > & 1 & \Leftrightarrow \quad \textit{(Schreiben als Kleinergleichrelation)} \\ \Leftrightarrow & 3 & \not\leq & 1 & \Leftrightarrow \quad \textit{(Schreiben als Nachfolger)} \\ \Leftrightarrow & S(2) & \not\leq & S(0) & \Leftrightarrow \quad \textit{(Anwenden der Kleinergleichrelationsvorschrift)} \\ \Leftrightarrow & 2 & \not\leq & 0 & \Leftrightarrow \text{(wahr)} \end{array}$$

Die hier definierte Kleinergleichrelation ist, wie sie es auch sein sollte, reflexiv ($n \leq n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$), antisymmetrisch (aus $n \leq m$ und $m \leq n$ folgt $n = m$) und transitiv (aus $x \leq y$ und $y \leq z$ folgt $x \leq z$). Da sich die Beweise dieser Eigenschaften aus vollständiger Induktion über mehrere Variablen ergeben, sind sie vergleichsweise lang, weswegen ich sie hier nicht ausführe.

Idee hinter der Definition

Die Idee, die hinter der hergeleiteten Kleinergleichrelationsvorschrift steckt, ist die gleiche wie die der Subtraktionsvorschrift, die „Relativität“: Ob zwei Zahlen zueinander kleinergleich sind, hängt nicht von ihren absoluten Zahlenwerten ab.

Dass der Subtraktions- und der Kleinergleichrelationsvorschrift die gleiche Idee zugrundeliegt, kann man schon an der Symmetrie der Notationen der Definitionen erkennen:

Regel II. der Subtraktionsvorschrift: $S(n) - S(m) \quad := \quad n - m$
Regel III. der Kleinergleichrelationsvorschrift: $S(n) \leq S(m) \quad :\Leftrightarrow \quad n \leq m$

– Natur des Anfangselements und der Nachfolgerfunktion

Die Existenz eines Anfangselements, das man mit „Null“ bezeichnet, und einer Nachfolgerfunktion S genügen, um eine Menge der Repräsentanten natürlicher Zahlen zu konstruieren.

An das Anfangselement stellt man dabei keinerlei Forderungen – es ist lediglich ein Symbol, ähnlich wie es die Elemente von Ergebnisräumen in der Kombinatorik sind.

Die einzige Bedingung, die eine Funktion erfüllen muss, damit man sie als Nachfolgerfunktion zur Konstruktion der natürlichen Zahlrepräsentanten nutzen kann, ist, dass der Nachfolgerrepräsentant $S(n)$ eines Zahlrepräsentanten n eindeutig ist – für jeden Nachfolgerrepräsentant $S(n)$ gibt es genau einen Zahlrepräsentanten n, von dem $S(n)$ der Nachfolger ist. In Symbolen: $S(n) = S(m) \Rightarrow n = m$

Über die Identität des Anfangselements und der Nachfolgerfunktion habe ich in den vorhergehenden Abschnitten keine Aussagen getroffen, 0 und S blieben also abstrakt. Insbesondere habe ich nirgendwo den Term $S(n)$ definiert.

Man kann aber auch 0 und S konkrete Werte zuweisen. Bekannt ist dieses Vorgehen aus der analytischen Geometrie, bei der man – je nach Vorliebe und Einsatzzweck – Vektoren beispielsweise konkret als Dreiertupel reeller Zahlen, Polynome bis zum Grad 3, oder Mengen parallelgleicher Pfeile begreift, oder aber abstrakt bleibt und allgemein rechnet – ohne Bezug auf eine bestimmte Realisierung der Axiome.

Der Vorteil der Konkretisierung liegt darin, dass man möglicherweise einfacher denken kann oder dass sich rechnerische Vorteile ergeben. Ein solcher rechnerischer Vorteil ergibt sich beispielsweise bei der üblichen mengentheoretischen Realisierung der natürlichen Zahlen, die ich im nächsten Abschnitt beschreiben werde.

Wichtig ist, dass einem bewusst ist, dass es keinesfalls notwendig ist, 0 und S zu konkretisieren. Anfangselement und Nachfolgerfunktion abstrakt zu lassen, ist genauso möglich und hat (je nach persönlichem Geschmack) den Vorteil, dass man die natürlichen Zahlen nicht in eine bestimmte Realisierung „zwingt“.

Mengentheoretische Realisierung der natürlichen Zahlen

Um 1900 herum war es den Mathematikern besonders wichtig, die Erkenntnisse der letzten Jahrhunderte zu formalisieren. Als zugrundeliegendes Axiomensystem nutzte man die Mengenlehre. ([[HilbertProg]], S. 1)

Die natürlichen Zahlen ergeben sich in den mengentheoretischen Umgebung dadurch, indem man das Anfangselement 0 und die Nachfolgerfunktion S sinnvoll konkretisiert. Eine für die Mengenlehre nützliche Konkretisierung enteckte/erfand Richard Dedekind [[NWikiDeDedekindPerson]] und lautet wie folgt:

Mengentheoretische Definition der natürlichen Zahlen

$0 := \{\}$

$S\colon M \mapsto S(M) := M \cup \{M\}$

Damit ergeben sich für die Zahlensymbole folgende Definitionen:

$$\begin{array}{lcl} 0 & = & \{\} \text{ (nach Definition)} \\ 1 & = & S(0) = S(\{\}) = \{\} \cup \{\{\}\} = \{\{\}\} = \{0\} \\ 2 & = & S(1) = S(\{0\}) = \{0\} \cup \{\{0\}\} = \{0, \{0\}\} = \{0, 1\} \\ 3 & = & S(2) = S(\{0, 1\}) = \{0, 1\} \cup \{\{0, 1\}\} = \{0, 1, \{0, 1\}\} = \{0, 1, 2\} \\ 4 & = & S(3) = \cdots = \{0, 1, 2, 3\} \\ & \vdots & \end{array}$$

Die Menge der Repräsentanten natürlicher Zahlen ist dementsprechend:

$\mathbb{N}_0 = \{0, S(0), S(S(0)), S(S(S(0))), \ldots\} = \{\{\}, \{0\}, \{0, 1\}, \{0, 1, 2\}, \ldots\}$

Man begreift Repräsentanten natürlicher Zahlen also als die Menge ihrer Vorgängerrepräsentanten.

Beispiel: $6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} = \{n \in \mathbb{N}_0 \mid n < 6\}$.

Die Definitionen der Rechenoperatoren und Relationen kann man analog wie die Zahlensymbole in den Formalismus der Mengenlehre überführen; man also lediglich „0“ durch „$\{\}$“ ersetzen und statt „$S(M)$“ „$M \cup \{M\}$“ schreiben. Beispielsweise lautet die auf diese Weise übergeführte Definition der Addition wie folgt:

Mengentheoretische Definition der Addition auf den natürlichen Zahlen

$$\begin{array}{lcccl} \text{I.} & N & + & \{\} & = & N \\ \text{II.} & N & + & (M \cup \{M\}) & = & S(N + M) = (N + M) \cup \{N + M\} \end{array}$$

mit $N, M \in \mathbb{N}_0$.

Dadurch, dass 0 und S jetzt nicht mehr rein abstrakt sind, sondern konkretisiert wurden, kann man einige der übertragenen Definitionen vereinfachen.

Beispielsweise kann man die Kleinergleichrelation ($\leq$) auf die (unechte) Teilmengenrelation ($\subseteq$) reduzieren. Diese Vereinfachung ist zulässig, da ein Repräsentant einer natürlichen Zahl in der mengentheoretischen Realisierung der Peano-Axiome die Menge der Repräsentanten all ihrer Vorgänger ist; ein Zahlenbeispiel verdeutlicht den Zusammenhang:

$$\begin{array}{rrclll} & 2 & \leq & 5 & \Leftrightarrow & \textit{(Schreiben als Mengen)} \\ \Leftrightarrow & \{0,1\} & \leq & \{0,1,2,3,4\} & \Leftrightarrow & \textit{(Ausnutzen von } (\leq) = (\subseteq)\textit{)} \\ \Leftrightarrow & \{0,1\} & \subseteq & \{0,1,2,3,4\} & \Leftrightarrow \text{(wahr)} & \end{array}$$

Verallgemeinerung der mengentheoretischen Realisierung der Peano-Axiome

Verbreitet ist auch noch eine Verallgemeinerung der im letzten Abschnitt vorgestellten mengentheoretischen Realisierung der natürlichen Zahlen. Betrachtet man die Anzahl der Elemente der mengentheoretischen Repräsentanten natürlicher Zahlen (die ja Mengen sind)...

$$\begin{array}{lcll} 0 & = & \{\}: & \text{keine Elemente} \\ 1 & = & \{0\}: & \text{ein Element} \\ 2 & = & \{0,1\}: & \text{zwei Elemente} \\ 3 & = & \{0,1,2\}: & \text{drei Elemente} \\ & \vdots & & \end{array}$$

...so fällt auf, dass der Repräsentant jeder Zahl genau so viele Elemente enthält, wie die Zahl, die er repräsentiert, groß ist.

Als Verallgemeinerung liegt nun nahe, einen Repräsentant einer natürlichen Zahl als die Menge aller Mengen, die so viele Elemente enthalten, wie die Zahl, die er repräsentiert, groß ist, zu begreifen. In Symbolen:

Verallgemeinerte mengentheoretische Definition der Zahlensymbole für natürliche Zahlen

$$\begin{aligned} 0 &:= \{M \mid M \text{ ist eine Menge und } M \text{ enthält keine Elemente}\} \\ 1 &= \{M \mid M \text{ ist eine Menge und } M \text{ enthält ein Element}\} \\ 2 &= \{M \mid M \text{ ist eine Menge und } M \text{ enthält zwei Elemente}\} \\ 3 &= \{M \mid M \text{ ist eine Menge und } M \text{ enthält drei Elemente}\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Die im letzten Abschnitt vorgestellten Repräsentanten natürlicher Zahlen der speziellen mengentheoretischen Realisierung der Peano-Axiome sind Elemente der verallgemeinerten Repräsentanten. Beispielsweise ist $3_{\text{speziell}} = \{0_{\text{spez.}}, 1_{\text{spez.}}, 2_{\text{spez.}}\}$ und $3_{\text{allgemein}} = \left\{ \underbrace{\{0_{\text{spez.}}, 1_{\text{spez.}}, 2_{\text{spez.}}\}}_{3_{\text{spez.}}}, \ldots \right.$ ander

Die Idee hinter dieser verallgemeinerten Realisierung liegt in der Abstraktion von Mengen auf ihre Mächtigkeit hin: Mengen, auch des Alltags (Taschen, Koffer), können unabhängig von der Art ihres Inhalts in der Zahl ihrer Elemente übereinstimmen.

Bei Kindern gilt diese Abstraktionsfähigkeit als eine Voraussetzung zum Rechnen ([[NMengAbst]], S. 5).

Visualisierung natürlicher Zahlen am Zahlenstrahl

Ein beliebtes Mittel zur Veranschaulichung natürlicher Zahlen ist der Zahlenstrahl. Dabei werden Zahlen mit Positionen auf dem Strahl identifiziert, und auch Addition und Subtraktion können durch Hinzunehmen eines zweiten Strahls und geeignetem Verschieben erklärt werden (Abb. [[BILD:NStrahl]] auf S. [[LINK:NStrahl]]).

Man sollte sich aber darüber bewusst sein, dass die oft ohne zu hinterfragen akzeptierte Äquidistanz der Zahlen auf dem Zahlenstrahl keineswegs aus der mathematischen Definition der natürlichen Zahlen nach Peano folgt.

Die Peano-Axiome fordern lediglich eine Nachfolgerfunktion S, die einem Zahlrepräsentanten n seinen eindeutigen Nachfolgerrepräsentanten $S(n)$ zuordnet. Möchte man das Konzept des Zahlenstrahls mittels der Peano-Axiomen formalisieren, so kann man für S beispielsweise folgende Funktion nehmen:

S: *Position* $\mapsto$ von *Position* ausgehend eine Längeneinheit weiter rechts

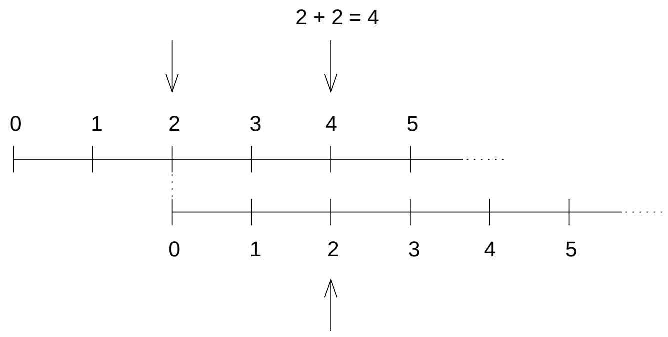


Abbildung 2: Veranschaulichung der Addition natürlicher Zahlen am Zahlenstrahl

---

Genauso verwendbar wäre aber eine Nachfolgerfunktion S, die abhängig vom Zahlrepräsentanten n, dem sie seinen Nachfolgerrepräsentanten $S(n)$ zuordnet, unterschiedlich weit nach rechts geht.

In der Tat nutzt man das Konzept des nicht-äquidistanten Zahlenstrahls, beispielsweise bei der Multiplikation und Division mittels Rechenschiebern [[NRechenschieber]]. Dort wird eine Zahl x nicht $x\,\mathrm{LE}$, sondern $\log x\,\mathrm{LE}$ (die Wahl der Basis unterliegt nur praktischen Überlegungen) von einem Ursprung entfernt aufgetragen.

Zur Multiplikation und Division werden dann die besonderen Eigenschaften der Logarithmusfunktion,

$\log x + \log y = \log(x \cdot y)$ und

$\log x - \log y = \log(x : y)$,

ausgenutzt; man führt also Multiplikation und Division auf Addition bzw. Subtraktion zurück. Addition und Subtraktion erfolgen wie beim äquidistanten Zahlenstrahl durch geeignetes Verschieben zweier Strähle. 04.11.2006

6.3.3 Ganze Zahlen

Zur Definition der ganzen Zahlen und der Operationen auf den ganzen Zahlen sind verschiedene Ansätze denkbar. Zwei Ansätze werden hier vorgestellt. Der eine ist vergleichsweise naheliegend, der andere komplizierter.

Beide haben ihre Vor- und Nachteile. Wie bei den natürlichen Zahlen ist keine Realisierung der ganzen Zahlen besonders „natürlich" oder auf eine andere Art und Weise ausgezeichnet; je nach Geschmack und Situationsanforderungen kann man zwischen den verschiedenen denkbaren Ansätzen frei wählen.

Ganze Zahlen als Verknüpfung der positiven natürlichen Zahlen mit zwei Symbolen

Man kann die ganzen Zahlen in drei Klassen einteilen: die negativen ganzen Zahlen, die Zahl Null, und die positiven ganzen Zahlen. Die positiven ganzen Zahlen unterscheiden sich von den negativen nur in ihrem Vorzeichen. Es liegt daher nahe, Repräsentanten positiver und negativer ganzer Zahlen als Verknüpfung eines Symbols $+$ bzw. $-$ mit den Repräsentanten natürlicher Zahlen anzusehen. In Symbolen:

$\mathbb{Z} := (\{+,-\} \times \mathbb{N}^+) \cup \{0\}$, wobei „$0$" auf der rechten Seite der Definition lediglich als Symbol, und nicht als den bereits definierten Repräsentanten der natürlichen Zahl Null, begriffen werden soll. Man nutzt zur Darstellung dieses Symbols trotzdem den üblichen Glyphen für Null, da dieses Symbol die Rolle der Null der ganzen Zahlen übernehmen wird; die Lesbarkeit wird durch die Assoziationen, die der vertraute Glyph weckt, erhöht.

Beispiele: $3_\mathbb{Z} = (+, 3_{\mathbb{N}^+})$, $\quad (-4)_\mathbb{Z} = (-, 4_{\mathbb{N}^+})$

Um die Elemente von $\mathbb{Z}$ mit denen von $\mathbb{N}_0$ unterscheiden zu können, werde ich Indizes nach Zahlsymbolen und Verknüpfungen nutzen. Beispielsweise meint „$3_\mathbb{Z}$" den Repräsentanten der ganzen Zahl Drei aus $\mathbb{Z}$, während „$3_{\mathbb{N}_0}$" für den Repräsentanten aus $\mathbb{N}_0$ steht. Wenn die Typzugehörigkeit aus dem Zusammenhang folgt, werde ich auf die Indizes der Übersichtlichkeit halber verzichten.

Diese mathematische Formalisierung des Begriffs der ganzen Zahlen kommt dem Alltag sehr nahe: Ganze Zahlen betrachtet man nicht als etwas von den natürlichen Zahlen völlig verschiedenes, sondern lediglich als eine naheliegende Erweiterung.

Dementsprechend führt man auch im Alltag die Rechenoperatoren und Relationen der ganzen Zahlen auf eine einfache Art und Weise auf die entsprechenden Regeln der natürlichen Zahlen zurück. Dies drückt sich beispielsweise in Regeln wie „minus mal minus ist plus" aus: Man ignoriert zunächst die Vorzeichen und rechnet über die Regeln der natürlichen Zahlen, und stellt dann dem Ergebnis noch ein Vorzeichen voraus.

– Vorteile dieser Definition

Diese Realisierung der ganzen Zahlen hat den Vorteil, dass die Repräsentation einer Zahl eindeutig ist: Jede ganze Zahl hat genau einen Repräsentanten in $\mathbb{Z}$.

(Das ist nicht selbstverständlich: Beispielsweise ist die Repräsentation einer Zahl bei der alternativ denkbaren Definition $\mathbb{Z}' = \{+, -\} \times \mathbb{N}_0$ nicht eindeutig, da es in $\mathbb{Z}'$ zwei Repräsentanten für Null gibt: $(+, 0_{\mathbb{N}_0})$ und $(-, 0_{\mathbb{N}_0})$.)

Das hat sprachliche Konsequenzen: Da jeder Zahl umkehrbar eindeutig genau eine Repräsentation – ein Element von $\mathbb{Z}$ – zugeordnet ist, kann man die ganzen Zahlen mit den Elementen von $\mathbb{Z}$ identifizieren, also die Unterscheidung von abstrakten Zahlen und Repräsentanten der Zahlen fallen lassen.

Außerdem muss man somit, wie auch bei den natürlichen Zahlen, nicht eigenhändig die Gleichheitsrelation definieren – die Gleichheitsrelation folgt aus der strukturellen Gleichheit; zwei Repräsentanten ganzer Zahlen, x und y, sind genau dann gleich, wenn sie in ihrer Identität übereinstimmen.

Anders ausgedrückt: $0 \in \mathbb{Z}$ ist nur zu sich selbst gleich. Für die anderen Repräsentanten gilt: Zwei Repräsentanten ganzer Zahlen, (s_1, n_1) und (s_2, n_2), sind genau dann gleich, wenn das Symbol übereinstimmt und die natürlichen Zahlrepräsentanten n_1 und m_2 gleich sind. In Symbolen:

$(s, n) \neq 0$

$(s_1, n_1) = (s_2, n_2) \Leftrightarrow s_1 = s_2$ und $n_1 = n_2$

– Nachteile dieser Definition

Nachteil dieser Realisierung der ganzen Zahlen ist, dass die Definitionen der Operatoren und Relationen auf den ganzen Zahlen nicht sehr elegant sind: Es sind viele Fallunterscheidungen notwendig, um die drei Klassen abzudecken. Beispielsweise ist die Addition nicht so einfach wie bei den natürlichen Zahlen als $n + 0 := n$, $n + S(m) := S(n + m)$ definierbar, sondern benötigt acht (!) Fallunterscheidungen:

$$x +_{\mathbb{Z}} y := \begin{cases} 0 & \text{für } x = -y \\ y & \text{für } x = 0 \text{ und } x \neq -y \\ (+, |x| +_{\mathbb{N}_0} |y|) & \text{für } x > 0 \text{ und } y \geq 0 \\ (+, |x| -_{\mathbb{N}_0} |y|) & \text{für } x > 0 \text{ und } y < 0 \text{ und } |x| > |y| \\ (-, |y| -_{\mathbb{N}_0} |x|) & \text{für } x > 0 \text{ und } y < 0 \text{ und } |x| < |y| \\ (-, |x| +_{\mathbb{N}_0} |y|) & \text{für } x < 0 \text{ und } y \leq 0 \\ (-, |x| -_{\mathbb{N}_0} |y|) & \text{für } x < 0 \text{ und } y > 0 \text{ und } |x| > |y| \\ (+, |y| -_{\mathbb{N}_0} |x|) & \text{für } x < 0 \text{ und } y > 0 \text{ und } |x| < |y| \end{cases}$$

mit:

$$-z := \begin{cases} 0_{\mathbb{Z}} & \text{für } z = 0_{\mathbb{Z}} \\ (-, n) & \text{für } z = (+, n) \\ (+, n) & \text{für } z = (-, n) \end{cases}$$

$$|z| := \begin{cases} 0_{\mathbb{N}_0} & \text{für } z = 0_{\mathbb{Z}} \\ n & \text{für } z = (s, n) \end{cases}$$

Diese Definition der Addition auf den ganzen Zahlen spiegelt die Idee wieder, dass man im Alltag die Operatoren auf den ganzen Zahlen auf Operatoren auf den natürlichen Zahlen zurückführt. Damit man korrekte Ergebnisse erhält, muss man dazu die Vorzeichen und absoluten Zahlenwerte der Operanden miteinander vergleichen.

– Abwägung der Vor- und Nachteile

Mir erscheint der Nachteil der uneleganten Definitionen für wichtiger als die Vorteile dieser Realisierung, weswegen ich die Realisierung der ganzen Zahlen als Verknüpfung der natürlichen Zahlrepräsentanten mit zwei Symbolen hier nicht weiter ausführen werde.

Stattdessen werde ich einen anderen Ansatz vorstellen, bei dem die Definitionen der Rechenoperatoren sehr elegant und kurz sind und ohne Fallunterscheidungen auskommen.

Da, wie erwähnt, keine Realisierung besonders ausgezeichnet ist, kann man nicht sagen, eine Realisierung sei allgemein „besser“ als eine andere. Vielmehr haben Realisierungen je nach Einssatzzweck und Geschmack Vor- und Nachteile.

Ganze Zahlen als Paare natürlicher Zahlen

Man kann ganze Zahlen auch durch Paare zweier natürlicher Zahlrepräsentanten repräsentieren: $\mathbb{Z} := \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$.

Dabei begreift man ein Paar $(n, m) \in \mathbb{Z}$ als Differenz der natürlichen Zahlrepräsentanten n und m, also als $n - m$; die „Relativität der Differenzoperation" wird unterstrichen (beispielsweise ist $8 - 3$ gleich $9 - 4$ gleich $10 - 5$). n bezeichne ich als „Vorwärtszählkomponente", m als „Rückwärtszählkomponente" des Paars (n, m).

Beispiele: $3_\mathbb{Z} \equiv (3_{\mathbb{N}_0}, 0_{\mathbb{N}_0}) \equiv (4_{\mathbb{N}_0}, 1_{\mathbb{N}_0}) \equiv (5_{\mathbb{N}_0}, 2_{\mathbb{N}_0}) \equiv \cdots, \quad (-4)_\mathbb{Z} \equiv (0_{\mathbb{N}_0}, 4_{\mathbb{N}_0}) \equiv (1_{\mathbb{N}_0}, 5_{\mathbb{N}_0}) \equiv (2_{\mathbb{N}_0}, 6_{\mathbb{N}_0}) \equiv \cdots$

(Die genauere Bedeutung des $\equiv$-Zeichens werde ich gleich genauer erläutern; aus formalen Gründen darf man nicht das Gleichheitszeichen ($=$) an dieser Stelle nutzen. Statt $\mathbb{N}_0$ könnte man auch Elemente aus $\mathbb{N}^+$ oder aus bestimmten anderen Teilmengen von $\mathbb{N}_0$, $\{n \in \mathbb{N}_0 \,|\, n \geq k\}$ (mit k beliebig), zur Paarbildung heranziehen.)

Während man bei den natürlichen Zahlen nach Peano mittels einer Nachfolgerfunktion S nur vorwärts zählt, zählt man bei dieser Realisierung der ganzen Zahlen auch rückwärts:

Die erste Paarkomponente n eines Repräsentanten einer ganzen Zahl, (n, m), gibt an, wie oft, von der Null beginnend, vorwärts gezählt werden soll, und die zweite Komponente m gibt an, wie oft, ausgehend vom Ergebnis des Vorwärtszählens, man rückwärts zählen soll.

– Vor- und Nachteile dieser Definition

Bei dieser Realisierung der ganzen Zahlen ist die Zahlrepräsentation nicht eindeutig: So bedeuten beispielsweise die Paare $(8, 3)$, $(9, 4)$ und $(10, 5)$ dieselbe Zahl $5_\mathbb{Z}$. Dies ist nicht ganz unproblematisch, da viele Denkgewohnheiten nicht mehr sinnvoll anwendbar sind.

Auf der anderen Seite lässt diese Definition sehr elegante Definitionen der Rechenoperatoren und Relationen zu. Ich erachte diesen Vorteil für wichtiger als die Nachteile, die sich durch die nicht-eindeutige Zahlrepräsentation ergeben, und werde daher diesen Ansatz hier näher ausführen. Auch werde ich zwei Methoden vorstellen, die das Problem der nicht-eindeutigen Zahlrepräsentation lösen.

– Relationen

Bei der Definition der Rechenoperatoren und Relation auf den ganzen Zahlen greift man auf die Verknüpfungen der natürlichen Zahlen zurück. Anders als bei der zuerst vorgestellten Realisierung der ganzen Zahlen sind die Definitionen sehr kurz und kommen ohne Fallunterscheidungen aus.

Die Problematik, inwieweit man sicher sein kann, dass die hier präsentierten Vorschriften den bekannten Vorschriften entsprechen, die ich im Rahmen der natürlichen Zahlen auf S. [[LINK:NProbGleich]] erläutert habe, betrifft die ganzen Zahlen (natürlich) ebenfalls.

Äquivalenzrelation

Wie angedeutet, ist bei der Realisierung der ganzen Zahlen als Paare natürlicher Zahlrepräsentanten die Repräsentation einer Zahl nicht eindeutig. Man möchte nun trotzdem ganze Zahlen hinsichtlich ihrer Gleichheit vergleichen können; dazu muss man also eine Gleichheitsrelation definieren.

Anders als bei der Realisierung der natürlichen Zahlen nach Peano, bei der die Zahlrepräsentation eindeutig ist und damit die Gleichheitsbeziehung unmittelbar aus der strukturellen Gleichheit folgt, muss man bei der Realisierung der ganzen Zahlen als Paare natürlicher Zahlrepräsentanten die Äquivalenzrelation eigens definieren.

Anders formuliert möchte man gerne sagen, dass zwei Repräsentanten ganzer Zahlen, die hinsichtlich ihrer Identität unterschiedlich sind – beispielsweise $(8, 3)$ und $(9, 4)$ –, trotzdem äquivalent sind. Man schreibt dann $(8, 3) \equiv (9, 4)$; die Äquivalenzrelation ($\equiv$) muss man aber noch definieren.

Zur Herleitung der Äquivalenzbeziehung kann man die Grundidee der Definition von $\mathbb{Z}$ aufgreifen: Ein Repräsentant einer ganzen Zahl, (n, m) mit $n, m \in \mathbb{N}_0$, begreift man als die Differenz $n - m$.

Es liegt daher nahe, zwei Zahlrepräsentanten (n, m) und (ν, μ) mit $n, m, \nu, \mu \in \mathbb{N}_0$ genau dann als äquivalent zu erklären, wenn $n - m =_{\mathbb{N}_0} \nu - \mu$ ist.

Problem an dieser Definition ist, dass die Subtraktion $n - m$ bzw. $\nu - \mu$ nicht für alle $n, m \in \mathbb{N}_0$ bzw. $\nu, \mu \in \mathbb{N}_0$ definiert ist.

Möchte man beispielsweise die Gleichheit von $(-2)_{\mathbb{Z}} \equiv (3_{\mathbb{N}_0}, 5_{\mathbb{N}_0})$ zu einem anderen Ganzzahlrepräsentant untersuchen, müsste man, wenn man dieser Definition folgt, die Differenz aus $3_{\mathbb{N}_0}$ und $5_{\mathbb{N}_0}$

berechnen. $3_{\mathbb{N}_0} - 5_{\mathbb{N}_0}$ ist aber nicht definiert; die Definition ist also unzureichend, da sie nicht auf alle Repräsentanten ganzer Zahlen anwendbar ist.

Mittels des Wissens über Äquivalenzumformungen von Gleichungen kann man die Definition aber so umformen, dass sie für alle Repräsentanten ganzer Zahlen anwendbar wird:

$$\begin{array}{rcll} n - m & = & \nu - \mu \quad \Leftrightarrow & \textit{(Herüberbringen von } m \textit{ und } \mu\textit{)} \\ \Leftrightarrow \quad n + \mu & = & \nu + m & \end{array}$$

Dieser Ausdruck ist für alle $n, m, \nu, \mu \in \mathbb{N}_0$ definiert. Man kann daher definieren: Zwei Repräsentanten ganzer Zahlen, (n, m) und (ν, μ) mit $n, m, \nu, \mu \in \mathbb{N}_0$, sind genau dann äquivalent, wenn der natürliche Zahlrepräsentant $n + \mu$ gleich dem natürlichen Zahlrepräsentant $\nu + n$ ist. In Symbolen:

Definition der Äquivalenz auf den ganzen Zahlen

$(n, m) \equiv_{\mathbb{Z}} (\nu, \mu) :\Leftrightarrow n + \mu =_{\mathbb{N}_0} \nu + m$ mit $(n, m), (\nu, \mu) \in \mathbb{Z}$.

Die Ungleichheit ($\not\equiv$) ergibt sich als die logische Umkehrung dieser Definition:

$(n, m) \not\equiv_{\mathbb{Z}} (\nu, \mu) :\Leftrightarrow n + \mu \neq_{\mathbb{N}_0} \nu + m$ mit $(n, m), (\nu, \mu) \in \mathbb{Z}$.

Bei dieser Definition der Äquivalenz ist also nicht die Identität der Zahlrepräsentanten entscheidend (wie sie es bei der Realisierung der natürlichen Zahlen nach Peano ist und dort auch sinnvoll ist), sondern vielmehr der Vergleich zweier natürlicher Zahlrepräsentanten, die sich auf eine bestimmte Art und Weise aus den Repräsentanten der ganzen Zahlen ergeben.

Es ist wichtig, die strukturelle Gleichheit ($=$) von der hier definierten Äquivalenzrelation ($\equiv$) zu unterscheiden. Beispielsweise ist $(3, 5)$ hinsichtlich der strukturellen Gleichheit, die die Identität der Repräsentanten vergleicht, nicht zu $(4, 6)$ gleich ($(3, 5) \neq (4, 6)$), da $3 \neq 4$ und $5 \neq 6$, wohl aber hinsichtlich der Äquivalenzrelation $\equiv$, die anhand der hergeleiteten Vorschrift vergleicht: $(3, 5) \equiv (4, 6)$, da $\underbrace{3 + 6}_{9} =_{\mathbb{N}_0} \underbrace{4 + 5}_{9}$.

Hinsichtlich der strukturellen Gleichheit ist $(3, 5)$ nur zu sich selbst, und zu keinem anderen Paar natürlicher Zahlrepräsentanten, gleich; hinsichtlich der Äquivalenzrelation ist $(3, 5)$ zu sich und zu unendlich vielen weiteren Paaren äquivalent.

Illustration des Äquivalenzkonzepts anhand der Kongruenz in der Geometrie

Äquivalenzrelationen führt man nicht nur im Kontext des formalen Aufbaus der Zahlen ein, sondern auch in anderen Teilgebieten der Mathematik, beispielsweise in der Geometrie: Dort kann man Dreiecke als 3-Tupel der Eckpunktskoordinaten begreifen. Die strukturelle Gleichheit drückt dann aus, dass zwei Dreiecke (A, B, C) und (X, Y, Z) mit den Eckpunkten A, B, C bzw. X, Y, Z genau aufeinander liegen, also dass $(A, B, C) = (X, Y, Z)$ gilt, was bedeutet, dass $A = X$, $B = Y$ und $C = Z$ gelten.

Eine mögliche Äquivalenzrelation ist in diesem Kontext dann die Kongruenzrelation, bei der nicht die absolute Lage der Dreiecke relevant ist, sondern nur entscheidend ist, ob die Dreiecke durch Kongruenzabbildungen zur Deckung gebracht werden können. [[CAequi]]

Formalisieren könnte man die Definition der Kongruenzrelation beispielsweise wie folgt:

$(A, B, C) \equiv (X, Y, Z) :\Leftrightarrow \overline{AB} = \overline{XY}$ und $\overline{BC} = \overline{YZ}$ und $\overline{CA} = \overline{ZX}$

Wie auch bei der Äquivalenz ganzer Zahlrepräsentanten muss man dabei zwischen der strukturellen Gleichheit und der Kongruenz unterscheiden; die Verwechslungsgefahr ist aber in der Geometrie geringer, da der Umgang mit Dreiecken viel anschaulicher ist als der formale Aufbau der Zahlenmengen.

Eigenschaften der Äquivalenzrelation

Von einer Äquivalenzrelation erwartet man, dass sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist [[CAequi]]. Die hergeleitete Äquivalenzrelationsvorschrift der ganzen Zahlen erfüllt diese drei Bedingungen:

- Reflexivität bedeutet, dass jeder Repräsentant einer Zahl zu sich selbst äquivalent ist.

  Beweis:

  $$\begin{array}{rcccl} & (n, m) & \equiv_{\mathbb{Z}} & (n, m) & \Leftrightarrow \quad \textit{(Anwenden der Äquivalenzrelationsvorsc} \\ \Leftrightarrow & n + m & =_{\mathbb{N}_0} & n + m & \Leftrightarrow \text{(wahr)} \end{array}$$

- Symmetrie bedeutet, dass, wenn ein Repräsentant x zu einem Repräsentanten y äquivalent ist, auch y zu x äquivalent ist.

  Die Symmetrie der aufgestellten Äquivalenzrelation folgt aus der Symmetrie der strukturellen Gleichheit ($=$):

$$\begin{array}{rrcll}
 & x & \equiv_{\mathbb{Z}} & y & \Leftrightarrow \quad \textit{(Schreiben als Paare)} \\
\Leftrightarrow & (n,m) & \equiv_{\mathbb{Z}} & (\nu,\mu) & \Leftrightarrow \quad \textit{(Anwenden der Äquivalenzrelationsvorschrift)} \\
\Leftrightarrow & n+\mu & =_{\mathbb{N}_0} & \nu+m & \Leftrightarrow \quad \textit{(Vertauschen der beiden Seiten)} \\
\Leftrightarrow & \nu+m & =_{\mathbb{N}_0} & n+\mu & \Leftrightarrow \quad \textit{(Rückwärtiges Anwenden der Äquivalenzrelatior} \\
\Leftrightarrow & (\nu,\mu) & =_{\mathbb{N}_0} & (n,m) & \Leftrightarrow \quad \textit{(Schreiben als „}x\textit{“ und „}y\textit{“)} \\
\Leftrightarrow & y & \equiv_{\mathbb{Z}} & x &
\end{array}$$

- Transitivität bedeutet, dass, wenn ein Repräsentant x zu einem Repräsentant y äquivalent ist, und wenn y zu einem Repräsentant z äquivalent ist, auch x zu z äquivalent ist. In Symbolen: $x \equiv y$ und $y \equiv z \Rightarrow x \equiv z$ mit $x, y, z \in \mathbb{Z}$.

  Voraussetzungen:

  $$\begin{array}{lrcl}
  \text{I.} & x = (n,m) \ \equiv_{\mathbb{Z}} \ (\nu,\mu) = y & \Leftrightarrow & n+\mu \ = \ \nu+m \\
  \text{II.} & y = (\nu,\mu) \ \equiv_{\mathbb{Z}} \ (a,b) = z & \Leftrightarrow & \nu+b \ = \ a+\mu
  \end{array}$$

  Behauptung: $x = (n,m) \equiv (a,b) = z$

  Beweis:

  $$\begin{array}{lrcll}
  \text{I.} \Leftrightarrow & x & \equiv & y & \Leftrightarrow \quad \textit{(Anwenden der Äquivalenzrela} \\
  \Leftrightarrow & n+\mu & = & \nu+m & \Leftrightarrow \quad \textit{(Addieren von } (\nu+b) \textit{ zu beide} \\
  \Leftrightarrow & n+\mu+\nu+b & = & \nu+m+\nu+b & \Leftrightarrow \quad \textit{(Schreiben von „}\nu+b\textit{“ der rec} \\
  \Leftrightarrow & n+\mu+\nu+b & = & \nu+m+a+\mu & \Leftrightarrow \quad \textit{(Abziehen von } (\mu+\nu) \textit{ auf beid} \\
  \Leftrightarrow & n+b & = & m+a & \Leftrightarrow \quad \textit{(Umdrehen der Summationsr} \\
  \Leftrightarrow & n+b & = & a+m & \Leftrightarrow \quad \textit{(Rückwärtiges Anwenden der} \\
  \Leftrightarrow & (n,m) & \equiv & (a,b) & \Leftrightarrow \text{Beh.}
  \end{array}$$

Definition der Zahlensymbole für ganze Zahlen

Die Äquivalenzrelation ist auch wichtig zur Definition der Bedeutung der Zahlensymbole. Im Einführungsbeispiel auf S. [[LINK:ZPaarEinf]] vermied ich es, Zahlensymbole mit der strukturellen Gleichheit (=) zu erklären, ich ließ also die Identität der Zahlensymbole undefiniert:

$3_{\mathbb{Z}} \equiv (3_{\mathbb{N}_0}, 0_{\mathbb{N}_0}) \equiv (4_{\mathbb{N}_0}, 1_{\mathbb{N}_0}) \equiv (5_{\mathbb{N}_0}, 2_{\mathbb{N}_0}) \equiv \cdots, \quad (-4)_{\mathbb{Z}} \equiv (0_{\mathbb{N}_0}, 4_{\mathbb{N}_0}) \equiv (1_{\mathbb{N}_0}, 5_{\mathbb{N}_0}) \equiv (2_{\mathbb{N}_0}, 6_{\mathbb{N}_0}) \equiv \cdots$

Stattdessen nutzte ich die Äquivalenzrelation (≡). Das hat den Grund, dass es unendlich viele mögliche Paare natürlicher Zahlrepräsentanten gibt, die hinsichtlich der Äquivalenzrelation (≡) alle dieselbe ganze Zahl repräsentieren.

Hinsichtlich der Rechenoperatoren (+, −, ·, :) und Relationen (<, ≤, >, ≥) „verhalten“ sich all diese unendlich vielen Repräsentanten gleich. Willkürlich für jede Zahl einen Repräsentanten herauszusuchen, den man dann zur Definition der Bedeutung des entsprechenden Zahlsymbols nutzen würde, erscheint daher nicht sinnvoll.

(Ich werde beim Abschnitt über die Wiederherstellung der Repräsentationseindeutigkeit auf S. [[LINK:ZRep]] zeigen, dass dieses Vorgehen durchaus Sinn ergeben kann, vorausgesetzt, dass man noch ein paar andere Dinge beachtet.)

Den Problemen kann man also aus dem Weg gehen, indem man die Bedeutung der Zahlsymbole hinsichtlich der strukturellen Gleichheit vorerst nicht definiert und nur die Äquivalenzrelation zur Definition nutzt:

Definition der Zahlensymbole für ganze Zahlen

$$0_{\mathbb{Z}} :\equiv (0_{\mathbb{N}_0}, 0_{\mathbb{N}_0})_{\mathbb{Z}}$$

$$\begin{array}{lll@{\qquad\qquad}lll}
1_{\mathbb{Z}} & :\equiv & (1_{\mathbb{N}_0}, 0_{\mathbb{N}_0})_{\mathbb{Z}} & (-1)_{\mathbb{Z}} & :\equiv & (0_{\mathbb{N}_0}, 1_{\mathbb{N}_0})_{\mathbb{Z}} \\
2_{\mathbb{Z}} & :\equiv & (2_{\mathbb{N}_0}, 0_{\mathbb{N}_0})_{\mathbb{Z}} & (-2)_{\mathbb{Z}} & :\equiv & (0_{\mathbb{N}_0}, 2_{\mathbb{N}_0})_{\mathbb{Z}} \\
3_{\mathbb{Z}} & :\equiv & (3_{\mathbb{N}_0}, 0_{\mathbb{N}_0})_{\mathbb{Z}} & (-3)_{\mathbb{Z}} & :\equiv & (0_{\mathbb{N}_0}, 3_{\mathbb{N}_0})_{\mathbb{Z}} \\
 & \vdots & & & \vdots &
\end{array}$$

Man trifft zunächst keine Entscheidung über die Identität der Zahlensymbole, die folgenden Ausdrücke sind also undefiniert:

$0_{\mathbb{Z}} = ?$, $1_{\mathbb{Z}} = ?$, $2_{\mathbb{Z}} = ?$, ...

Um die folgenden Definitionen der Relationen und Rechenoperatoren anwenden zu können, ist es notwendig, für ganze Zahlen bestimmte Repräsentanten auszuwählen. Da, wie ich stellenweise auch beweisen werde, sich alle Repräsentanten einer ganzen Zahl „gleich verhalten“, kann diese Wahl willkürlich erfolgen; was das konkret bedeutet, wird im nächsten Abschnitt klar werden.

Kleiner-, Kleinergleich-, Größergleich- und Größerrelation

Wie bei der Definition der natürlichen Zahlen in dieser Arbeit kann man auch bei den ganzen Zahlen die Kleiner- ($<$), Größergleich- ($\geq$) und Größerrelation ($>$) auf die Kleinergleichrelation ($\leq$) zurückführen. ([[STondering]], S. 10)

Bei der Realisierung der ganzen Zahlen als Paare natürlicher Zahlrepräsentanten ergibt sich dabei eine sprachliche Unsauberkeit: Da, wie bereits erläutert, die strukturelle Gleichheit keine sinnvolle Äquivalenzrelation auf den ganzen Zahlen darstellt, ist auch die Relation „kleiner oder strukturell gleich“ nicht besonders sinnvoll –

beispielsweise wäre $(3, 5)$ nicht kleinergleich zu $(4, 6)$, obwohl beide Paare (-2) repräsentieren.

Stattdessen meine ich im Folgenden mit der „Kleinergleichrelation" die Relation „kleiner oder äquivalent"; dementsprechend müsste es auch „Kleineräquivalentrelation" heißen. In der Literatur wird dieser Begriff aber nicht genutzt. Ich folge der Konvention und schreibe „Kleinergleichrelation" bzw. „$\leq$". Analoges gilt für die Größergleichrelation.

Zur Herleitung der Kleinergleichrelation kann man analog zur Herleitung der Äquivalenzrelation die Paare als Differenzen begreifen und das bereits bekannte Wissen über Äquivalenzumformungen von Ungleichungen nutzen:

$$\begin{array}{rrcll} & (n, m) & \leq_{\mathbb{Z}} & (\nu, \mu) & \Leftrightarrow \quad \textit{(Umschreiben als Differenzen)} \\ \Leftrightarrow & n - m & \leq_{\mathbb{N}_0} & \nu - \mu & \Leftrightarrow \quad \textit{(Herüberbringen von } m \textit{ und } \mu\textit{)} \\ \Leftrightarrow & n + \mu & \leq_{\mathbb{N}_0} & \nu + m & \end{array}$$

Der Ausdruck der vorherigen Zeile ist für alle $n, m, \nu, \mu \in \mathbb{N}_0$ definiert; man kann also definieren:

Definition der Kleinergleichrelation auf den ganzen Zahlen

$(n, m) \leq_{\mathbb{Z}} (\nu, \mu) :\Leftrightarrow n +_{\mathbb{N}_0} \mu \leq_{\mathbb{N}_0} \nu +_{\mathbb{N}_0} m$

mit $(n, m), (\nu, \mu) \in \mathbb{Z}$.

Beispiel:

$$\begin{array}{rrcll} & 3_{\mathbb{Z}} & \leq_{\mathbb{Z}} & 5_{\mathbb{Z}} & \Leftrightarrow \quad \textit{(Schreiben als Paare natürlicher Zahlre} \\ \Leftrightarrow & (5_{\mathbb{N}_0}, 2_{\mathbb{N}_0}) & \leq_{\mathbb{Z}} & (6_{\mathbb{N}_0}, 1_{\mathbb{N}_0}) & \Leftrightarrow \quad \textit{(Anwenden der Definition der Kleinergle} \\ \Leftrightarrow & 5_{\mathbb{N}_0} + 1_{\mathbb{N}_0} & \leq_{\mathbb{N}_0} & 6_{\mathbb{N}_0} + 2_{\mathbb{N}_0} & \Leftrightarrow \quad \textit{(Ausrechnen der beiden Seiten)} \\ \Leftrightarrow & 6_{\mathbb{N}_0} & \leq_{\mathbb{N}_0} & 8_{\mathbb{N}_0} & \Leftrightarrow \text{(wahr)} \end{array}$$

Um die Kleinergleichrelationsvorschrift anwenden zu können, muss man als ersten Schritt sich für eine bestimmte Repräsentierung der zu vergleichenden Zahlen entscheiden. Im Beispiel wurde für $3_{\mathbb{Z}}$ willkürlich der Repräsentant $(5_{\mathbb{N}_0}, 2_{\mathbb{N}_0})$, und für $5_{\mathbb{Z}}$ der Repräsentant $(6_{\mathbb{N}_0}, 1_{\mathbb{N}_0})$ gewählt; man hätte aber auch beliebige andere Repräsentanten von $3_{\mathbb{Z}}$ bzw. $5_{\mathbb{Z}}$ nehmen können.

Ich verzichte an dieser Stelle auf die Beweise der Reflexivität ($x \leq x$ für alle $x \in \mathbb{Z}$), Antisymmetrie (aus $x \leq y$ und $y \leq x$ folgt $x \equiv y$) und Transitivität (aus $x \leq y$ und $y \leq z$ folgt $x \leq z$). Die Grundidee der Beweise liegt darin, die Gleichungen so umzuformen, dass man auf die Eigenschaften der Kleinergleichrelation der natürlichen Zahlen zurückgreifen kann.

– Rechenoperatoren

Unter der Realisierung der ganzen Zahlen als Paare natürlicher Zahlrepräsentanten lassen sich die Operatoren auf ihnen sehr elegant definieren.

Addition

Zur Herleitung der Additionsvorschrift kann man zwei Repräsentanten ganzer Zahlen, (n, m) und (ν, μ) mit $n, m, \nu, \mu \in \mathbb{N}_0$, betrachten, und dann das bereits bekannte Wissen über äquivalente Termumformungen nutzen:

$$\begin{aligned} & (n-m)+(\nu-\mu) = && \textit{(Weglassen der Plusklammern)} \\ = \;& n-m+\nu-\mu = && \textit{(Gruppieren nach Vorzeichen)} \\ = \;& n+\nu-m-\mu = && \textit{(Ausklammern der negativen Summanden)} \\ = \;& n+\nu-(m+\mu) = && \textit{(Klammern der positiven Summanden)} \\ = \;& (n+\nu)-(m+\mu) \end{aligned}$$

Also erhält man folgende kurze Definition der Addition, die ohne Fallunterscheidungen auskommt:

Definition der Addition auf den ganzen Zahlen
$(n, m) +_{\mathbb{Z}} (\nu, \mu) := (n +_{\mathbb{N}_0} \nu, m +_{\mathbb{N}_0} \mu)$
mit $(n, m), (\nu, \mu) \in \mathbb{Z}$.

Beispiel:

$$\begin{aligned} & (-2)_{\mathbb{Z}} + (-5)_{\mathbb{Z}} \equiv && \textit{(Schreiben als Paare natürlicher Zahlrepräsentanten)} \\ \equiv \;& (2_{\mathbb{N}_0}, 4_{\mathbb{N}_0}) +_{\mathbb{Z}} (9_{\mathbb{N}_0}, 14_{\mathbb{N}_0}) = && \textit{(Anwenden der Additionsvorschrift)} \\ = \;& (2_{\mathbb{N}_0} + 9_{\mathbb{N}_0}, 4_{\mathbb{N}_0} + 14_{\mathbb{N}_0}) = && \textit{(Ausrechnen der Paarkomponenten)} \\ = \;& (11_{\mathbb{N}_0}, 18_{\mathbb{N}_0}) \equiv && \textit{(Schreiben als Dezimalzahl)} \\ \equiv \;& (-7)_{\mathbb{Z}} \end{aligned}$$

Bei der Definition der Zahlensymbole auf S. [[LINK:ZSym]] schrieb ich, jeder der unendlich vielen Repräsentanten einer ganzen Zahl „verhalte“ sich bei den Rechenoperationen gleich. Diese Aussage kann man jetzt, mit definierter Additionsvorschrift, überprüfen, indem man exemplarisch das Beispiel erneut ausrechnet, jetzt aber andere Repräsentationen von (-2) und (-5) wählt:

$$\begin{aligned} & (-2)_{\mathbb{Z}} + (-5)_{\mathbb{Z}} \equiv && \textit{(Schreiben als Paare natürlicher Zahlrepräsentanten)} \\ \equiv \;& (4_{\mathbb{N}_0}, 6_{\mathbb{N}_0}) + (2_{\mathbb{N}_0}, 7_{\mathbb{N}_0}) = && \textit{(Anwenden der Additionsvorschrift)} \\ = \;& (4_{\mathbb{N}_0} + 2_{\mathbb{N}_0}, 6_{\mathbb{N}_0} + 7_{\mathbb{N}_0}) = && \textit{(Ausrechnen der Paarkomponenten)} \\ = \;& (6_{\mathbb{N}_0}, 13_{\mathbb{N}_0}) \equiv && \textit{(Schreiben als Dezimalzahl)} \\ \equiv \;& (-7)_{\mathbb{Z}} \end{aligned}$$

Allgemein (mit $a, b \in \mathbb{N}_0$ beliebig):

$$
\begin{aligned}
& (n+a, m+a) + (\nu+b, \mu+b) = && \textit{(Anwenden der Additionsvorschrift)} \\
= \; & (n+a+\nu+b, m+a+\mu+b) \equiv && \\
\equiv \; & (n+\nu, m+\mu) && \text{da } \textit{(Anwenden der Äquivalenzdefinition)}\text{:}
\end{aligned}
$$

$$(n+a+\nu+b) + (m+\mu) = n+m+\nu+\mu+a+$$
$$= (m+a+\mu+b) + (n+\nu) = n+m+\nu+\mu+a+$$

da die $\mathbb{N}_0$-Addition kommutiert und assoziiert.

Die hier aufgeführte Definition der Addition auf den ganzen Zahlen ist zur verinnerlichten Vorschrift äquivalent. Um diese Tatsache einzusehen, kann man beweisen, dass die bekannten Gesetze, die die Addition betreffen, wie beispielsweise das Kommutativ- oder Assoziativgesetz, auch von der hergeleiteten Additionsvorschrift erfüllt werden.

(Formal reicht reicht das noch nicht aus, um zu beweisen, dass die verinnerlichte Vorschrift wirklich der hier gegebenen entspricht; vielmehr dienen die Beweise nur der Einübung der Additionsvorschrift und zeigen darüberhinaus noch einige interessante Konsequenzen der Nichteindeutigkeit der Zahlrepräsentation.)

- Beweis der Gültigkeit des Kommutativgesetzes $(n, m) + (\nu, \mu) = (\nu, \mu) + (n, m)$:

$$
\begin{aligned}
& (n, m) + (\nu, \mu) = && \textit{(Anwenden der Additionsvorschrift)} \\
= \; & (n+\nu, m+\mu) = && \textit{(Anwenden des } \mathbb{N}_0\textit{-Kommutativgesetzes innerhalb der} \\
= \; & (\nu+n, \mu+m) = && \textit{(Schreiben als Summe zweier ganzer Zahlrepräsentant} \\
= \; & (\nu, \mu) + (n, m) &&
\end{aligned}
$$

- Beweis der Gültigkeit des Assoziativgesetzes $[(n_1, m_1) + (n_2, m_2)] + (n_3, m_3) = (n_1, m_1) + [(n_2, m_2) + (n_3, m_3)]$:

$$
\begin{aligned}
& [(n_1, m_1) + (n_2, m_2)] + (n_3, m_3) = && \textit{(Anwenden der Additionsvorschrift)} \\
= \; & (n_1+n_2, m_1+m_2) + (n_3, m_3) = && \textit{(Erneutes Anwenden der Additionsvor} \\
= \; & ((n_1+n_2)+n_3, (m_1+m_2)+m_3) = && \textit{(Anwenden des Assoziativgesetzes der} \\
= \; & (n_1+(n_2+n_3), m_1+(m_2+m_3)) = && \textit{(Schreiben als Summe)} \\
= \; & (n_1, m_1) + (n_2+n_3, m_2+m_3) = && \textit{(Schreiben des zweiten Summanden a} \\
= \; & (n_1, m_1) + [(n_2, m_2) + (n_3, m_3)] &&
\end{aligned}
$$

- Überprüfung der Neutralität von Null, $(n, m) + 0_{\mathbb{Z}} = (n, m)$:

$$
\begin{array}{rll}
 & (n,m) + 0_{\mathbb{Z}} \equiv & \textit{(Schreiben von } 0_{\mathbb{Z}} \textit{ als Paar)} \\
\equiv & (n,m) + (a,a) = & \textit{(}a \in \mathbb{N}_0 \textit{ beliebig)} \\
 & & \textit{(Anwenden der Additionsvorschrift)} \\
= & (n+a, m+a) \equiv & \\
\equiv & (n,m) & \text{da } (n+a)+m = (m+a)+n
\end{array}
$$

Die Neutralität von Null gilt also nur in abgeschwächter Form, nämlich hinsichtlich der Äquivalenz ($\equiv$), nicht aber hinsichtlich der strukturellen Gleichheit ($=$).

Streng genommen ist sogar die Formulierung des Neutralitätsgesetzes, wie hier von mir verwendet, an dieser Stelle formal ohne Sinn, da $0_{\mathbb{Z}}$ über die strukturelle Gleichheit ($=$) in Beziehung gesetzt wird, obwohl ich die Identität von $0_{\mathbb{Z}}$ noch nicht definiert habe – bei der Definition der Zahlensymbole für die ganzen Zahlen auf S. [[LINK:ZSym]] habe ich lediglich definiert, dass $0_{\mathbb{Z}}$ äquivalent zu $(0,0)$ ist, aber keine Aussage über die Identität von $0_{\mathbb{Z}}$ getroffen.

Auch gibt es nicht nur ein neutrales Element, sondern unendlich viele: $0_{\mathbb{Z}} \equiv (0_{\mathbb{N}_0}, 0_{\mathbb{N}_0}) \equiv (1_{\mathbb{N}_0}, 1_{\mathbb{N}_0}) \equiv (2_{\mathbb{N}_0}, 2_{\mathbb{N}_0}) \equiv (3_{\mathbb{N}_0}, 3_{\mathbb{N}_0}) \equiv \ldots$

Ab S. [[LINK:ZRep]] werden zwei Verfahren vorgestellt, mit denen man die Zahlrepräsentation eindeutig machen kann. Damit wird auch die Neutralität von Null hinsichtlich der strukturellen Gleichheit wiederhergestellt und auch wird es nur noch ein einziges neutrales Element geben.

- Der Beweis, dass z das inverse Element zu $-z$ ist, kann man erst später erbringen, da die Negation an dieser Stelle noch nicht definiert ist. Der Beweis folgt auf S. [[LINK:ZNeg]].

Die Idee hinter der Definition der Addition kann man erkennen, wenn man die Bedeutung der Komponenten der Paare, die die ganzen Zahlen repräsentieren, betrachtet: Ein Paar (n,m) gibt an, dass man von Null beginnend n Mal vorwärts, und dann vom Ergebnis des Vorwärtszählens m mal rückwärts zählt.

Das Ergebnis der Addition von (n,m) und (ν,μ), also $(n,m)+(\nu,\mu) = (n+\nu, m+\mu)$, fasst also die Vorwärtszähl- und die Rückwärtszählkomponenten der beiden Summanden zusammen; das Ergebnis der Addition ist die Zahl, die man erhält, wenn man von Null ausgehend zuerst n Mal vorwärts zählt, dann weitere ν Male vorwärts zählt, und dann zunächst m Mal, dann μ Mal rückwärts zählt.

Ingesamt zählt man also, von Null beginnend, $n + \nu$ Mal vorwärts, und von dem Ergebnis des Vorwärtszählens ausgehend $m + \mu$ Mal rückwärts.

Subtraktion

Um die Subtraktionsvorschrift über den ganzen Zahlen herzuleiten, kann man das bereits bekannte Wissen über äquivalente Termumformungen nutzen oder den Weg über die Negation gehen.

- **Herleitung mittels äquivalenter Termumformungen**

  Man betrachtet zwei Repräsentanten ganzer Zahlen, (n, m) und (ν, μ) mit $n, m, \nu, \mu \in \mathbb{N}_0$, und nutzt das Wissen über äquivalente Termumformungen:

  $$\begin{aligned} & (n - m) - (\nu - \mu) = && \textit{(Weglassen der Plusklammer, Ausmultiplizieren der} \\ = \;& n - m - \nu + \mu = && \textit{(Gruppieren nach Vorzeichen)} \\ = \;& n + \mu - m - \nu = && \textit{(Ausklammern von Summanden gleicher Vorzeichen} \\ = \;& (n + \mu) - (m + \nu) \end{aligned}$$

  Man erhält also folgende kurze Definition der Subtraktion auf den ganzen Zahlen, die wie die hergeleitete Definition der Addition ohne Fallunterscheidungen auskommt:

  $(n, m) - (\nu, \mu) := (n + \mu, m + \nu)$

- **Herleitung mittels Negation**

  Alternativ kann man die Subtraktionsvorschrift auch unter Ausnutzung der bekannten Regel $a - b = a + (-b)$ herleiten, also unter Rückgriff auf die Negation. Dazu muss man freilich zunächst die Negationsvorschrift herleiten, beispielsweise über das Wissen über äquivalente Termumformungen:

  $$\begin{aligned} & -(n - m) = && \textit{(Ausmultiplizieren der Minusklammer)} \\ = \;& -n - (-m) = && \textit{(Ausnutzen des Zusammenhangs von Subtraktion und N} \\ = \;& -n + m = && \textit{(Umdrehen der Summationsreihenfolge)} \\ = \;& m + (-n) = && \textit{(Schreiben als Differenz)} \\ = \;& m - n \end{aligned}$$

  Also: $-(n, m) := (m, n)$

  Mit hergeleiteter Negationsvorschrift kann man jetzt auch Beweisen, dass $-z = (m, n)$ das bezüglich der Addition inverse Element zu $z = (n, m)$:

$$\begin{aligned} & z + (-z) = && \textit{(Schreiben als Paare natürlicher Zahlrepräsentanten)} \\ = \;& (n, m) + [-(n, m)] = && \textit{(Anwenden der Negationsvorschrift)} \\ = \;& (n, m) + (m, n) = && \textit{(Anwenden der Additionsvorschrift)} \\ = \;& (n + m, m + n) \equiv && \\ \equiv \;& (0, 0) \equiv 0_{\mathbb{Z}} && \text{da } (n + m) + 0 = 0 + (m + n) \end{aligned}$$

An der Verwendung des $\equiv$-Zeichens kann man erkennen, dass es nicht nur ein inverses Element gibt, sondern unendlich viele. Das steht im Einklang mit meiner Behauptung, alle Repräsentanten einer Zahl „verhalten“ sich gleich.

Mit bekannter Negationsvorschrift kann man nun die Subtraktionsvorschrift herleiten:

$$\begin{aligned} & (n, m) - (\nu, \mu) = && \textit{(Schreiben als Summe)} \\ = \;& (n, m) + [-(\nu, \mu)] = && \textit{(Anwenden der Negationsvorschrift)} \\ = \;& (n, m) + (\mu, \nu) = && \textit{(Anwenden der Additionsvorschrift)} \\ = \;& (n + \mu, m + \nu) && \end{aligned}$$

Beide Wege führen also zur gleichen Subtraktionsvorschrift. Das ist auch nicht weiter verwunderlich, da man beim ersten Herleitungsweg, der Herleitung mittels äquivalenter Termumformungen, implizit auch die Negation nutzte.

Definition der Subtraktion auf den ganzen Zahlen
$(n, m) -_{\mathbb{Z}} (\nu, \mu) := (n +_{\mathbb{N}_0} \mu, m +_{\mathbb{N}_0} \nu)$
mit $(n, m), (\nu, \mu) \in \mathbb{Z}$.

Beispiel:

$$\begin{aligned} & (-2)_{\mathbb{Z}} - (-5)_{\mathbb{Z}} \equiv && \textit{(Schreiben als Paare natürlicher Zahlrepräsentanten)} \\ \equiv \;& (2_{\mathbb{N}_0}, 4_{\mathbb{N}_0}) - (9_{\mathbb{N}_0}, 14_{\mathbb{N}_0}) = && \textit{(Anwenden der Subtraktionsvorschrift)} \\ = \;& (2_{\mathbb{N}_0} + 14_{\mathbb{N}_0}, 4_{\mathbb{N}_0} + 9_{\mathbb{N}_0}) = && \textit{(Ausrechnen der Paarkomponenten)} \\ = \;& (16_{\mathbb{N}_0}, 13_{\mathbb{N}_0}) \equiv && \textit{(Schreiben als Dezimalzahl)} \\ \equiv \;& 3_{\mathbb{Z}} && \end{aligned}$$

Die hergeleitete Subtraktionsvorschrift ist, wie sie es auch sollte, antikommutativ; es gilt also nicht $x - y = y - x$ (für allgemeines $x, y \in \mathbb{Z}$), sondern $x - y = -(y - x)$:

$$\begin{array}{lll} & -(y-x)= & \textit{(Schreiben von } x \textit{ und } y \textit{ als Paare)} \\ = & -[(\nu,\mu)-(n,m)]= & \textit{(Anwenden der Subtraktionsvorschrift)} \\ = & -(\nu+m,\mu+n)= & \textit{(Anwenden der Negationsvorschrift)} \\ = & (\mu+n,\nu+m)= & \textit{(Vertauschen der Summanden)} \\ = & (n+\mu,m+\nu)= & \textit{(Rückwärtiges Anwenden der Subtraktionsvorschrift)} \\ = & (n,m)-(\nu,\mu)= & \textit{(Schreiben der Paare als } x \textit{ und } y\textit{)} \\ = & x-y & \end{array}$$

In die Subtraktionsvorschrift kann man die Idee hineininterpretieren, dass die Bedeutung der Paarkomponenten des Subtrahenden vertauscht wird: Während das Paar (ν, μ) in der Addition $(n, m) + (\nu, \mu)$ bedeutet, dass man ν Mal vorwärts und μ Mal rückwärts zählt, bedeutet es bei der Subtraktion $(n, m) - (\nu, \mu)$ dagegen, dass man μ Mal vorwärts und ν Mal rückwärts zählt.

Besonders deutlich wird das an einem Zahlenbeispiel, bei dem man als zweite Paarkomponente des Subtrahenden $0_{\mathbb{N}}$ wählt:

$$\begin{array}{lll} & (-1)_{\mathbb{Z}}-6_{\mathbb{Z}}\equiv & \textit{(Schreiben als Paare)} \\ \equiv & (2_{\mathbb{N}_0},3_{\mathbb{N}_0})-(6_{\mathbb{N}_0},0_{\mathbb{N}_0})= & \textit{(Anwenden der Subtraktionsvorschrift)} \\ = & (2+0,3+6)= & \textit{(Ausrechnen der Paarkomponenten)} \\ = & (2_{\mathbb{N}_0},9_{\mathbb{N}_0})\equiv(-7)_{\mathbb{Z}} & \end{array}$$

Man erkennt, dass $6_{\mathbb{N}_0}$, das im Subtrahenden die erste Paarkomponente ist und somit angibt, wie oft man vorwärts zählt, nach Anwenden der Subtraktionsvorschrift an zweiter Stelle im Paar $(2 + 0, 3 + 6)$ steht und somit angibt, wie oft man rückwärts zählt.

Multiplikation

Zur Herleitung der Multiplikationsvorschrift kann man zwei Repräsentanten ganzer Zahlen, (n, m) und (ν, μ), mit $n, m, \nu, \mu \in \mathbb{N}_0$ betrachten und dann das Wissen über äquivalente Termumformungen nutzen:

$$\begin{array}{lll} & (n-m)\cdot(\nu-\mu)= & \textit{(Ausmultiplizieren)} \\ = & n\nu-n\mu-m\nu+m\mu= & \textit{(Gruppieren nach Vorzeichen)} \\ = & n\nu+m\mu-n\mu-m\nu= & \textit{(Ausklammern nach Vorzeichen)} \\ = & (n\nu+m\mu)-(n\mu+m\nu) & \end{array}$$

Man erhält also folgende kurze Definition der Multiplikation auf den ganzen Zahlen:

Definition der Multiplikation auf den ganzen Zahlen

$(n, m) \cdot_{\mathbb{Z}} (\nu, \mu) := (n\nu +_{\mathbb{N}_0} m\mu, n\mu +_{\mathbb{N}_0} m\nu)$

mit $(n, m), (\nu, \mu) \in \mathbb{Z}$.

Diese Definition ist, wie auch die Definitionen der Addition und Subtraktion, ohne Fallunterscheidungen.

Beispiel:

$$\begin{aligned}
& (-2)_{\mathbb{Z}} \cdot (-5)_{\mathbb{Z}} \equiv && \textit{(Schreiben als Paare natürlicher} \\
\equiv\; & (2_{\mathbb{N}_0}, 4_{\mathbb{N}_0}) \cdot (9_{\mathbb{N}_0}, 14_{\mathbb{N}_0}) = && \textit{(Anwenden der Multiplikationsvo} \\
=\; & (2_{\mathbb{N}_0} \cdot 9_{\mathbb{N}_0} + 4_{\mathbb{N}_0} \cdot 14_{\mathbb{N}_0}, 2_{\mathbb{N}_0} \cdot 14_{\mathbb{N}_0} + 4_{\mathbb{N}_0} \cdot 9_{\mathbb{N}_0}) = && \textit{(Ausrechnen der Summanden)} \\
=\; & (18_{\mathbb{N}_0} + 56_{\mathbb{N}_0}, 28_{\mathbb{N}_0} + 36_{\mathbb{N}_0}) = && \textit{(Ausrechnen der Paarkomponent} \\
=\; & (74_{\mathbb{N}_0}, 64_{\mathbb{N}_0}) \equiv && \textit{(Schreiben als Dezimalzahl)} \\
\equiv\; & 10_{\mathbb{Z}}
\end{aligned}$$

Um die Kommutativität und Assoziativität der hier definierten Ganzzahlmultiplikation zu beweisen, kann man xy und yx bzw. $x(yz)$ und $(xy)z$ nach der hergeleiteten Multiplikationsvorschrift ausrechnen und die Ergebnisse miteinander vergleichen, ähnlich wie beim Beweis der Antikommutativität der Ganzzahlsubtraktion (erbracht auf S. [[LINK:ZSubAnti]]).

Die Beweise bringen aber für den weiteren Verlauf dieser Arbeit keinen Erkenntnisgewinn, weswegen ich sie hier nicht ausführe.

Die Definition spiegelt die bekannten Regeln „minus mal minus ist plus“ und „minus mal plus ist minus“ wieder: Das Produkt aus (n, m) und (ν, μ), $(n\nu + m\mu, n\mu + m\nu)$, enthält als Vorwärtszählkomponente $n\nu + m\nu$ und als Rückwärtszählkomponente $n\mu + m\nu$.

n und ν sind die Vorwärtszählkomponenten der beiden Faktoren und wiegen im Produkt somit positiv („plus mal plus ergibt plus“), weshalb das Produkt $n\nu$ auch in der Vorwärtszählkomponente des Produkts vorkommt. m und ν sind die Rückwärtszählkomponenten der beiden Faktoren; nach „minus mal minus ergibt plus“ kommen sie ebenfalls in der Vorwärtszählkomponente des Produkts vor.

Die beiden Summanden der Rückwärtszählkomponente des Produkts sind die Produkte jeweils entgegengesetzter Paarkomponenten – „plus mal minus ergibt minus“, „minus mal plus ergibt minus“.

Größerwerden der Paarkomponenten

Da die Definitionen der Addition, Subtraktion und der Multiplikation der ganzen Zahlen auf die $\mathbb{N}_0$-Addition und -Multiplikation, nicht aber auf die $\mathbb{N}_0$-Subtraktion zurückgreifen, wachsen mit jeder Rechenoperation die Paarkomponenten monoton.

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
& 3_{\mathbb{Z}} \equiv && \textit{(Addieren eines Nullterms)}\\
\equiv\ & 3_{\mathbb{Z}} + \overbrace{3_{\mathbb{Z}} - 2_{\mathbb{Z}} - 1_{\mathbb{Z}}}^{\equiv 0_{\mathbb{Z}}} \equiv && \textit{(Schreiben als Paare natürlicher Zahlrepräsent}\\
\equiv\ & (3,0) + (3,0) - (2,0) - (1,0) = && \textit{(Anwenden der Additionsvorschrift)}\\
=\ & (6,0) - (2,0) - (1,0) = && \textit{(Anwenden der Subtraktionsvorschrift)}\\
=\ & (6,2) - (1,0) = && \textit{(Erneutes Anwenden der Subtraktionsvorschrif}\\
=\ & (6,3) \equiv && \textit{(Schreiben als Dezimalzahl)}\\
\equiv\ & 3_{\mathbb{Z}}
\end{aligned}
$$

Die Addition eines Nullterms ändert also, wie auch gewünscht, den Zahlenwert hinsichtlich der Äquivalenz nicht, $(3,0) \equiv (6,3)$; die Paarkomponenten wurden im Verlauf der Rechnung jedoch mit jedem Schritt größer.

Abgesehen davon, dass für bestimmte Einsatzzwecke das ständige Anwachsen der Paarkomponenten unhandlich ist – beispielsweise für eine Computerimplementierung –, stört das von einem rein mathematischen Standpunkt aus gesehen nicht.

Hat der persönliche Geschmack trotzdem kleine Paarkomponenten lieber, so kann man „kürzen", indem man von beiden Paarkomponenten eine beliebige natürliche Zahl subtrahiert (genauer: ein natürlicher Zahlrepräsentant, für den die Subtraktion auf den natürlichen Zahlen noch definiert ist).

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
& 3_{\mathbb{Z}} \equiv (6_{\mathbb{N}_0}, 3_{\mathbb{N}_0}) \equiv && \textit{(Abziehen von } 2 \textit{ von den Paarkomponenten)}\\
\equiv\ & (4_{\mathbb{N}_0}, 1_{\mathbb{N}_0}) \equiv 3_{\mathbb{Z}} && \text{da } \underbrace{6 +_{\mathbb{N}_0} 1}_{7} = \underbrace{4 +_{\mathbb{N}_0} 3}_{}
\end{aligned}
$$

„Vollständig gekürzt" ist ein Repräsentant dann, wenn eine seiner beiden Paarkomponenten Null ist; beispielsweise ist der „vollständig gekürzte" Repräsentant von $3_{\mathbb{Z}}$ $(3_{\mathbb{N}_0}, 0_{\mathbb{N}_0})$.

Beweis der Gültigkeit der Umformungsregel $(-x)\,(-y) = xy$

Bei der Vorstellung der rationalen Zahlen werde ich später die bekannte Vereinfachungsregel $(-x)\,(-y) = xy$ nutzen. Die Gültigkeit dieser Umformung werde ich hier beweisen:

$$\begin{aligned}
& (-x)\,(-y) = && \textit{(Schreiben als Paare)} \\
= \; & [-(n,m)]\,[-(\nu,\mu)] = && \textit{(Anwenden der Negationsvorschrift)} \\
= \; & (m,n)\cdot(\mu,\nu) = && \textit{(Anwenden der Multiplikationsvorschrift)} \\
= \; & (m\mu + n\nu, m\nu + n\mu) = && \textit{(Vertauschen der Summanden nach dem Kommutativg} \\
= \; & (n\nu + m\mu, n\mu + m\nu) = && \textit{(Schreiben als Produkt durch rückwärtiges Anwenden} \\
= \; & (n,m)\cdot(\nu,\mu) = && \textit{(Schreiben als „}x\textit{“ und „}y\textit{“)} \\
= \; & xy
\end{aligned}$$

Division

In diesem Abschnitt wird eine Definition der Division auf den ganzen Zahlen hergeleitet. Das erfolgt in großen Teilen analog zur Herleitung der Divisionsvorschrift auf den natürlichen Zahlen (S. [[LINK:NDivision]]), führt jedoch noch auf zwei Probleme, die die $\mathbb{N}_0$-Division nicht hat.

Zur Herleitung der Definition der Division auf den ganzen Zahlen kann man ähnlich vorgehen wie bei der Herleitung der Division auf den natürlichen Zahlen: Man betrachtet zwei Repräsentanten ganzer Zahlen, x und χ mit $x, \chi \in \mathbb{Z}$ und $\chi \not\equiv 0$, und setzt dann den Bruch $\frac{x}{\chi}$ an. Dann versucht man den Bruch so in zwei Teile aufzuspalten, dass der eine Teil 1 ist und der andere Teil rekursiv in weiteren Schritten berechnet werden kann.

Als Grundfall kann man den Fall nehmen, bei dem der Dividend Null ist: $0_\mathbb{Z} : \chi := 0_\mathbb{Z}$ für $\chi \not\equiv 0$.

Für den anderen Fall – der Dividend ist nicht Null – kann man sich des Wissens über äquivalente Termumformungen bedienen und erhält so eine provisorische Divisionsvorschrift:

$$\begin{aligned}
& \frac{x}{\chi} = && \textit{(Hinzufügen und Abziehen von } \chi \textit{ im Zähler)} \\
= \; & \frac{x + \chi - \chi}{\chi} = && \textit{(Stellen von } (+\chi) \textit{ an den Beginn)} \\
= \; & \frac{\chi + x - \chi}{\chi} = && \textit{(Aufspalten des Bruchs nach dem ersten Summanden)} \\
= \; & \frac{\chi}{\chi} + \frac{x - \chi}{\chi} = && \textit{(Vereinfachen des ersten Bruchs)} \\
= \; & 1 + \frac{x - \chi}{\chi}
\end{aligned}$$

Die Idee hinter der provisorische Definition $x : \chi = 1 + (x - \chi) : \chi$ illustriert ein Zahlenbeispiel:

$\ 12_{\mathbb{Z}} : 4_{\mathbb{Z}} \equiv$ *(Anwenden der provisorischen Divisionsvorsch*
$\equiv\ 1_{\mathbb{Z}} + (12_{\mathbb{Z}} - 4_{\mathbb{Z}}) : 4_{\mathbb{Z}} \equiv$ *(Ausrechnen des Dividenden)*
$\equiv\ 1_{\mathbb{Z}} + 8_{\mathbb{Z}} : 4_{\mathbb{Z}} \equiv$ *(Erneutes Anwenden der provisorischen Divisi*
$\equiv\ 1_{\mathbb{Z}} + 1_{\mathbb{Z}} + (8_{\mathbb{Z}} - 4_{\mathbb{Z}}) : 4_{\mathbb{Z}} \equiv$ *(Ausrechnen des Dividenden)*
$\equiv\ 1_{\mathbb{Z}} + 1_{\mathbb{Z}} + 4_{\mathbb{Z}} : 4_{\mathbb{Z}} \equiv$ *(Erneutes Anwenden der provisorischen Divisi*
$\equiv\ 1_{\mathbb{Z}} + 1_{\mathbb{Z}} + 1_{\mathbb{Z}} + (4_{\mathbb{Z}} - 4_{\mathbb{Z}}) : 4_{\mathbb{Z}} \equiv$ *(Ausrechnen des Dividenden)*
$\equiv\ 1_{\mathbb{Z}} + 1_{\mathbb{Z}} + 1_{\mathbb{Z}} + 0_{\mathbb{Z}} : 4_{\mathbb{Z}} \equiv$ *(Erneutes Anwenden der provisorischen Divisi*
$\equiv\ 1_{\mathbb{Z}} + 1_{\mathbb{Z}} + 1_{\mathbb{Z}} + 0_{\mathbb{Z}} \equiv$ *(Ausrechnen der Summe)*
$\equiv\ 3_{\mathbb{Z}}$

Die Idee hinter dieser provisorischen Divisionsvorschrift ist also, dass man den Bruch so lange kleiner macht, bis er Null wird, und bei jedem Schritt des Kleinermachens eine Eins anhäuft.

Die in der Herleitung benutzten Termumformungen sind zwar korrekt, die provisorische Divisionsvorschrift ist aber trotzdem noch nicht vollständig, da sie, wenn entweder der Dividend oder der Divisor (aber nicht beide) negativ ist, nicht terminiert, wie folgendes Zahlenbeispiel exemplarisch zeigt:

$\ (-12) : 4 \equiv$ *(Anwenden der provisorischen Divisionsvorschrift*
$\equiv\ 1 + [(-12) - 4] : 4 \equiv$ *(Ausrechnen des Dividenden)*
$\equiv\ 1 + (-16) : 4 \equiv$ *(Erneutes Anwenden der provisorischen Divisions*
$\equiv\ 1 + 1 + [(-16) - 4] : 4 \equiv$ *(Ausrechnen des Dividenden)*
$\equiv\ 1 + 1 + (-20) : 4 \equiv$ *(Erneutes Anwenden der provisorischen Divisions*
$\equiv\ 1 + 1 + 1 + [(-20) - 4] : 4 \equiv$ *(Ausrechnen des Dividenden)*
$\equiv\ 1 + 1 + 1 + (-24) : 4 \equiv$
$\equiv\ \cdots$

Die Zahl der bei jedem Schritt hinzugefügten Einser wächst also über alle Grenzen; entsprechend wird der Zähler des jeweils übrig bleibenden Bruchs ohne Beschränkung kleiner.

Für den Fall, dass entweder Zähler oder Nenner negativ ist, also für $x\chi < 0$, darf man also nicht versuchen, den Bruch immer kleiner zu machen und dabei Einser anzuhäufen, sondern man muss den Bruch immer größer machen und dabei (-1)-er anhäufen. In Symbolen:

$$\begin{aligned}
& \frac{x}{\chi} = && \textit{(Hinzufügen und Abziehen von } \chi \textit{ im Zähler)} \\
= \; & \frac{x + \chi - \chi}{\chi} = && \textit{(Stellen von } (-\chi) \textit{ an den Beginn)} \\
= \; & \frac{(-\chi) + x + \chi}{\chi} = && \textit{(Aufspalten des Bruchs nach dem ersten Summanden)} \\
= \; & \frac{-\chi}{\chi} + \frac{x + \chi}{\chi} = && \textit{(Vereinfachen des ersten Summanden)} \\
= \; & -1 + \frac{x + \chi}{\chi}
\end{aligned}$$

Beispiel:

$$\begin{aligned}
& (-12) : 4 \equiv && \textit{(Anwenden der neuen Divisionsvorschrift} \\
\equiv \; & (-1) + [(-12) + 4] : 4 \equiv && \textit{(Ausrechnen des Dividenden)} \\
\equiv \; & (-1) + (-8) : 4 \equiv && \textit{(Erneutes Anwenden der neuen Divisions} \\
\equiv \; & (-1) + (-1) + [(-8) + 4] : 4 \equiv && \textit{(Ausrechnen des Dividenden)} \\
\equiv \; & (-1) + (-1) + (-4) : 4 \equiv && \textit{(Erneutes Anwenden der neuen Divisions} \\
\equiv \; & (-1) + (-1) + (-1) + [(-4) + 4] : 4 \equiv && \textit{(Ausrechnen des Dividenden)} \\
\equiv \; & (-1) + (-1) + (-1) + 0 : 4 \equiv && \textit{(Erneutes Anwenden der provisorischen I} \\
\equiv \; & (-1) + (-1) + (-1) + 0 \equiv && \textit{(Ausrechnen der Summe)} \\
\equiv \; & -3
\end{aligned}$$

Die beiden Teildefinitionen für $x\chi > 0$ und $x\chi < 0$ kann man zur vollständigen Definition der Division der ganzen Zahlen zusammenfassen:

Definition der Division auf den ganzen Zahlen

$$x :_{\mathbb{Z}} \chi :\equiv \begin{cases} \text{undefiniert} & \text{für } \chi \equiv 0 \\ 0 & \text{für } x \equiv 0 \text{ und } \chi \not\equiv 0 \\ 1 + (x - \chi) :_{\mathbb{Z}} \chi & \text{für } x\chi > 0 \\ (-1) + (x + \chi) :_{\mathbb{Z}} \chi & \text{für } x\chi < 0 \end{cases}$$

mit $x, \chi \in \mathbb{Z}$.

Interessanterweise stimmt diese Definition der Division auf den ganzen Zahlen mit der Definition der Division auf den natürlichen Zahlen dieser Arbeit (S. [[LINK:NDiv]]) bis auf Typunterschiede ($\mathbb{Z}$ statt $\mathbb{N}_0$) und die Regel für den Fall $x\chi < 0$ (ein Fall, der bei den natürlichen Zahlen nicht auftreten kann) überein!

Anders als die Definitionen der Addition, Subtraktion und Multiplikation greift diese Definition der Division weder auf die Paarkomponenten von x und χ, noch auf die Rechenoperationen der natürlichen Zahlen zurück. Eine Konsequenz daraus ist, dass sie auch nicht die Identität von $x : \chi$ definiert, sondern lediglich eine Äquivalenzbeziehung angibt, vergleichbar mit der Definition der Zahlensymbole ganzer Zahlen auf S. [[LINK:ZSym]].

Stattdessen beschreibt die Definition einen rekursiven Algorithmus; man muss daher noch überprüfen, ob die Definition in allen Fällen, also unabhängig von Dividend und Divisor, als Arbeitsvorschrift einsetzbar ist. Dazu muss nach einer endlichen Anzahl von wiederholten Anwendungen der Vorschrift der Fall $x \equiv 0$ auftreten, wodurch die Rekursion gebrochen wird.

Wenn der Divisor ein Teiler des Dividenden ist, tritt – wie bei der Divisionsvorschrift der natürlichen Zahlen – nach endlich vielen Schritten ein Fall auf, bei dem der Dividend Null ist und so die Rekursion gebrochen wird. Bei den natürlichen Zahlen nähert man sich dabei dem Null-Dividenden nur aus dem Positiven an; bei der Ganzzahldivision gibt es aber auch die Möglichkeit, dass der Dividend oder der Divisor negativ ist, was erfordert, dass man sich aus dem Negativen annähern muss.

Ist jedoch der Divisor nicht Teiler des Dividenden, so tritt bei der Ganzzahldivision ein Problem auf, dass es bei der Division auf den natürlichen Zahlen nicht gibt, was folgendes Zahlenbeispiel exemplarisch zeigt:

$$\begin{aligned}
& 4 : 3 \equiv && \textit{(Anwenden der Divisionsvorschrift)} \\
\equiv\ & 1 + (4 - 3) : 3 \equiv && \textit{(Ausrechnen des Dividenden)} \\
\equiv\ & 1 + 1 : 3 \equiv && \textit{(Anwenden der Divisionsvorschrift)} \\
\equiv\ & 1 + 1 + (1 - 3) : 3 \equiv && \textit{(Ausrechnen des Dividenden)} \\
\equiv\ & 1 + 1 + (-2) : 3 \equiv && \textit{(Anwenden der Divisionsvorschrift)} \\
\equiv\ & 1 + 1 + (-1) + [(-2) + 3] : 3 \equiv && \textit{(Ausrechnen des Dividenden)} \\
\equiv\ & 1 + 1 + (-1) + 1 : 3 \equiv && \text{Wiederauftreten der Division } 1 : 3 \\
\equiv\ & \cdots
\end{aligned}$$

Der Fall, bei dem der Dividend Null ist, wird also „verfehlt“. Bei der $\mathbb{N}_0$-Division ist das kein Problem, da dort eine Subtraktion wie $1 - 3$, deren Ergebnis als Dividend dienen würde, nicht definiert ist und somit das Verfahren abgebrochen wird. Bei den ganzen Zahlen ist aber $1 - 3$ definiert, was dazu führt, dass beim weiteren Anwenden der Divisionsvorschrift niemals ein Fall auftritt, bei dem der Dividend Null ist; stattdessen wechselt der Dividend bei jedem weiteren Schritt sein Vorzeichen.

Ist der Divisor also kein Teiler des Dividenden, so ist die hergeleitete Divisionsvorschrift nicht als Arbeitsvorschrift einsetzbar. Da dieses Problem nur Fälle betrifft, bei denen die Ganzzahldivision sowieso nicht anwendbar ist, spielt es in der Praxis keine große Rolle. Möchte man trotzdem die Definition mathematisch einwandfrei formulieren, so muss man sie um eine weitere Fallunterscheidung ergänzen:

$$x :_{\mathbb{Z}} \chi :\equiv \begin{cases} \text{undefiniert} & \text{für } \chi \equiv 0 \\ \text{undefiniert} & \text{für } |x| < |\chi| \\ 0 & \text{für } x \equiv 0 \text{ und } \chi \not\equiv 0 \\ 1 + (x - \chi) :_{\mathbb{Z}} \chi & \text{für } x\chi > 0 \\ (-1) + (x + \chi) :_{\mathbb{Z}} \chi & \text{für } x\chi < 0 \end{cases}$$

mit $x, \chi \in \mathbb{Z}$ und $|z| = \begin{cases} z & \text{für } z \geq 0 \\ -z & \text{für } z < 0 \end{cases}$

– Eindeutigkeit der Repräsentation

Das Problem der fehlenden Eindeutigkeit der Zahlrepräsentation ist schon mehrmals angeklungen. Für sich genommen ist die fehlende Eindeutigkeit kein Problem, sondern zunächst nur eine Tatsache.

Betrachtet man aber die Konsequenzen, die sich aus der fehlenden Repräsentationseindeutigkeit ergeben, wird klar, wieso man sich eine eindeutige Repräsentation wünscht: Anstatt einfach auf die strukturelle Gleichheit zurückgreifen zu können, muss man eine Äquivalenzrelation definieren, um so von „Gleichheit“ sprechen zu können, wie man es gewohnt ist.

Ein Zahlenbeispiel demonstriert die Unzulänglichkeit der strukturellen Gleichheit:

$$\left.\begin{array}{l} 2_{\mathbb{Z}} + 2_{\mathbb{Z}} \equiv (3_{\mathbb{N}_0}, 1_{\mathbb{N}_0}) + (3_{\mathbb{N}_0}, 1_{\mathbb{N}_0}) = (6_{\mathbb{N}_0}, 2_{\mathbb{N}_0}) \equiv 4_{\mathbb{Z}} \\ 2_{\mathbb{Z}} \cdot 2_{\mathbb{Z}} \equiv (3_{\mathbb{N}_0}, 1_{\mathbb{N}_0}) \cdot (3_{\mathbb{N}_0}, 1_{\mathbb{N}_0}) = (9_{\mathbb{N}_0} + 1_{\mathbb{N}_0}, 3_{\mathbb{N}_0} + 3_{\mathbb{N}_0}) = (10_{\mathbb{N}_0}, 6_{\mathbb{N}_0}) \equiv 4_{\mathbb{Z}} \end{array}\right\} \begin{array}{l} (6_{\mathbb{N}_0}, 2_{\mathbb{N}_0}) \neq (10 \\ \text{lediglich: } (6_{\mathbb{N}_0}, \end{array}$$

Außerdem ist nicht klar, welches Element aus $\mathbb{Z}$ man nun betrachtet, wenn man beispielsweise von $3_{\mathbb{Z}}$ spricht: Meint man $(3_{\mathbb{N}_0}, 0_{\mathbb{N}_0})$, $(4_{\mathbb{N}_0}, 1_{\mathbb{N}_0})$ oder einen andere der unendlich vielen Repräsentanten $(3_{\mathbb{N}_0} + a, 0_{\mathbb{N}_0} + a)$ (mit $a \in \mathbb{N}_0$ beliebig)?

Aus diesem Grund entschied ich mich bei der Definition der Zahlensymbole der ganzen Zahlen, die Identität der Symbole ungeklärt zu lassen (bspw. $3_{\mathbb{Z}} := ?$) und nur Äquivalenzen ($3_{\mathbb{Z}} :\equiv (3, 0)$) zu erklären.

Ein weiterer Nachteil der fehlenden Repräsentationseindeutigkeit ist, dass man – anders als beispielsweise bei der Definition von $\mathbb{Z}$ als $\mathbb{Z} := (\mathbb{N}^+ \times \{+,-\}) \cup \{0\}$, die ich wegen ihrer Unhandlichkeit verworfen hatte – eine ganze Zahl nicht mit einem Element aus $\mathbb{Z}$ identifizieren kann: Welches Element der unendlich vielen denkbaren Elementen, die alle zueinander äquivalent sind, sollte man nehmen?

Es gibt nun zwei klassische Wege, um von der Menge der nichteindeutigen Repräsentanten der ganzen Zahlen, $\mathbb{Z}$, zu einer Menge von eindeutigen Repräsentanten $\mathbb{Z}^*$ zu kommen. Dabei muss man die Definitionen der Rechenoperatoren und Relationen nicht erneut herleiten, sondern kann sie mit kleinen Anpassungen übernehmen.

Ohne weitere Angaben meine ich auch im Folgenden mit „Repräsentanten ganzer Zahlen“ immer Elemente aus $\mathbb{Z}$, nicht aus $\mathbb{Z}^*$.

Eindeutigkeit durch Normalisierung

Bei der Normalisierungsmethode zeichnet man unter allen Repräsentanten einer ganzen Zahl einen Repräsentanten aus. Dazu definiert man eine Normalisierungsfunktion n, die jedem Repräsentanten einer ganzen Zahl, x, den entsprechenden ausgezeichneten Repräsentanten $n(x)$ zuordnet.

Bekannt ist dieses Vorgehen aus der analytischen Geometrie bei den Normierungen nach Hesse: Unter den unendlich vielen möglichen Richtungsvektoren einer Ebene zeichnet man den aus, dessen Länge 1 ist und der in eine bestimmte, festgelegte Richtung zeigt.

Die Rechenoperatoren passt man nun so an, dass sie zunächst vorgehen wie bereits definiert, dann aber das Ergebnis normalisieren, indem sie die Normalisierungsfunktion auf das Ergebnis anwenden.

Außerdem erklärt man die Bedeutung der Zahlsymbole als Anwendung $n(x)$ der Normalisierungsfunktion n auf einen beliebigen Repräsentanten der Zahl, x. Dabei spielt es keine Rolle, welchen Repräsentanten man als Argument der Normalisierungsfunktion nutzt, da die Normalisierungsfunktion ja allen Repräsentanten den jeweils ausgezeichneten zuordnet.

Beispiel: $3_{\mathbb{Z}^*} := n((3,0)) = n((4,1)) = n((5,2)) = n(\cdots)$

In der Wahl der Normalisierungsfunktion n ist man weitgehend frei; einzige Bedingung ist, dass Repräsentanten unterschiedlicher

$$\left.\begin{array}{l}\mathbb{Z} \ni (0,0)\\ \mathbb{Z} \ni (1,1)\\ \mathbb{Z} \ni (2,2)\\ \vdots\end{array}\right\} \to (0,0) \in \mathbb{Z}^* \qquad \left.\begin{array}{l}\mathbb{Z} \ni (3,0)\\ \mathbb{Z} \ni (4,1)\\ \mathbb{Z} \ni (5,2)\\ \vdots\end{array}\right\} \to (3,0) \in \mathbb{Z}^*$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathbb{Z} \ni (1,0)\\ \mathbb{Z} \ni (2,1)\\ \mathbb{Z} \ni (3,2)\\ \vdots\end{array}\right\} \to (1,0) \in \mathbb{Z}^* \qquad \left.\begin{array}{l}\mathbb{Z} \ni (4,0)\\ \mathbb{Z} \ni (5,1)\\ \mathbb{Z} \ni (6,2)\\ \vdots\end{array}\right\} \to (4,0) \in \mathbb{Z}^*$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathbb{Z} \ni (2,0)\\ \mathbb{Z} \ni (3,1)\\ \mathbb{Z} \ni (4,2)\\ \vdots\end{array}\right\} \to (2,0) \in \mathbb{Z}^* \qquad \left.\begin{array}{l}\mathbb{Z} \ni (5,0)\\ \mathbb{Z} \ni (6,1)\\ \mathbb{Z} \ni (7,2)\\ \vdots\end{array}\right\} \to (5,0) \in \mathbb{Z}^*$$

Abbildung 3: Repräsentantenauszeichnung durch die Normalisierungsfunktion

---

Zahlen unterschiedliche ausgezeichnete Repräsentanten zugeordnet werden müssen – aus $n(x) = n(y)$ muss $x \equiv y$ folgen und umgekehrt.

Eine geeignete Normalisierungsfunktion ist beispielsweise folgende, die jeden Repräsentanten einer ganzen Zahl auf den entsprechenden „vollständig gekürzten“ Repräsentanten zuordnet:

$$\begin{aligned} n\colon\ & \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \text{ (Zielmenge)} \\ & (\nu,\mu) \mapsto n((\nu,\mu)) := \begin{cases} (\nu-\mu, 0) & \text{für } \nu \geq \mu \\ (0, \mu-\nu) & \text{für } \nu < \mu \end{cases} \end{aligned}$$

Beispiele (vgl. Abb. [[BILD:ZNorm]] auf S. [[LINK:ZNorm]]):

$$n(3_{\mathbb{Z}}) = n((5_{\mathbb{N}_0}, 2_{\mathbb{N}_0})) = n((7_{\mathbb{N}_0}, 4_{\mathbb{N}_0})) = n(\cdots) = (3_{\mathbb{N}_0}, 0_{\mathbb{N}_0})_{\mathbb{Z}^*} =: 3_{\mathbb{Z}^*}$$

$$n((-2)_{\mathbb{Z}}) = n((2_{\mathbb{N}_0}, 4_{\mathbb{N}_0})) = n((5_{\mathbb{N}_0}, 7_{\mathbb{N}_0})) = n(\cdots) = (0_{\mathbb{N}_0}, 2_{\mathbb{N}_0})_{\mathbb{Z}^*} =: (-2)_{\mathbb{Z}^*}$$

Allgemein gilt: Sind zwei Zahlen x und y äquivalent ($x \equiv y$; und nur dann), so sind die entsprechenden normierten Repräsentanten $n(x)$ und $n(y)$ hinsichtlich ihrer Identität gleich ($n(x) = n(y)$).

Die Menge der eindeutigen Repräsentanten der ganzen Zahlen, $\mathbb{Z}^*$, leitet sich aus der Menge der nicht-eindeutigen Repräsentanten, $\mathbb{Z}$, ab und ist eine echte Teilmenge von $\mathbb{Z}$:

$\mathbb{Z}^* := \{n(x) \,|\, x \in \mathbb{Z}\} \subsetneq \mathbb{Z}$

Anders ausgedrückt ist $\mathbb{Z}^*$ die Wertemenge der Normalisierungsfunktion n.

Die Rechenoperatoren und Relationen überträgt man wie folgt:

$x +_{\mathbb{Z}^*} y := n(x +_{\mathbb{Z}} y), \qquad x -_{\mathbb{Z}^*} y := n(x -_{\mathbb{Z}} y), \qquad x \cdot_{\mathbb{Z}^*} y := n(x \cdot_{\mathbb{Z}} y),$
$x :_{\mathbb{Z}^*} y := n(x :_{\mathbb{Z}} y)$

$x \leq_{\mathbb{Z}^*} y :\Leftrightarrow n(x) \leq_{\mathbb{Z}} n(y)$

Das ursprüngliche Problem, weswegen man einen Weg suchte, die Zahlrepräsentation eindeutig zu machen, nämlich die subjektiv empfundene Unschönheit der „aufgezwungenen“ Unterscheidung zwischen struktureller Gleichheit (=) und Äquivalenz (≡), ist damit gelöst, wie folgendes Beispiel exemplarisch demonstriert:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & 2_{\mathbb{Z}^*} + 2_{\mathbb{Z}^*} & = & n(2_{\mathbb{Z}}) + n(2_{\mathbb{Z}}) & = & n(2_{\mathbb{Z}} + 2_{\mathbb{Z}}) & = & \underbrace{n((6,2))}_{n(4_{\mathbb{Z}})} & = & (4,0) = \\ = & 2_{\mathbb{Z}^*} \cdot 2_{\mathbb{Z}^*} & = & n(2_{\mathbb{Z}}) \cdot n(2_{\mathbb{Z}}) & = & n(2_{\mathbb{Z}} \cdot 2_{\mathbb{Z}}) & = & \underbrace{n((10,6))}_{n(4_{\mathbb{Z}})} & = & (4,0) \end{array}$$

$2_{\mathbb{Z}} + 2_{\mathbb{Z}} = (6,2)$ ist zwar (wenn man für $2_{\mathbb{Z}}$ den im Beispiel verwendeten Repräsentanten $(3,1)$ nimmt) hinsichtlich der strukturellen Gleichheit ungleich zu $2_{\mathbb{Z}} \cdot 2_{\mathbb{Z}} = (10,6)$, die zugehörigen ausgezeichneten Repräsentanten $n(2_{\mathbb{Z}} + 2_{\mathbb{Z}}) = (4,0)$ und $n(2_{\mathbb{Z}} \cdot 2_{\mathbb{Z}}) = (4,0)$ sind es aber, wie gewünscht, sehr wohl – und das unabhängig von der Wahl, welchen Repräsentanten man für $2_{\mathbb{Z}}$ nimmt.

Nachteil dieser Methode kann sein, dass sie dem persönlichen Geschmack nicht entspricht: Der Weg über eine Normalisierungsfunktion kann den Anschein erwecken, die „eigentliche“, „ursprüngliche“ Definition genüge nicht, und man müsse sie nachträglich „reparieren“; man könnte der Meinung sein, die ursprüngliche Definition enthalte irgendeinen „Fehler“, den man finden und beheben sollte, anstatt um diesen „Fehler“ herumzuarbeiten, indem man eine Normalisierungsfunktion einführt, die das Problem wieder „richtet“.

Eindeutigkeit durch Äquivalenzklassen

Ein alternativer Weg, eine Menge von eindeutigen Repräsentanten zu erhalten, führt über die Bildung von sog. Äquivalenzklassen.

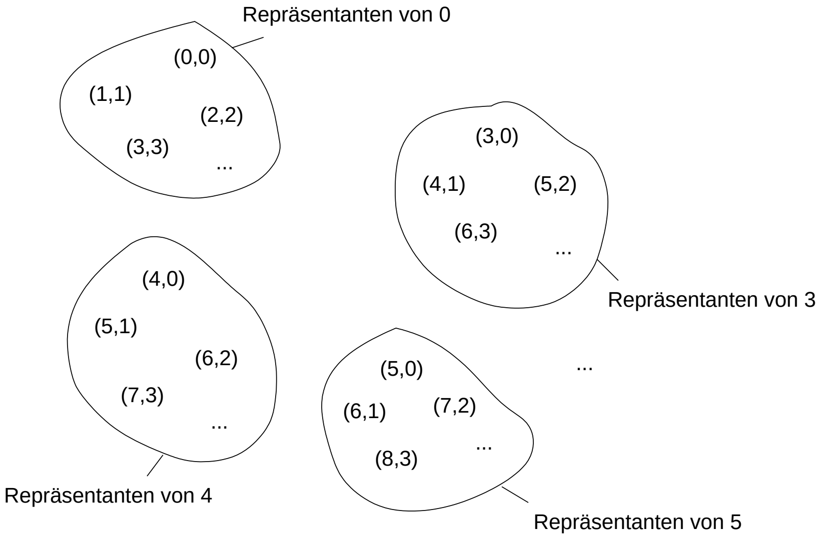


Abbildung 4: Bildung von Klassen äquivalenter Repräsentanten

Die Idee ist, die Menge der unendlich vielen, nicht-eindeutigen Repräsentanten einer Zahl selbst als eindeutigen Repräsentanten anzusehen (vgl. Abb. [[BILD:ZAeq]] auf S. [[LINK:ZAeq]]).

Beispiel: $3_{\mathbb{Z}^*} := \{(3_{\mathbb{N}_0}, 0_{\mathbb{N}_0}), (4_{\mathbb{N}_0}, 1_{\mathbb{N}_0}), (5_{\mathbb{N}_0}, 2_{\mathbb{N}_0}), \ldots\}$

Die Menge aller (nicht-eindeutigen) Repräsentanten einer Zahl nennt man „Äquivalenzklasse“ und kennzeichnet sie über eckige Klammern: $[x] := \{x' \in \mathbb{Z} \mid x' \equiv x\}$ mit $x \in \mathbb{Z}$.

Beispiel: $[(3_{\mathbb{N}_0}, 0_{\mathbb{N}_0})] = [(4_{\mathbb{N}_0}, 1_{\mathbb{N}_0})] = [(5_{\mathbb{N}_0}, 2_{\mathbb{N}_0})] = [\cdots] = \{\, (3_{\mathbb{N}_0}, 0_{\mathbb{N}_0})\,, (4_{\mathbb{N}_0}, 1_{\mathbb{N}_0})\,, (5_{\mathbb{N}_0}, 2_{\mathbb{N}_0})\,,$
$3_{\mathbb{Z}^*}$

Allgemein gilt: Sind zwei Zahlrepräsentanten x und y äquivalent ($x \equiv y$), so sind die entsprechenden Äquivalenzklassen $[x]$ und $[y]$ hinsichtlich ihrer Identität gleich ($[x] = [y]$). Umgekehrt sind $[x]$ und $[y]$ disjunkt, wenn $x \not\equiv y$.

Bereits bekannt ist dieses Vorgehen aus der Geometrie: Dort begreift man einen Vektor als die Menge aller Pfeile, die parallel zum Vektor sind und genauso lang wie der Vektor sind. Jeder der parallelgleichen Pfeile ist ein nicht-eindeutiger Repräsentant; ein Vektor selbst ist also die Menge der nicht-eindeutigen Repräsentanten.

Auch die verallgemeinerte mengentheoretische Realisierung der natürlichen Zahlen (S. [[LINK:NVerallg]]) kann man über das Äquivalenzklassenkonzept formulieren: Eine Zahl n begreift man als die Äquivalenzklasse aller Mengen mit n Elementen.

Dabei ist es nicht schlimm, dass die Äquivalenzklassen unendlich groß sind, da man, wie ich gleich zeigen werde, zum Rechnen jeweils nur ein einziges Element benötigt.

Die Menge der eindeutigen Repräsentanten ganzer Zahlen definiert man als die Menge der Äquivalenzklassen der nicht-eindeutigen Repräsentanten. In Symbolen:

$\mathbb{Z}^* := \{[x] \,|\, x \in \mathbb{Z}\}$

Ungewohnt daran kann sein, dass $\mathbb{Z}^*$ eine Menge von Mengen ist. Üblicherweise behandelt man in der Schule diesen Fall nicht; mathematisch besonders ist er jedoch nicht.

Während die durch Normalisierung gebildete Menge eindeutiger Repräsentanten, $\{n(x) \,|\, x \in \mathbb{Z}\}$, eine echte Teilmenge der Menge der nicht-eindeutigen Repräsentanten, $\mathbb{Z}$, ist, ist das durch Äquivalenzklassenbildung gebildete $\mathbb{Z}^*$ keine Teilmenge von $\mathbb{Z}$.

Zur Erklärung der Rechenregeln und Relationen auf $\mathbb{Z}^*$ „zieht“ man die Äquivalenzklassenbildung „heraus“:

$[x] +_{\mathbb{Z}^*} [y] := [x +_{\mathbb{Z}} y], \quad [x] -_{\mathbb{Z}^*} [y] := [x -_{\mathbb{Z}} y], \quad [x] \cdot_{\mathbb{Z}^*} [y] := [x \cdot_{\mathbb{Z}} y],$
$[x] :_{\mathbb{Z}^*} [y] := [x :_{\mathbb{Z}} y]$

$[x] \leq [y] :\Leftrightarrow x \leq y$

Die Bedeutung der Zahlensymbole definiert man über die entsprechenden Äquivalenzklassen:

$0_{\mathbb{Z}^*} := [0_{\mathbb{Z}}], \quad 1_{\mathbb{Z}^*} := [1_{\mathbb{Z}}], \quad 2_{\mathbb{Z}^*} := [2_{\mathbb{Z}}], \quad 3_{\mathbb{Z}^*} := [3_{\mathbb{Z}}], \ \ldots$

Wie auch der Weg über eine Normalisierungsfunktion löst auch der Weg über Äquivalenzklassen das ursprüngliche Problem des „Zwangs“, zwischen struktureller Gleichheit (=) und Äquivalenz (≡) unterscheiden zu müssen.

Das Zahlenbeispiel, das ich in diesem Abschnitt schon mehrmals zur Illustration des Problems der fehlenden Repräsentationseindeutigkeit bzw. zu dessen Lösung genutzt habe, lautet übertragen auf den Äquivalenzklassenansatz wie folgt:

$$\begin{array}{rcccccccl} & 2_{\mathbb{Z}^*} + 2_{\mathbb{Z}^*} & = & [2_{\mathbb{Z}}] + [2_{\mathbb{Z}}] & = & [2_{\mathbb{Z}} + 2_{\mathbb{Z}}] & = & [(6,2)_{\mathbb{Z}}] & = \{(4,0),(5,1),(6,2),(7,3),\ldots\} \\ = & 2_{\mathbb{Z}^*} \cdot 2_{\mathbb{Z}^*} & = & [2_{\mathbb{Z}}] \cdot [2_{\mathbb{Z}}] & = & [2_{\mathbb{Z}} \cdot 2_{\mathbb{Z}}] & = & [(10,6)_{\mathbb{Z}}] & = \{(4,0),(5,1),(6,2),(7,3),\ldots\} \end{array}$$

$2_{\mathbb{Z}} + 2_{\mathbb{Z}} = (6, 2)$ ist zwar (wenn man für $2_{\mathbb{Z}}$ den im Beispiel verwendeten Repräsentanten $(3, 1)$ nimmt) hinsichtlich der strukturellen Gleichheit ungleich zu $2_{\mathbb{Z}} \cdot 2_{\mathbb{Z}} = (10, 6)$, die zugehörigen Äquivalenzklassen sind jedoch – wie gewünscht – strukturell gleich, da sie alle denkbaren Repräsentanten enthalten.

Wiederherstellung der Neutralität der Null

Bei der Überprüfung der Neutralität der Null hinsichtlich der Addition auf S. [[LINK:ZNeutr]] schrieb ich, dass, wenn man die Eindeutigkeit der Zahlrepräsentation hergestellt hat, auch das Neutralitätsgesetz in der starken Form $x + 0 = x$ anstatt der abgeschwächten Form $x + 0 \equiv x$ gilt.

Der Beweis dieser Aussage unter der durch Äquivalenzklassenbildung oder Normalisierung erreichten Eindeutigkeit der Zahlrepräsentation ist einfach: $[x]+0_{\mathbb{Z}^*} = [x]+[0_{\mathbb{Z}}] = [x + 0_{\mathbb{Z}}] = [x]$, da wie auf S. [[LINK:ZNeutr]] bewiesen, $x + 0_{\mathbb{Z}} \equiv x$.

Für das durch Normalisierung gebildete $\mathbb{Z}^*$ verläuft der Beweis analgo: $n(x) + 0_{\mathbb{Z}^*} = n(x) + n(0_{\mathbb{Z}}) = n(x + 0_{\mathbb{Z}}) = n(x)$.

Auch schrieb ich, dass es nach der Herstellung der Eindeutigkeit der Zahlrepräsentation nur noch ein neutrales Element geben wird. Dieses Element kann man nun benennen: Es ist $0_{\mathbb{Z}^*} = [0_{\mathbb{Z}}]$ bzw. $0_{\mathbb{Z}^*} = n(0_{\mathbb{Z}})$.

– Einbettung der natürlichen Zahlen in die ganzen Zahlen

Oft liest man Aussagen wie „die ganze Zahlen umfassen die natürlichen Zahlen“ oder, präziser, „die Menge der natürlichen Zahlen ist eine Teilmenge der Menge der ganzen Zahlen“ (vgl. Abb. [[BILD:Teilmeng]] auf S. [[LINK:Teilmeng]]). Während die erste Aussage Platz für Intepretationsspielraum lässt und bei geeigneter Wahl der Interpretation in der Tat richtig ist, wie ich gleich zeigen werde, ist die zweite offensichtlich falsch:

Betrachtet man die beiden Mengen $\mathbb{N}_0$ und $\mathbb{Z}$ wie in dieser Arbeit definiert von ihrer Struktur her, so ist klar, dass $\mathbb{N}_0$ nicht Teilmenge von $\mathbb{Z}$ sein kann, sind doch die Elemente von $\mathbb{Z}$ Paare natürlicher Zahlrepräsentanten, während die Elemente von $\mathbb{N}_0$ nicht Paare, sondern das Resultat wiederholter Anwendung einer Nachfolgerfunktion S sind.

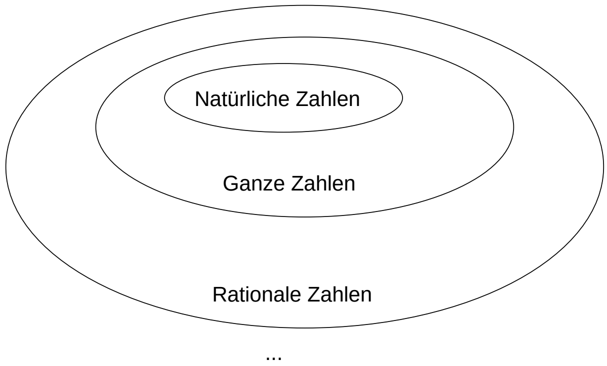


Abbildung 5: Bekannte Darstellung der Teilmengenverhältnisse

Um den eigentlich gemeinten Inhalt der Aussage zu treffen, muss man die Aussage anders formulieren: Es gibt eine umkehrbar eineindeutige Abbildung, also eine Bijektion, die den Elementen von $\mathbb{N}_0$ „entsprechende“ Elemente von $\mathbb{Z}$ zuordnet, wobei „entsprechend“ in dem Sinn zu verstehen ist, dass die „Bedeutung“ erhalten bleibt, also dass die „Bedeutung“ der Elemente der Definitionsmenge der Abbildung der der entsprechenden Elemente der Wertemenge entspricht.

Dabei lässt sich die Forderung an die Bijektion, dass die „Bedeutung“ bei der Transformation erhalten bleibt, mathematisch präzisieren: Im dem Kontext dieser Arbeit erhält eine Abbildung f die „Bedeutung“ genau dann, wenn gilt: $f(n +_{\mathbb{N}_0} m) = f(n) +_{\mathbb{Z}} m$ und $f^{-1}(n +_{\mathbb{Z}} m) = f^{-1}(n) +_{\mathbb{N}_0} f^{-1}(m)$ (und analog für die anderen Operatoren und für die Relationen).

So eine Abbildung nennt man auch „Isomorphismus“, und man sagt: „Die Menge der Repräsentanten natürlicher Zahlen, $\mathbb{N}_0$, ist isomorph zu einer bestimmten Teilmenge $\mathbb{N}_{0_\mathrm{z}}$ von $\mathbb{Z}$.“

Ein denkbarer Isomorphismus f, der die Repräsentanten natürlicher Zahlen aus $\mathbb{N}_0$ auf entsprechende Repräsentanten ganzer Zahlen aus $\mathbb{N}_{0_\mathrm{z}}$ abbildet, ist beispielsweise:

Einbettung der natürlichen Zahlen in die ganzen Zahlen

f: $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_{0_\mathbb{Z}} \subsetneq \mathbb{Z}$ (Wertemenge)
$n \mapsto f(n) := (n,0)_\mathbb{Z}$

f^{-1}: $\mathbb{Z} \supsetneq \mathbb{N}_{0_\mathbb{Z}} \to \mathbb{N}_0$ (Wertemenge)
$(n,0)_\mathbb{Z} \mapsto f^{-1}((n,0)_\mathbb{Z}) := n$

Beispiele: $f(3_{\mathbb{N}_0}) = (3_{\mathbb{N}_0}, 0)_\mathbb{Z} \equiv 3_\mathbb{Z}$, $\quad f^{-1}(3_\mathbb{Z}) = f^{-1}((3_{\mathbb{N}_0}, 0)_\mathbb{Z}) = 3_{\mathbb{N}_0}$

Dass f die Bedeutung erhält, muss noch bewiesen werden. Aus Platzgründen führe ich hier nur die Beweise der Addition und Subtraktion aus; die anderen Beweise (auch die der Bedeutungserhaltung der Relationen) verlaufen analog.

$$\begin{aligned} & f(n) +_\mathbb{Z} f(m) = && \textit{(Anwenden der Funktionsvorschrift)} \\ = \; & (n,0) +_\mathbb{Z} (m,0) = && \textit{(Anwenden der } \mathbb{Z}\textit{-Additionsvorschrift)} \\ = \; & (n+m, 0+0) = && \textit{(Ausrechnen der zweiten Paarkomponente)} \\ = \; & (n+m, 0) = && \\ = \; & f(n +_{\mathbb{N}_0} m) && \end{aligned}$$

Auch die Umkehrfunktion des Isomorphismus f erhält die Bedeutung:

$$\begin{aligned} & f^{-1}(\,(n,0)_\mathbb{Z} +_\mathbb{Z} (m,0)_\mathbb{Z}\,) = \\ = \; & f^{-1}((n+m, 0+0)) = \\ = \; & f^{-1}((n+m, 0)) = \\ = \; & n +_{\mathbb{N}_0} m = \\ = \; & f^{-1}((n,0)_\mathbb{Z}) +_{\mathbb{N}_0} f^{-1}((m,0)_\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Streng genommen ist f bezüglich der strukturellen Gleichheit (=) kein Isomorphismus von $\mathbb{N}_0$ zu $\mathbb{N}_{0_\mathbb{Z}}$, wie der Versuch, die Bedeutungserhaltung bei der Subtraktion zu beweisen, zeigt:

$$\begin{aligned} & f(n) -_\mathbb{Z} f(m) = && \textit{(Anwenden der Funktionsvorschrift)} \\ = \; & (n,0) -_\mathbb{Z} (m,0) = && \textit{(Anwenden der } \mathbb{Z}\textit{-Subtraktionsvorschrift)} \\ = \; & (n+0, m+0) = && \textit{(Ausrechnen der Paarkomponenten)} \\ = \; & (n,m) && \end{aligned}$$

Es gibt kein $a \in \mathbb{N}_0$, für das $f(a) = (n,m)$ (mit m allgemein aus $\mathbb{N}_0$) gilt – anders formuliert ist $f^{-1}((n,m))$ nicht definiert. Die von der strukturellen Gleichheit auf die Äquivalenz abgeschwächte Isomorphieforderung – $f(n) -_\mathbb{Z} f(m) \equiv f(n -_{\mathbb{N}_0} m)$ – ist aber erfüllt:

$$\begin{aligned} & f(n) -_\mathbb{Z} f(m) = \text{(siehe oben)} = (n,m) \equiv && \textit{(Abziehen von } m \textit{ von den Paarkompo} \\ \equiv \; & (n-m, m-m) = && \textit{(Ausrechnen der zweiten Paarkompo} \\ = \; & (n-m, 0) = && \\ = \; & f(n -_{\mathbb{N}_0} m) && \end{aligned}$$

Bettet man die natürlichen Zahlen nicht in $\mathbb{Z}$, sondern in $\mathbb{Z}^*$ ein, so stellt sich dieses Problem nicht, da der Übergang von (n, m) zu $(n - m, 0)$ schon in der Struktur von $\mathbb{Z}^*$ steckt, also durch die Normalisierungsfunktion bzw. durch die Äquivalenzklassenbildung erreicht wird.

Die Aussage, die ganzen Zahlen umfassten die natürlichen Zahlen, ist also korrekt, wenn man diese schwammig formulierte Aussage entsprechend interpretiert. Möchte man ohne Gefahr vor Missverständnissen reden, kann man die Aussage präzisieren: Es gibt einen Isomorphismus, über den man die Menge der Repräsentanten natürlicher Zahlen in die Menge der Repräsentanten ganzer Zahlen einbetten kann.

6.3.4 Rationale Zahlen

In diesem Kapitel werde ich die übliche Realisierung rationaler Zahlen und der Operatoren und Relationen auf den rationalen Zahlen darlegen. Wie auch die ausgeführte Realisierung der ganzen Zahlen als Paare natürlicher Zahlrepräsentanten führt die Realisierung der rationalen Zahlen, wie ich sie hier vorstellen werde, zu einer nicht-eindeutigen Zahlrepräsentation, weswegen man – wie bei den ganzen Zahlen – eine Äquivalenzrelation einführen muss, um sinnvoll von Gleichheit sprechen zu können.

Auf Beweise werde ich größtenteils verzichten, da sie ähnlich wie Beweise auf den ganzen Zahlen verlaufen und somit keinen großen Erkenntnisgewinn bringen.

Betrachtet man die übliche Schreibweise für rationale Zahlen, die Bruchschreibweise, so liegt der Schluss nahe, Repräsentanten rationaler Zahlen als Paare von Zähler und Nenner zu definieren.

In der Schule fordert man üblicherweise, dass der Zähler eine ganze Zahl und der Nenner eine natürliche Zahl größer Null ist. Hier werde ich für den Nenner ganze Zahlen nehmen, um formalen Problemen mit Operationen auf unterschiedlichen Typen (wie beispielsweise $3_{\mathbb{N}_0} + 5_{\mathbb{Z}}$) zu entgehen.

Die Menge der Repräsentanten rationaler Zahlen kann man ohne diese Beschränkung wie folgt definieren, wobei $[0_{\mathbb{Z}}]$ die Äquivalenzklasse aller Repräsentanten ganzer Zahlen, die äquivalent zu $0_{\mathbb{Z}}$ sind, meint:

$\mathbb{Q} := \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus [0_\mathbb{Z}])$ mit $[0_\mathbb{Z}] = \{x' \mid x' \equiv 0_\mathbb{Z}\}$.

Ein Paar zweier ganzer Zahlen $(p, q) \in \mathbb{Q}$ begreift man dabei als den Bruch $\frac{p}{q}$.

Beispiel: $\left(\frac{-5}{2}\right)_\mathbb{Q} \equiv ((-5)_\mathbb{Z}, 2_\mathbb{Z}) \equiv ((0_{\mathbb{N}_0}, 5_{\mathbb{N}_0}), (2_{\mathbb{N}_0}, 0_{\mathbb{N}_0}))$

(Die genauere Bedeutung von $\equiv$ auf den rationalen Zahlen werde ich weiter unten definieren.)

Diese Wahl der Menge der Repräsentanten rationaler Zahlen führt aus zwei Gründen zu nicht-eindeutigen Repräsentanten. Zum einen sind die Paarkomponenten Elemente aus $\mathbb{Z}$, dessen Zahlrepräsentation wie bereits erläutert nicht eindeutig ist. Würde man schon an dieser Stelle die Eindeutigkeit der Zahlrepräsentation fordern, und daher versuchen, ein $\mathbb{Q}^*$ mit $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Z}^* \times (\mathbb{Z}^* \setminus \{0_{\mathbb{Z}^*}\})$ zu definieren, so wäre die Zahlrepräsentation dieses $\mathbb{Q}^*$ trotzdem noch mehrdeutig:

Den Brüchen wohnt eine grundsätzlich verankerte Mehrdeutigkeit der Repräsentation inne: Zum einen sind Brüche beliebig erweiterbar – zu jedem vollständig gekürzten Bruch $\frac{p}{q}$ gibt es unendlich viele ungekürzte Brüche $\frac{kp}{kq}$ (mit k als beliebige ganze Zahl) und zum anderen kann man jeden negativen gekürzten Bruch $\frac{-p}{q}$ auch als $\frac{p}{-q}$ darstellen.

Um dennoch wieder zu einer eindeutigen Repräsentation zu gelangen, kann man, wie in dieser Arbeit schon bei den ganzen Zahlen ausgeführt, eine Normalisierungsfunktion einführen oder Äquivalenzklassen bilden.

Relationen

In diesem Abschnitt werde ich die Äquivalenz- und die Kleinergleich-, Kleiner-, Größer- und Größergleichrelation definieren. Anders als die Behandlung der Relationen der natürlichen Zahlen in der Grundschule, die überhaupt nicht formalisiert dargestellt werden und von Erwachsenen als „selbstverständlich“, „unmittelbar einleuchtend“, „keine Begründungen benötigend“ angesehen werden, werden die Relationen und Rechenregeln der rationalen Zahlen schon formalisierter dargestellt.

Dass die Rechenregeln der rationalen Zahlen nicht so selbstverständlich sind wie die der natürlichen Zahlen (die man verinnerlicht hat) oder die der ganzen Zahlen (die man im Alltag einfach auf Operationen auf den natürlichen Zahlen zurückführt und dann noch den Einfluss der Vorzeichen überprüft), zeigt sich bei der Einführung der rationalen Zahlen im Unterricht.

So nehmen viele Schüler an, die Addition auf den rationalen Zahlen erfolge „selbstverständlich" komponentenweise, sie denken also, die Summe zweier Brüche $\frac{p}{q}$ und $\frac{a}{b}$ sei (für allgemeine p, q, a, b) $\frac{p+a}{q+b}$. ([[QOftFehler]], S. 15)

Infolgedessen untersucht man die Rechenoperationen im Schulunterricht genauer und notiert die Erkenntnise auch formalisierter. Die folgenden Definitionen könnte man – zumindest von der Idee her (weniger von der Art der Notation) – auch in Fünft- oder Sechstklassmathematikschulheften finden.

– Äquivalenzrelation

Da, wie erläutert, die Zahlrepräsentation bei der Realisierung der rationalen Zahlen als Paare ganzer Zahlrepräsentanten nicht eindeutig ist, muss man, wie bei den ganzen Zahlen, eine Äquivalenzrelation $\equiv$ einführen, um wie gewohnt von der „Gleichheit" zweier rationaler Zahlen sprechen zu können.

Zur Herleitung kann man zwei Repräsentanten rationaler Zahlen, (p, q) und (a, b) mit $(p, q), (a, b) \in \mathbb{Q}$, betrachten. Greift man die Idee der Paarbildung auf und begreift also die Paare als Brüche, kann man das Wissen über äquivalente Termumformungen nutzen:

$\frac{p}{q} \equiv \frac{a}{b}$ *(Die Division auf den ganzen Zahlen ist nicht für alle $p, a \in \mathbb{Z}$ und q, b*
(Herüberbringen von q und b)
$pb \equiv aq$ *(Dieser Ausdruck ist für alle $p, a \in \mathbb{Z}$ und $q, b \in \mathbb{Z} \setminus [0_{\mathbb{Z}}]$ definiert.)*

Man kann also definieren: Zwei Repräsentanten rationaler Zahlen, (p, q) und (a, b) mit $(p, q), (a, b) \in \mathbb{Q}$, sind genau dann äquivalent, wenn der Ganzzahlrepräsentant pb äquivalent zum Ganzzahlrepräsentanten aq ist. In Symbolen:

Definition der Äquivalenz auf den rationalen Zahlen

$(p, q)_{\mathbb{Q}} \equiv_{\mathbb{Q}} (a, b)_{\mathbb{Q}} \;:\Leftrightarrow pb \equiv_{\mathbb{Z}} aq$

$(p, q)_{\mathbb{Q}} \not\equiv_{\mathbb{Q}} (a, b)_{\mathbb{Q}} \;:\Leftrightarrow pb \not\equiv_{\mathbb{Z}} aq$

mit $(p, q), (a, b) \in \mathbb{Q}$.

Beispiel: $\underbrace{((0_{\mathbb{N}_0}, 5_{\mathbb{N}_0}), (2_{\mathbb{N}_0}, 0_{\mathbb{N}_0}))}_{\equiv((-5)_{\mathbb{Z}}, 2_{\mathbb{Z}})}$ ist hinsichtlich der strukturellen Gleichheit (=) nicht gleich zu $\underbrace{((1_{\mathbb{N}_0}, 6_{\mathbb{N}_0}), (3_{\mathbb{N}_0}, 1_{\mathbb{N}_0}))}_{\equiv((-5)_{\mathbb{Z}}, 2_{\mathbb{Z}})}$ und auch nicht zu $\underbrace{((0_{\mathbb{N}_0}, 10_{\mathbb{N}_0}), (4_{\mathbb{N}_0}, 0_{\mathbb{N}_0}))}_{\equiv((-10)_{\mathbb{Z}}, 4_{\mathbb{Z}})}$, wohl aber hinsichtlich der definierten Äquivalenzrelation, da $(0,5)_{\mathbb{Z}} \equiv (1,6)_{\mathbb{Z}}$ und $(2,0)_{\mathbb{Z}} \equiv (3,1)_{\mathbb{Z}}$ bzw. $(-5)_{\mathbb{Z}} \cdot 4_{\mathbb{Z}} \equiv_{\mathbb{Z}} (-10)_{\mathbb{Z}} \cdot 2_{\mathbb{Z}}$.

Wie auch die Äquivalenzrelation der ganzen Zahlen vergleicht die Äquivalenzrelation der rationalen Zahlen nicht die Identität, sondern nutzt die hergeleitete Vorschrift $pb \equiv aq$ zum Vergleich.

Es zeigt sich eine beeindruckende Symmetrie zur Äquivalenzrelation der ganzen Zahlen: Vertauscht man in der hergeleiteten Äquivalenzrelationsvorschrift $\cdot_{\mathbb{Z}}$ mit $+_{\mathbb{N}_0}$, so erhält man die $\mathbb{Z}$-Äquivalenzrelationsvorschrift:

Äquivalenzrelationsvorschrift der rationalen Zahlen: $(x,y) \equiv_{\mathbb{Q}} (a,b) \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot_{\mathbb{Z}} b \quad \equiv_{\mathbb{Z}}$
Äquivalenzrelationsvorschrift der ganzen Zahlen: $(x,y) \equiv_{\mathbb{Z}} (a,b) \quad \Leftrightarrow \quad x +_{\mathbb{N}_0} b \quad =$

Dass die hier definierte Äquivalenzrelation auch wirklich reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, beweise ich hier nicht, da die Beweise keinen Erkenntnisgewinn bringen; sie verlaufen analog zu den entsprechenden Beweisen der $\mathbb{Z}$-Äquivalenzrelation.

Mit der Äquivalenzrelation kann man folgende Aussage beweisen, die später von Nutzen sein wird: „Ein Repräsentant (p,q) einer rationalen Zahl ist genau dann äquivalent zu Null, wenn p äquivalent zu Null ist."

In Symbolen: $(p,q) \equiv_{\mathbb{Q}} 0_{\mathbb{Q}} \Leftrightarrow p \equiv_{\mathbb{Z}} 0_{\mathbb{Z}}$ mit $(p,q) \in \mathbb{Q}$

Beweis:

$$
\begin{array}{cccccl}
 & (p,q) & \equiv_{\mathbb{Q}} & 0_{\mathbb{Q}} & \Leftrightarrow & \textit{(Aussuchen eines Repräsentanten für } 0_{\mathbb{Q}}\textit{)} \\
\Leftrightarrow & (p,q) & \equiv_{\mathbb{Q}} & (0,a) & \Leftrightarrow & \text{mit } a \not\equiv 0_{\mathbb{Z}}\text{, da } (0,a) \in \mathbb{Q} \text{ und damit } a \in \mathbb{Z} \setminus [0_{\mathbb{Z}}] \\
 & & & & & \textit{(Anwenden der } \mathbb{Q}\textit{-Äquivalenzrelation)} \\
\Leftrightarrow & p \cdot a & \equiv_{\mathbb{Z}} & 0 \cdot q & \Leftrightarrow & \textit{(Vereinfachen der rechten Seite)} \\
\Leftrightarrow & p \cdot a & \equiv_{\mathbb{Z}} & 0 & \Leftrightarrow & \\
\Leftrightarrow & p & \equiv_{\mathbb{Z}} & 0 & & \text{da } a \not\equiv 0_{\mathbb{Z}}
\end{array}
$$

Definition der Zahlensymbole für rationale Zahlen

Wie auch bei den ganzen Zahlen werde ich nicht die Identität der Zahlensymbole definieren, sondern nur ihren Wert über Äquivalenzbeziehungen angeben.

Definition der Zahlensymbole für rationale Zahlen

Das Paar (p, q) repräsentiert die rationale Zahl, die durch die Bruchschreibweise $\frac{p}{q}$ gegeben ist.

Speziell:

$0_\mathbb{Q} :\equiv (0_\mathbb{Z}, 1_\mathbb{Z}), \quad 1_\mathbb{Q} :\equiv (1_\mathbb{Z}, 1_\mathbb{Z}), \quad (-1)_\mathbb{Q} :\equiv (-1_\mathbb{Z}, 1_\mathbb{Z})$

Die Identität der Zahlensymbole bleibt undefiniert:

$0_\mathbb{Q} = ?, \quad 1_\mathbb{Q} = ?, \quad (-1)_\mathbb{Q} = ?, \ldots$

– Kleiner-, Kleinergleich-, Größergleich- und Größerrelation

Wie bei der Definition der natürlichen und der ganzen Zahlen in dieser Arbeit kann man auch bei den ganzen Zahlen die Kleiner- ($<$), Größergleich- ($\geq$) und Größerrelation ($>$) durch die Kleinergleichrelation ($\leq$) ausdrücken.

Zur Herleitung der Kleinergleichrelationsvorschrift kann man zwei Repräsentanten rationaler Zahlen, (p, q) und (a, b) mit $(p, q), (a, b) \in \mathbb{Q}$, betrachten. Dann kann man, wie auch bei der Herleitung der Äquivalenzbeziehung, das Wissen über äquivalente Termumformungen nutzen und ansetzen: $\frac{p}{q} \leq \frac{a}{b}$.

Es liegt daher nahe, als Definition der Kleinergleichrelation der rationalen Zahlen folgende Vorschrift zu nehmen:

$(p, q) \leq_\mathbb{Q} (a, b) :\Leftrightarrow p :_\mathbb{Z} q \leq_\mathbb{Z} a :_\mathbb{Z} b$

Die Ganzzahldivision ist aber nicht für alle $p, q, a, b \in \mathbb{Z}, q, b \not\equiv 0_\mathbb{Z}$ definiert, die Definition ist also unzureichend. Bei der Herleitung der Äquivalenzrelationsvorschrift trat dieses Problem ebenfalls auf; lösen konnte man es dadurch, indem man q und b durch Multiplikation mit qb auf die jeweils andere Seite der Ungleichung bringt. Bei der Herleitung der Äquivalenzrelation war das auch unproblematisch; hier aber handelt es sich nicht um eine Gleichung, sondern um eine Ungleichung.

Dementsprechend kehrt sich das Relationszeichen $\leq$ zu $\geq$ um, falls der Faktor pq, mit dem man die Ungleichung multipliziert, negativ ist; man erhält also $pb \lesseqgtr ab$ und muss in der Definition eine Fallunterscheidung treffen:

Ein Repräsentant einer rationalen Zahl, (p, q), ist genau dann kleinergleich (a, b) mit $(p, q), (a, b) \in \mathbb{Q}$ und $qb > 0$, wenn der Ganzzahlrepräsentant pb kleinergleich dem Ganzzahlrepräsentant aq ist.

Ist $qb < 0$, so ist (p, q) genau dann kleinergleich (a, b), wenn pb größergleich aq ist. In Symbolen:

Definition der Kleinergleichrelation auf den rationalen Zahlen

$$(p,q)_\mathbb{Q} \leq_\mathbb{Q} (a,b)_\mathbb{Q} :\Leftrightarrow \begin{cases} pb \leq_\mathbb{Z} aq & \text{für } qb > 0 \\ pb \geq_\mathbb{Z} aq & \text{für } qb < 0 \end{cases}$$

mit $(p, q), (a, b) \in \mathbb{Q}$.

Der Fall $qb \equiv 0$ kann nicht auftreten, da q und b beide nicht Null sind, da sie Elemente von $\mathbb{Z} \setminus [0_\mathbb{Z}]$ sind.

Auf die Beweise der Reflexivität ($x \leq x$ für alle $x \in \mathbb{Z}$), Antisymmetrie (aus $x \leq y$ und $y \leq x$ folgt $x \equiv y$) und Transitivität (aus $x \leq y$ und $y \leq z$ folgt $x \leq z$) verzichte ich.

Rechenoperatoren

In diesem Abschnitt werden die Rechenoperatoren auf den rationalen Zahlen definiert. Dabei werden keine neuen Konzepte eingeführt, und auch gibt es bei der Herleitung der Definitionen keine Probleme.

– Addition

Zur Herleitung der Additionsvorschrift kann man zwei Repräsentanten rationaler Zahlen, (p, q) und (a, b) mit $(p, q), (a, b) \in \mathbb{Q}$, betrachten, die Paare als Brüche begreifen und dann das bereits bekannte Wissen über Brüche, insbesondere über die Bildung des Hauptnenners, nutzen:

$$\begin{aligned} & \tfrac{p}{q} + \tfrac{a}{b} = && \textit{(Erweitern zum Nenner } qb\textit{)} \\ = \; & \tfrac{pb}{qb} + \tfrac{aq}{qb} = && \textit{(Schreiben als einen einzigen Bruch)} \\ = \; & \tfrac{pb+aq}{qb} \end{aligned}$$

Man erhält also folgende Additionsvorschrift:

Definition der Addition auf den rationalen Zahlen

$$(p,q)_\mathbb{Q} +_\mathbb{Q} (a,b)_\mathbb{Q} := (pb +_\mathbb{Z} aq, qb)_\mathbb{Q}$$

mit $(p, q), (a, b) \in \mathbb{Q}$.

(Ich habe mich dazu entschieden, als gemeinsamen Nenner der Brüche nicht das kleinste gemeinsame Vielfache der Nenner, sondern einfach das Produkt der Nenner zu nutzen, um die Definition nicht unnötig zu komplizieren.)

Auf der rechten Seite der Definition kommt die Addition und Multiplikation auf den ganzen Zahlen vor, welche ihrerseits die $\mathbb{N}_0$-Addition und -Multiplikation nutzt. An einem Zahlenbeispiel kann man einen Eindruck der Komplexität dieses „gestapelten“ Aufbaus gewinnen, wenn man die sich ergebenen Unterrechnungen über den ganzen Zahlen über die im vorherigen Kapitel definierten $\mathbb{Z}$-Rechenvorschriften ausrechnet, anstatt auf das bereits bekannte Wissen über $\mathbb{Z}$-Symbolmanipulationen zurückzugreifen:

$$
\begin{aligned}
& \left(\tfrac{1}{2}\right)_{\mathbb{Q}} +_{\mathbb{Q}} \left(\tfrac{3}{4}\right)_{\mathbb{Q}} \equiv && \textit{(Schreiben als Paare ganzer Zahlrepräsenta} \\
\equiv\ & (1,2) +_{\mathbb{Q}} (3,4) \equiv && \textit{(Anwenden der } \mathbb{Q}\textit{-Additionsvorschrift)} \\
\equiv\ & (1 \cdot 4 +_{\mathbb{Z}} 3 \cdot 2, 2 \cdot 4) \equiv && \textit{(Schreiben als Paare natürlicher Zahlen)} \\
\equiv\ & (\\
& \quad (1,0) \cdot (4,0) +_{\mathbb{Z}} \\
& \quad (3,0) \cdot (2,0)\,, \\
& \quad (2,0) \cdot (4,0) \\
&) = && \textit{(Anwenden der } \mathbb{Z}\textit{-Multiplikationsvorschrift)} \\
=\ & (\\
& \quad (1 \cdot 4 +_{\mathbb{N}_0} 0 \cdot 0, 1 \cdot 0 +_{\mathbb{N}_0} 0 \cdot 4) +_{\mathbb{Z}} \\
& \quad (3 \cdot 2 +_{\mathbb{N}_0} 0 \cdot 0, 3 \cdot 0 +_{\mathbb{N}_0} 0 \cdot 2)\,, \\
& \quad (2 \cdot 4 +_{\mathbb{N}_0} 0 \cdot 0, 2 \cdot 0 +_{\mathbb{N}_0} 0 \cdot 4) \\
&) = && \textit{(Ausrechnen der inneren Paarkomponenten} \\
=\ & ((4,0) +_{\mathbb{Z}} (6,0)\,, (8,0)) = && \textit{(Anwenden der } \mathbb{Z}\textit{-Additionsvorschrift)} \\
=\ & ((4 +_{\mathbb{N}_0} 6, 0 +_{\mathbb{N}_0} 0)\,, (8,0)) = && \textit{(Ausrechnen der inneren Paarkomponenten} \\
=\ & ((10_{\mathbb{N}_0}, 0_{\mathbb{N}_0})\,, (8_{\mathbb{N}_0}, 0_{\mathbb{N}_0})) \equiv && \textit{(Schreiben der ganzen Zahlen in Dezimalsc} \\
\equiv\ & (10_{\mathbb{Z}}, 8_{\mathbb{Z}}) \equiv && \textit{(Schreiben der rationalen Zahl in Bruchsch} \\
\equiv\ & \left(\tfrac{10}{8}\right)_{\mathbb{Q}} \equiv \left(\tfrac{5}{4}\right)_{\mathbb{Q}}
\end{aligned}
$$

Hätte man zusätzlich noch die $\mathbb{N}_0$-Rechenvorschriften des ersten Kapitels zum Ausrechnen der inneren Paarkomponenten genutzt, wäre die Rechnung noch länger geworden; je nach persönlichem Geschmack kann man das als unelegant ansehen.

Der alternative Ansatz durch die surrealen Zahlen realisiert den Aufbau nicht durch Stapelung jeweils vorhergehender Zahlenmengen, sondern „in einem Rutsch“, und hat somit dieses Problem nicht.

– Subtraktion

Zur Herleitung der Subtraktionsvorschrift ist es hilfreich, die Subtraktion als Addition des (additiv) Inversen zu begreifen. Geht man diesen Weg, muss man freilich zunächst die Negationsvorschrift definieren.

Dazu kann man den rationalen Zahlrepräsentant (p,q) betrachten. Man erkennt zwei mögliche Negationsvorschriften: $-(p,q) = (-p,q)$ und $-(p,q) = (p,-q)$, wobei das Negationszeichen auf den rechten Seiten die bereits definierte Negation auf den ganzen Zahlen meint.

Man kann frei wählen, welche der beiden Vorschriften man zur Definition der Negation erklärt, da sie äquivalent sind:

$$\begin{array}{rrcll} & -(p,q) & \equiv_{\mathbb{Q}} & -(p,q) & & \textit{(Anwenden der beiden Vorschriften)} \\ & (-p,q) & \equiv_{\mathbb{Q}} & (p,-q) & \Leftrightarrow & \textit{(Anwenden der Äquivalenzrelation)} \\ \Leftrightarrow & (-p)\cdot(-q) & \equiv_{\mathbb{Z}} & p\cdot q & \Leftrightarrow & \textit{(Vereinfachen der linken Seite, erlaubt na} \\ \Leftrightarrow & pq & \equiv_{\mathbb{Z}} & pq & \Leftrightarrow \text{(wahr)} & \end{array}$$

Hier entscheide ich mich für die erste Vorschrift, ich definiere also:

$-(p,q)_{\mathbb{Q}} := (-p,q)_{\mathbb{Q}}$ mit $(p,q) \in \mathbb{Q}$.

Mit bekannter Negationsvorschrift kann man die Subtraktionsvorschrift herleiten:

$$\begin{array}{rll} & (p,q)-(a,b) = & \textit{(Schreiben als Summe)} \\ = & (p,q)+[-(a,b)] = & \textit{(Anwenden der Negationsvorschrift)} \\ = & (p,q)+(-a,b) = & \textit{(Anwenden der Additionsvorschrift)} \\ = & (pb+(-a)\,q,qb) = & \textit{(Schreiben als Differenz)} \\ = & (pb-aq,qb) & \end{array}$$

Also:

Definition der Subtraktion auf den rationalen Zahlen
$(p,q) -_{\mathbb{Q}} (a,b) := (pb -_{\mathbb{Z}} aq, qb)$
mit $(p,q),(a,b) \in \mathbb{Q}$.

Beispiel:

$$\begin{array}{rll} & \left(\frac{1}{2}\right)_{\mathbb{Q}} - \left(\frac{3}{4}\right)_{\mathbb{Q}} \equiv & \textit{(Schreiben als Paare ganzer Zahlen)} \\ \equiv & (1,2)_{\mathbb{Q}} - (3,4)_{\mathbb{Q}} \equiv & \textit{(Anwenden der Subtraktionsvorschrift)} \\ \equiv & (1\cdot 4 -_{\mathbb{Z}} 3\cdot 2, 2\cdot_{\mathbb{Z}} 4) \equiv & \textit{(Ausrechnen der Paarkomponenten)} \\ \equiv & ((-2)_{\mathbb{Z}}, 8_{\mathbb{Z}}) \equiv & \textit{(Schreiben in Bruchschreibweise)} \\ \equiv & \left(\frac{-2}{8}\right)_{\mathbb{Q}} \equiv \left(\frac{-1}{4}\right)_{\mathbb{Q}} & \end{array}$$

– Multiplikation

Anders als bei der Addition und Subtraktion muss bei der Multiplikation kein gemeinsamer Nenner gebildet werden, sondern sie erfolgt einfach komponentenweise. Die Multiplikationsvorschrift der rationalen Zahlen ist daher einfach:

Definition der Multiplikation auf den rationalen Zahlen

$(p, q) \cdot_{\mathbb{Q}} (a, b) := (pa, qb)_{\mathbb{Q}}$

mit $(p, q), (a, b) \in \mathbb{Q}$.

Beispiel:

$$\begin{array}{lll} & \left(\frac{1}{2}\right)_{\mathbb{Q}} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)_{\mathbb{Q}} \equiv & \textit{(Schreiben als Paare ganzer Zahlen)} \\ \equiv & (1, 2)_{\mathbb{Q}} \cdot (3, 4)_{\mathbb{Q}} \equiv & \textit{(Anwenden der Multiplikationsvorschrift)} \\ \equiv & (1 \cdot_{\mathbb{Z}} 3, 2 \cdot_{\mathbb{Z}} 4) \equiv & \textit{(Ausrechnen der Paarkomponenten)} \\ \equiv & (3_{\mathbb{Z}}, 8_{\mathbb{Z}}) \equiv & \textit{(Schreiben in Bruchschreibweise)} \\ \equiv & \left(\frac{3}{8}\right)_{\mathbb{Q}} & \end{array}$$

Es zeigt sich eine beeindruckende Symmetrie zur Definition der Addition auf den ganzen Zahlen: Vertauscht man $\cdot_{\mathbb{Z}}$ durch $+_{\mathbb{N}_0}$ (und passt die Typen entsprechend an), erhält man die Definition der Addition über die ganzen Zahlen (!):

Multiplikationsvorschrift der rationalen Zahlen:	(x, y)	$\cdot_{\mathbb{Q}}$	(a, b)	$:=$	$(x \cdot_{\mathbb{Z}} a,$	$y \cdot_{\mathbb{Z}}$
Additionsvorschrift der ganzen Zahlen:	(x, y)	$+_{\mathbb{Z}}$	(a, b)	$:=$	$(x +_{\mathbb{N}_0} a,$	$y +$

– Division

Die Division auf den rationalen Zahlen wird in der Schule als Multiplikation mit dem Kehrbruch eingeführt ([[QDivKehr]], S. 1). Dieser Weg eignet sich auch für eine formale Herleitung der Divisionsvorschrift.

Der Kehrbruch $\frac{q}{p}$ eines Bruchs $\frac{p}{q}$ ergibt sich durch Vertauschen von Zähler und Nenner. Man definiert also:

$(p, q)_{\mathbb{Q}}^{-1} := (q, p)_{\mathbb{Q}}$ mit $(p, q) \in \mathbb{Q}$ und $p \not\equiv 0$.

Mit bekannter Definition des Kehrbruchs kann man dann die Divisionsvorschrift herleiten:

$$\begin{array}{lll} & (p, q) : (a, b) = & \textit{(Schreiben als Produkt)} \\ = & (p, q) \cdot (a, b)^{-1} = & \textit{(Anwenden der Kehrbruchvorschrift)} \\ = & (p, q) \cdot (b, a) = & \textit{(Anwenden der Multiplikationsvorschrift)} \\ = & (pb, qa) & \end{array}$$

Kurz:

Definition der Division auf den rationalen Zahlen
$(p,q) :_{\mathbb{Q}} (a,b) := (pb, qa)$
mit $(p,q),(a,b) \in \mathbb{Q}$ und $(a,b) \not\equiv 0$ ($\Leftrightarrow a \not\equiv 0$).

Beispiel:

$$\begin{array}{lll} & \left(\frac{1}{2}\right)_{\mathbb{Q}} : \left(\frac{3}{4}\right)_{\mathbb{Q}} \equiv & \textit{(Schreiben als Paare ganzer Zahlen)} \\ \equiv & (1,2)_{\mathbb{Q}} : (3,4)_{\mathbb{Q}} \equiv & \textit{(Anwenden der Divisionsvorschrift)} \\ \equiv & (1 \cdot_{\mathbb{Z}} 4, 2 \cdot_{\mathbb{Z}} 3) \equiv & \textit{(Ausrechnen der Paarkomponenten)} \\ \equiv & (4_{\mathbb{Z}}, 6_{\mathbb{Z}}) \equiv & \textit{(Schreiben in Bruchschreibweise)} \\ \equiv & \left(\frac{4}{6}\right)_{\mathbb{Q}} \equiv \left(\frac{2}{3}\right)_{\mathbb{Q}} & \end{array}$$

Die Symmetrie dieser Definition zur Definition der Subtraktion auf den ganzen Zahlen zeigt sich, wenn man $:$ durch $-$ ersetzt:

$$\begin{array}{llllll} (x,y) & -_{\mathbb{Z}} & (a,b) & := & (x +_{\mathbb{N}_0} b, & y +_{\mathbb{N}_0} a) \\ (x,y) & :_{\mathbb{Q}} & (a,b) & := & (x \cdot_{\mathbb{Z}} b, & y \cdot_{\mathbb{Z}} a) \end{array}$$

Eindeutigkeit der Repräsentation

Wie auch die Realisierung der ganzen Zahlen als Paare natürlicher Zahlrepräsentanten führt auch die Konstruktion der rationalen Zahlen als Paare ganzer Zahlrepräsentanten zu einer nicht-eindeutigen Zahlrepräsentation; es gibt also mehrere (unendlich viele) Elemente aus $\mathbb{Q}$, die alle zueinander äquivalent sind und somit dieselbe rationale Zahl repräsentieren.

Diese Tatsache empfindet man, wie auch bei den ganzen Zahlen, als Problem; zur Lösung kann man die Normalisierungsmethode nutzen oder Äquivalenzklassen bilden, wodurch man eine Menge $\mathbb{Q}^*$ erhält, bei der die Zahlrepräsentation eindeutig ist.

Ohne weitere Angaben meine ich auch im Folgenden mit „Repräsentanten rationaler Zahlen“ immer Elemente aus $\mathbb{Q}$, nicht aus $\mathbb{Q}^*$.

– Eindeutigkeit durch Normalisierung

Eine passende Normalisierungsfunktion ist beispielsweise die folgende, die durch eine (nicht-konstruktive) Abbildungsvorschrift gegeben ist:

$$\begin{array}{rl} n\colon & \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \text{ (Zielmenge)} \\ & (p,q) \mapsto n((p,q)) := (p',q') \\ \text{wobei} & (p',q') \equiv (p,q), \\ & p' \text{ und } q' \text{ teilerfremd (damit ist der Bruch } \frac{p'}{q'} \text{ vollständig gekürzt),} \\ & q' \text{ positiv und} \\ & p' \text{ und } q' \text{ normalisierte Repräsentanten ganzer Zahlen, also} \\ & p',q' \in W_{n_{\mathbb{Z}}} \\ \text{mit} & W_{n_{\mathbb{Z}}}\text{: Wertemenge der } \mathbb{Z}\text{-Normalisierungsfunktion} \end{array}$$

$\mathbb{Q}^* := \{n(x) \,|\, x \in \mathbb{Q}\} \subsetneq \mathbb{Q}$

Beispiel: $\left(\frac{6}{-4}\right)_{\mathbb{Q}^*} = n((6_{\mathbb{Z}}, (-4)_{\mathbb{Z}})) = (n_{\mathbb{Z}}((-3)_{\mathbb{Z}}), n_{\mathbb{Z}}(2_{\mathbb{Z}})) = ((0_{\mathbb{N}_0}, 3_{\mathbb{N}_0}), (2_{\mathbb{N}_0}, 0_{\mathbb{N}_0}))$

(Ich habe $\mathbb{Q}$ als $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus [0_{\mathbb{Z}}])$ definiert. Wenn man $\mathbb{Q}$ dagegen als $\mathbb{Z}^* \times (\mathbb{Z}^* \setminus \{0_{\mathbb{Z}^*}\})$ definiert (wobei es keine Rolle spielt, ob man mit $\mathbb{Z}^*$ die über die Normalisierung oder die über Äquivalenzklassenbildung definierte Menge eindeutiger Repräsentanten ganzer Zahlen meint), kann man die letzte Forderung in der Definition der Normalisierungsfunktion, p' und q' sollten normalisierte Repräsentanten ganzer Zahlen sein, weglassen, da sie bereits in der Struktur von $\mathbb{Z}^*$ enthalten ist.)

Die Rechenoperatoren und Relationen überträgt man analog wie bei den ganzen Zahlen, also $n(x) +_{\mathbb{Q}^*} n(y) := n(x +_{\mathbb{Q}} y)$, $n(x) -_{\mathbb{Q}^*} n(y) := n(x -_{\mathbb{Q}} y)$, usw.

– Eindeutigkeit durch Äquivalenzklassen

Alternativ kann man auch Äquivalenzklassen bilden, um eine eindeutige Zahlrepräsentation zu erreichen:

$\mathbb{Q}^* := \{[x] \,|\, x \in \mathbb{Q}\} \not\subset \mathbb{Q}$ mit $[x] = \{x' \in \mathbb{Q} \,|\, x' \equiv x\}$.

Beispiel:

$$\begin{array}{rcl} \left(\frac{6}{-4}\right)_{\mathbb{Q}^*} & = & \{ \\ & & \quad \underbrace{((6,0),(0,4))\,,\,((7,1),(1,5))\,,\,((8,2),(2,6))\,,\ldots}_{\text{alle äquivalent zu } \left(6_{\mathbb{Z}},(-4)_{\mathbb{Q}}\right)}, \\ & & \quad \underbrace{((3,0),(0,2))\,,\,((4,1),(1,3))\,,\,((5,2),(2,4))\,,\ldots}_{\text{alle äquivalent zu } \left(3_{\mathbb{Z}},(-2)_{\mathbb{Q}}\right)}, \\ & & \quad \ldots \\ & & \} \end{array}$$

Die Rechenoperatoren und Relationen überträgt man analog wie bei den ganzen Zahlen, also $[x] +_{\mathbb{Q}^*} [y] := [x +_{\mathbb{Q}} y]$, $[x] -_{\mathbb{Q}^*} [y] := [x -_{\mathbb{Q}} y]$, usw.

Einbettung der ganzen Zahlen in die rationalen Zahlen

Genau wie die Aussage, die Menge der Repräsentanten natürlicher Zahlen wie hier definiert sei eine Teilmenge der Menge der Repräsentanten ganzer Zahlen, falsch ist, ist auch die korrespondierende Aussage über das Verhältnis der ganzen Zahlen zu den rationalen Zahlen falsch – Elemente von $\mathbb{Z}$ sind Paare natürlicher Zahlrepräsentanten, während Elemente von $\mathbb{Q}$ Paare von Repräsentanten ganzer Zahlen sind.

Möchte man die Idee hinter der Aussage formalisieren, so muss man daher die ganzen Zahlen in die rationalen Zahlen einbetten – analog zur Einbettung der natürlichen Zahlen in die ganzen Zahlen (beschrieben auf S. [[LINK:EinbNZ]]).

Ein möglicher Isomorphismus f, der umkehrbar eineindeutig $\mathbb{Z}$ auf die Teilmenge $\mathbb{Z}_{\mathbb{Q}}$ der rationalen Repräsentanten ganzer Zahlen abbildet und dabei bezüglich der Äquivalenzrelation die Bedeutung erhält, ist der folgende. Idee hinter der Definition ist, Ganzzahlrepräsentanten x durch Brüche $\frac{x}{1}$ darzustellen.

Einbettung der ganzen Zahlen in die rationalen Zahlen

f: $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{\mathbb{Q}} \subsetneq \mathbb{Q}$ (Wertemenge)

$$x \mapsto f(x) := \underbrace{(x, (1_{\mathbb{N}_0}, 0_{\mathbb{N}_0}))_{\mathbb{Q}}}_{\equiv (x, 1_{\mathbb{Z}})}$$

f^{-1}: $\mathbb{Q} \supsetneq \mathbb{Z}_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{Z}$ (Wertemenge)

$$\underbrace{(x, (1_{\mathbb{N}_0}, 0_{\mathbb{N}_0}))_{\mathbb{Q}}}_{\equiv (x, 1_{\mathbb{Z}})} \mapsto f^{-1}\left(\underbrace{(x, (1_{\mathbb{N}_0}, 0_{\mathbb{N}_0}))_{\mathbb{Q}}}_{\equiv (x, 1_{\mathbb{Z}})}\right) := x$$

Beispiele: $f(3_{\mathbb{Z}}) \equiv_{\mathbb{Q}} (3_{\mathbb{Z}}, 1_{\mathbb{Z}})_{\mathbb{Q}} \equiv_{\mathbb{Q}} 3_{\mathbb{Q}}$, $\quad f^{-1}(3_{\mathbb{Q}}) \equiv_{\mathbb{Z}} f^{-1}\Big((3_{\mathbb{Z}}, 1_{\mathbb{Z}})_{\mathbb{Q}}\Big) \equiv_{\mathbb{Z}} 3_{\mathbb{Z}}$

Dass f die Bedeutung erhält und somit in der Tat ein Isomorphismus ist, muss noch bewiesen werden, was ich hier aus Platzgründen nur an der Addition zeigen werde:

$$
\begin{aligned}
& f(x) +_{\mathbb{Q}} f(y) = && \text{(Anwenden der Abbildungsvorschrift)}\\
= \; & (x,(1,0)) +_{\mathbb{Q}} (y,(1,0)) = && \text{(Anwenden der } \mathbb{Q}\text{-Additionsvorschrift)}\\
= \; & (x \cdot (1,0) +_{\mathbb{Z}} y \cdot (1,0), (1,0) \cdot_{\mathbb{Z}} (1,0)) = && \text{(Ausrechnen der Paarkomponenten)}\\
= \; & (x+y,(1,0)) = &&\\
= \; & f(x +_{\mathbb{Z}} y) &&
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& f^{-1}\Big((x,(1,0))_{\mathbb{Q}} +_{\mathbb{Q}} (y,(1,0))_{\mathbb{Q}} \Big) = \\
= \; & f^{-1}((x \cdot (1,0) + y \cdot (1,0)\,, (1,0) \cdot (1,0))) = \\
= \; & f^{-1}((x +_{\mathbb{Z}} y, (1,0))) = \\
= \; & x +_{\mathbb{Z}} y = \\
= \; & f^{-1}\Big((x,(1,0))_{\mathbb{Q}}\Big) +_{\mathbb{Z}} f^{-1}\Big((y,(1,0))_{\mathbb{Q}}\Big)
\end{aligned}
$$

6.3.5 Reelle Zahlen

In diesem Abschnitt werden zwei Realisierungen der reellen Zahlen vorgestellt. Da bei beiden ein umfangreicher Formalismus für eine rigorose Darstellung notwendig ist, werde ich hier nur die Grundideen der beiden Realisierungen vorstellen und für weiterführende Informationen und Beweise auf Literatur verweisen.

Unkonstruktive Realisierung der reellen Zahlen

Bei der sog. unkonstruktiven Realisierung der reellen Zahlen stellt man die Körperaxiome (Assoziativität und Kommutativität der Addition und Multiplikation, Existenz neutraler und inverser Elemente bezüglich Addition und Multiplikation und Distributivität ($a(b+c) = ab+ac$) und das Vollständigkeitsaxiom (grob: Zwischen zwei reelle Repräsentanten rationaler Zahlen passen unendlich viele Repräsentanten reeller Zahlen) und zeigt dann, dass es a) Mengen und Verknüpfungen gibt, die diese Axiome erfüllen, und b) dass alle Realisierungen, die diese Axiome erfüllen, zueinander isomorph sind.

Man nennt diese Realisierung der reellen Zahlen „unkonstruktiv“, da sie nicht die Zahlenmenge, $\mathbb{R}$, und die Verknüpfungen, $+$, $-$, $\cdot$, $:$, direkt angibt, sondern nur die Axiome, die sie erfüllen müssen.

Vertreter des mathematischen Konstruktivismus lehnen die unkonstruktive Realisierung der reellen Zahlen ab; ihrer Meinung nach existiert ein mathematisches Objekt nur dann, wenn es eine

Methode gibt, die das betreffende mathematische Objekt konstruiert.

Vertreter der konventionellen Meinung haben einen allgemeineren Existenzbegriff: Ihnen zufolge existiert ein mathematisches Objekt auch dann, wenn beispielsweise bewiesen wurde, dass die Annahme der Nichtexistenz des Objekts zu einem Widerspruch führt. [[RKonstr]], [[RWikiDeKonstr]]

Konstruktive Realisierung der reellen Zahlen

Eine konstruktive Realisierung der reellen Zahlen, die auch Vertreter des mathematischen Konstruktivismus akzeptieren, basiert auf den rationalen Zahlen. Dabei begreift man reelle Zahlen als Grenzwert bestimmer Folgen (sog. Cauchy-Folgen), beispielsweise definiert man π als Grenzwert der Folge $3, 3{,}1, 3{,}14, 3{,}141, 3{,}1415, \ldots$.

6.3.6 Surreale Zahlen

In diesem Kapitel werde ich die surrealen Zahlen vorstellen, deren Aufbau sich von dem der natürlichen, ganzen und rationalen Zahlen grundlegend unterscheidet.

Die surrealen Zahlen umfassen die konventionellen Zahlenbereiche $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ und darüberhinaus transfinite und infinitesimale Zahlen (Zahlen, die größer als jede reelle Zahl bzw. kleiner als jede positive reelle Zahl sind) und bilden, bis auf eine kleine formale Feinheit, sogar einen Körper.

Die surrealen Zahlen zeichnen sich durch eine Vielzahl faszinierender Eigenschaften aus, die ich hier kurz darlegen werde. Die Eleganz und vielen Möglichkeiten der surrealen Zahlen kommen leider zu einem hohen Preis – Rechnungen und Beweise werden sehr lang –, weswegen ich hier aus Platzgründen nur eine grobe Einführung in die surrealen Zahlen geben kann.

Erfunden/entdeckt wurden die surrealen Zahlen 1974 durch den englischen Mathematiker und theoretischen Physiker John Horton Conway (* 1937). Standardwerke sind Conways **On Numbers and Games** (1976) und Donald E. Knuths **Surreal Numbers: How Two Ex-Students Turned on to Pure Mathematics and Found Total Happiness** (1974). [[SWikiDeSurr]]

Anwendung finden die surrealen Zahlen in der Nichtstandardanalysis, der kombinatorischen Spieltheorie und sind eng verknüpft mit der Theorie der Ordinalzahlen. Die Bedeutung der surrealen Zahlen für die Nichtstandardanalysis und die kombinatorische Spieltheorie werde hier auch darlegen.

Rekapitulation des konventionellen Aufbaus

Beim konventionellen Aufbau der Zahlenmengen wie hier präsentiert führt man alle Rechenoperationen und Relationen aufs Zählen zurück. Zuerst angewendet wird dieses Konzept bei der Definition der Addition auf den natürlichen Zahlen –

$n + S(m) := S(n + m)$, mit $n, m \in \mathbb{N}_0$

– und auch die anderen Grundrechenarten führt man entweder direkt aufs Zählen zurück oder auf die Addition, die ihrerseits aufs Zählen führt. Das Anfangselement 0 und die Nachfolgerfunktion S können wahlweise abstrakt bleiben oder konkretisiert werden.

Ganze Zahlen begreift man als Paare natürlicher Zahlrepräsentanten, wobei die erste Paarkomponente eines Repräsentanten angibt, wie oft man, von der Null ausgehend, vorwärts zählt, und die zweite angibt, wie oft man, vom Ergebnis des Vorwärtszählens, rückwärts zählt. Die Definitionen der Operatoren und Relationen führt man auf die bereits definierten Regeln der natürlichen Zahlen zurück, wie beispielsweise bei der Definition der $\mathbb{Z}$-Multiplikation einsehbar:

$(n, m) \cdot_{\mathbb{Z}} (\nu, \mu) := (n\nu +_{\mathbb{N}_0} m\mu, n\mu +_{\mathbb{N}_0} m\nu)$ mit $(n, m), (\nu, \mu) \in \mathbb{Z}$.

Auf der rechten Seite der Definition wird die $\mathbb{N}_0$-Addition und -Multiplikation genutzt, die ihrerseits beide über das Zählkonzept definiert sind.

Da die Zahlrepräsentation bei den ganzen Zahlen als Paare natürlicher Zahlrepräsentanten nicht eindeutig ist, muss man eine Äquivalenzrelation ($\equiv$) definieren und, wenn man eine Menge eindeutiger Repräsentanten aufstellen will, normalisieren oder Äquivalenzklassen bilden.

Rationale Zahlen begreift man als Paare ganzer Zahlrepräsentanten und führt die Operatoren und Relationen auf Vorschriften auf den ganzen Zahlen zurück. Da bei der so gebildeten Menge der Repräsentanten rationaler Zahlen die Zahlrepräsentation nicht eindeutig ist, muss man, wie bei den ganzen Zahlen, eine Äquivalenzrelation einführen.

Unzufriedenheiten mit dem konventionellen Aufbau

In diesem Abschnitt werde ich einige Unzulänglichkeiten des konventionellen Aufbaus der Zahlenbereiche aufzeigen. Der Alternativaufbau durch die surrealen Zahlen hat diese Unzulänglichkeiten nicht; dieser Abschnitt begründet daher die Einführung der surrealen Zahlen.

– Komplexität durch den „gestapelten“ Aufbau

Wie die längere Beispielrechnung auf S. [[LINK:QLang]] gezeigt hat, ist das Rechnen mit rationalen Zahlen nach den in dieser Arbeit hergeleiteten Vorschriften umständlich.

In der Praxis nutzt man daher Symbolmanipulationstechniken (schriftliches Addieren, schriftliches Multiplizieren), die es ersparen, von der hohen Ebene der Vorschriften der rationalen Zahlen zum einfachen Zählen zurückkommen zu müssen.

Das geht, wie in der Einleitung auf S. [[LINK:Einl]] schon erwähnt, so weit, dass die Ideen hinter dem Aufbau der Zahlen größtenteils unbekannt sind.

Auch wenn in der Praxis dieser „gestapelte“ Aufbau der Zahlenmengen keine Rolle spielt, so hätte man, von einem mathematisch-ideologischen Standpunkt aus betrachtet, trotzdem lieber einen Aufbau, der alle Zahlen „in einem Rutsch“ liefert. Der Ansatz durch die surrealen Zahlen liefert genau das.

– Unzulänglichkeiten im Umgang mit Unendlichkeiten

Es gibt noch einen anderen Grund, wieso man mit dem konventionellen Aufbau der Zahlenmengen unzufrieden sein könnte: Der Umgang mit Unendlichkeiten ist, im Vergleich zu den surrealen Zahlen, unnötig kompliziert.

Weder die natürlichen, noch die ganzen, rationalen oder reellen Zahlen enthalten Objekte wie „Unendlich“ oder „minus Unendlich“. Naive Versuche, sie einzuführen, schlagen fehl, da viele gewohnte Eigenschaften, die man eigentlich beibehalten möchte, verletzt werden, wie folgendes Beispiel illustriert:

$$
\begin{aligned}
& \tfrac{\infty}{\infty} = \\
= {} & 1 && \text{nach der Regel } x : x = 1 \\
\\
& \tfrac{\infty}{\infty} = && \textit{(Umformen des Zählers, nach } \infty + \infty = \infty\textit{)} \\
= {} & \tfrac{\infty+\infty}{\infty} = && \textit{(Zusammenfassen der Zählers)} \\
= {} & \tfrac{2\infty}{\infty} = && \textit{(Kürzen)} \\
= {} & 2 \neq \\
\neq {} & 1 && \text{Widerspruch zum Ergebnis des anderen Rechenwegs!}
\end{aligned}
$$

Bei den reellen Zahlen löst man das Problem teilweise durch die Einführung des Grenzwertbegriffs, mit dem u.a. der Polstellen- und Asymptotenbegriff formalisiert werden können, ohne dass man ∞ und $-\infty$ zur Zahlenmenge hinzufügen müsste, was zu Inkonsistenzen führen würde.

Intuitiv fehlt dem Grenzwertbegriff aber noch etwas: Vergleicht man beispielsweise die Funktionen f und g mit $f(x) = \frac{1}{x}$ und $g(x) = \frac{1}{x^2}$ ($x \in \mathbb{R}$) hinsichtlich ihres Verhaltens im Unendlichen. . .

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \tfrac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \tfrac{1}{x^2} = 0$$

. . .so stellt man fest, dass sie beide für $x \to \infty$ gegen Null konvergieren. Die Anschauung akzeptiert zwar, dass sich beide Graphen mit zunehmenden x immer mehr an die x-Achse anschmiegen, trotzdem verläuft der Graph von f (ab der Stelle 1) über dem von g; wie also können f und g beide zum gleichen Wert, Null, konvergieren?

(Der Grenzwertbegriff in seiner axiomatischen Formulierung über ε/δ-Schranken (in der Schule nur über ε-Schranken) ist natürlich widerspruchsfrei.)

Mithilfe der surrealen Zahlen kann man Funktionen auf ihr Verhalten im Unendlichen viel einfacher hin untersuchen, da man einfach den Funktionswert „bei Unendlich“ (in einem Sinne, den ich weiter unten präzisieren werde) ausrechnen kann.

In einem gewissen Sinne kann man bei den surrealen Zahlen sagen, dass f und g beide gegen Null konvergieren, der Grenzwert von f aber trotzdem größer (infinitesimal größer) als g ist.

Alternativer Ansatz durch die surrealen Zahlen

Die Konstruktion der surrealen Zahlen unterscheidet sich von der Konstruktion der natürlichen, ganzen und rationalen Zahlen grundlegend; man bildet weder Paare von Repräsentanten von Zahlen der jeweils vorhergehenden Menge, noch nutzt man eine Nachfolgerfunktion.

Wie auch bei den ganzen und rationalen Zahlen ist die Zahlrepräsentation bei den surrealen Zahlen nicht eindeutig. Die gängige Lösung des Problems besteht im Bilden von Äquivalenzklassen.

Da man, wie ich gleich zeigen werde, zum direkten Umgang mit surrealen Zahlen den Definitionen entsprechend einen großen rechnerischen Aufwand treiben muss, werde ich die besonderen Eigenschaften der surrealen Zahlen ausschließlich auf der Ebene der Symbolmanipulation darlegen und auf Literatur für eine genauere Behandlung der Themen verweisen.

– Konstruktionsregel

Bei den surrealen Zahlen stehen zwei Regeln im Mittelpunkt, die sog. Konstruktionsregel und die Vergleichsregel. Die Konstruktionsregel gibt an, wie man surreale Zahlen konstruiert; die Vergleichsregel definiert die Kleinergleichrelation.

Im Folgenden bezeichne ich mit $\mathbb{S}$ die Menge der Repräsentanten surrealer Zahlen.

Konstruktionsregel der surrealen Zahlen

Sind L und R zwei Mengen von Repräsentanten surrealer Zahlen, dann (und nur dann) repräsentiert auch das Paar (L, R) eine surreale Zahl, wenn zusätzlich gilt: Kein Element von R ist kleinergleich einem Element von L. In Symbolen:

$L, R \in \mathbb{S} \Leftrightarrow (L, R) \in \mathbb{S}$, wenn für kein $r \in R$ gilt: $r \leq l$ (für mindestens ein $l \in L$)

Repräsentaten surrealer Zahlen sind also Paare von Mengen von Repräsentanten surrealer Zahlen. Die erste Paarkomponente bezeichnet man als „linke Menge“, die zweite als „rechte Menge“.

Manchmal begreift man Repräsentanten surrealer Zahlen auch als „Bimengen“ (bi-sets), die, anders als normale Mengen, die nur über eine Art von Zugehörigkeit ($\in$) verfügen, zwei Arten der Zugehörigkeit unterscheiden – eine „linke Zugehörigkeit“ und eine „rechte Zugehörigkeit“.

Man schreibt dann statt $(\{\ldots\}, \{\ldots\})$ $\{\ldots \mid \ldots\}$. Verwechslungsgefahr mit der Mengenkonstruktionsnotation ($\{f(x) \mid \phi(x)$ ist wahr$\}$) besteht in englischsprachiger

Literatur weniger, da dort häufig der Doppelpunkt statt des senkrechten Strichs bei der Mengenkonstruktionsnotation genutzt wird.

Hier werde ich ausschließlich die Paarnotation nutzen.

Konstruktion der Null

Die Konstruktionsregel definiert, wie man, wenn man bereits zwei Mengen surrealer Zahlen kennt, weitere surreale Zahlen konstruieren kann. Das scheint an dieser Stelle ein Widerspruch zu sein: Man kennt ja noch keine surreale Zahlen – wie soll man dann welche konstruieren?

Die Definition ergibt Sinn, wenn man bedenkt, dass man als linke Menge L und rechte Menge R auch die leere Menge $\{\}$ nehmen kann. Die zusätzliche Beschränkung, dass kein $r \in R$ kleinergleich einem Element von L ist, gilt: Da die leere Menge keine Elemente enthält, gibt es auch keine Elemente, die gegen die Beschränkung verstoßen könnten („vacuous truth").

Damit hat man einen Repräsentanten einer surrealen Zahl gefunden, die, wie sich später herausstellen wird, die Funktion der Null erfüllt:

$0_{\mathbb{S}} := (\{\}, \{\})$

Bei der Definition der Zahlensymbole der ganzen und rationalen Zahlen habe ich die Identität der Symbole nicht definiert, und nur eine Äquivalenzbeziehung hergestellt: $0_{\mathbb{Z}} :\equiv (0, 0)$, $0_{\mathbb{Q}} :\equiv (0, 1)$. Der Grund liegt darin, dass die Zahlrepräsentation bei den ganzen und rationalen Zahlen wie in dieser Arbeit realisiert nicht eindeutig ist und ich nicht „willkürlich" einen Repräsentanten auszeichnen wollte.

Obwohl auch die Zahlrepräsentation bei den surrealen Zahlen nicht eindeutig ist, definiere ich hier die Identität der Zahlensymbole der surrealen Zahlen, da es im weiteren Verlauf günstig ist, Namen für ganz bestimmte Repräsentanten zu haben. Auch folge ich damit den Konventionen von anderen Arbeiten über surreale Zahlen, wie beispielsweise [[SWikiDeSurr]], [[SWikiEnSurr]], [[SKnuth]] und [[STondering]].

Man muss sich bewusst sein, dass es trotz meiner Definition der Identität der Zahlsymbole unendlich viele weitere Repräsentanten neben den ausgezeichneten gibt, die alle zueinander äquivalent sind und somit dieselbe Zahl repräsentieren.

– Vergleichsregel

Jetzt, da ein Repräsentant einer surrealen Zahl bereits bekannt ist, kann man ihn zur Bildung einer einelementigen Menge von Repräsentanten surrealer Zahlen heranziehen, welche man dann als linke und rechte Menge verwenden kann.

Auf diese Weise kommen folgende Paare von Mengen von Repräsentanten surrealer Zahlen in Betracht:

a) $L = \{0_\$\}\,,\quad R = \{\}:\qquad (\{0_\$\}\,,\{\})$
b) $L = \{\}\,,\qquad R = \{0_\$\}:\quad (\{\}\,,\{0_\$\})$
c) $L = \{0_\$\}\,,\quad R = \{0_\$\}:\quad (\{0_\$\}\,,\{0_\$\})$

Die Konstruktionsregel fordert die zusätzliche Beschränkung, dass kein Zahlrepräsentant $r \in R$ kleinergleich einem Repräsentant aus L ist. Um zu überprüfen, ob die Kandidaten a), b) und c) diese Bedingung erfüllen, muss man natürlich zunächst die Kleinergleichrelation definieren:

Vergleichsregel der surrealen Zahlen

Ein surrealer Zahlrepräsentant $x = (L_x, R_x)$ ist genau dann kleinergleich einem Zahlrepräsentanten $y = (L_y, R_y)$, wenn y kleinergleich keinem Element von L_x ist und wenn kein Element von R_y kleinergleich x ist. In Symbolen:

$x = (L_x, R_x) \leq (L_y, R_y) = y \Leftrightarrow$

$y \leq l_x$ für kein $l_x \in L_x$ und $r_y \leq x$ für kein $r_y \in R_y$.

Diese Definition ist, wie auch die Konstruktionsregel, rekursiv. Gebrochen wird die Rekursion durch quantifizierte Aussagen über der leeren Menge.

Mit bekannter Definition der Kleinergleichrelation kann man nun überprüfen, welche der Kandidaten gültige Repräsentanten surreale Zahlen sind:

- Kandidat a) $(\{0_\$\}\,,\{\})$ erfüllt die Bedingung – für kein $r \in R = \{\}$ soll $r \leq l$ (für mindestens ein $l \in L = \{0_\$\}$) gelten. Da R die leere Menge ist, ist die Bedingung trivialerweise erfüllt; Kandidat a) ist ein gültiger Repräsentant einer surrealen Zahl, die, wie nach der Definition der Addition klar werden wird, die Funktion der Eins erfüllt; man definiert:

  $1_\$:= (\{0_\$\}\,,\{\})$

- Auch Kandidat b) $(\{\},\{0_\$\})$ erfüllt die Bedingung – da die linke Menge die leere Menge ist, gibt es kein $l \in L$, für das $r \leq l$ gelten könnte und somit die Konstruktionsregel verletzt werden könnte. Wie sich später herausstellen wird, handelt es sich bei Kandidat b) um einen Repräsentanten der Zahl (-1).

  $(-1)_\$:= (\{\},\{0_\$\})$

- Kandidat c) erfüllt die Bedingung nicht, da $0_\$ \in R$ kleinergleich $0_\$ \in L$ ist und somit die Bedingung der Konstruktionsregel verletzt:

  $$\begin{array}{rlll} & 0_\$ \leq 0_\$ & \Leftrightarrow & \textit{(Schreiben als Paare)} \\ \Leftrightarrow & (\{\},\{\}) \leq (\{\},\{\}) & \Leftrightarrow & \textit{(Anwenden der Vergleichsregel} \\ \Leftrightarrow & 0_\$ \leq l_x \text{ für kein } l_x \in L_x = \{\} & \text{und} & \\ \text{und} & r_y \leq 0_\$ \text{ für kein } r_y \in R_y = \{\} & \Leftrightarrow \text{(wahr)} & \end{array}$$

Die Konstruktionsregel kann man nun, da man mit insgesamt drei bekannten Repräsentanten surrealer Zahlen – (-1), 0 und 1 – neue Mengen von Repräsentanten surrealer Zahlen bilden kann, erneut anwenden.

Mit jeder Anwendung der Konstruktionsregel findet/konstruiert man neue Zahlrepräsentanten; der Vorgang lässt sich unbegrenzt fortsetzen.

– Äquivalenzrelation der surrealen Zahlen

Man definiert zwei surreale Zahlen als äquivalent, wenn die eine kleinergleich der anderen ist und umgekehrt. In Symbolen:

Definition der Äquivalenz auf den surrealen Zahlen

$x \equiv_\$ y :\Leftrightarrow x \leq_\$ y$ und $y \leq_\$ x$

mit $x, y \in \$$.

Beispiel:

$$\begin{array}{rcccll} & 0 & \equiv & 0 & \Leftrightarrow & \textit{(Anwenden der Äquivalenzrelation)} \\ \Leftrightarrow & 0 & \leq & 0 & \text{und} & \\ \text{und} & 0 & \leq & 0 & \Leftrightarrow & \text{(wahr), nach S. [[LINK:S00]]} \end{array}$$

Auf die Beweise der Reflexivität, Symmetrie und Transitivität der Äquivalenzrelation verzichte ich an dieser Stelle.

Die Zahlrepräsentation ist bei den surrealen Zahlen nicht eindeutig, beispielsweise repräsentieren $(\{\},\{\})$ und $(\{-1\},\{1\})$ beide die

Null. Der Beweis, dass $(\{\},\{\}) \equiv (\{-1\},\{1\})$, folgt aus mehrmaligem Anwenden der Vergleichsregel, ist aber vergleichsweise lang, weswegen ich ihn hier nicht ausführen werde.

Wie bei den ganzen und rationalen Zahlen löst man das Problem, indem man Äquivalenzklassen von Repräsentanten, die alle zueinander äquivalent sind, bildet.

$0_{\$^*} := [0_\$] = \{(\{\},\{\}),(\{-1\},\{1\}),\ldots\}$

Anders als bei der Äquivalenzklassenbildung bei den ganzen und rationalen Zahlen ist bei den surrealen Zahlen nicht unmittelbar offensichtlich, welche Repräsentanten zu $0_\$ = (\{\},\{\})$ äquivalent sind; mathematisch stellt dies aber kein Problem dar.

– Addition auf den surrealen Zahlen

In diesem Abschnitt wird die Definition der Addition auf den surrealen Zahlen definiert. Um diese übersichtlich notieren zu können, benötigt man eine Kurzschreibweise, die sog. mengentheoretischen Erweiterung des $+$-Operators, die wie folgt definiert ist:

$z \oplus M := \{z + m \,|\, m \in M\}$

$M \oplus z := \{m + z \,|\, m \in M\}$

mit $z \in \$$ und M eine Menge von Repräsentanten surrealer Zahlen. Bei $\oplus$ wird also eine Addition für jedes Element der Menge ausgeführt, zwei Zahlenbeispiele verdeutlichen das:

$5 \oplus \{1,2,3\} = \{5+1, 5+2, 5+3\}, \qquad \{\} + 5 = \{\}$

Definition der Addition auf den surrealen Zahlen

$x + y = ((L_x \oplus y) \cup (x \oplus L_y), (R_x \oplus y) \cup (x \oplus R_y))$

mit $x, y \in \$$ und $x = (L_x, R_x), y = (L_y, R_y)$.

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
& 0_\$ + 1_\$ = && \textit{(Schreiben als Paare)} \\
= \; & (\{\}\,,\{\}) + (\{0_\$\}\,,\{\}) = && \textit{(Anwenden der Additionsvorschrift)} \\
= \; & (\\
& \quad (\{\} \oplus 1_\$) \cup (0_\$ \oplus \{0_\$\})\,, \\
& \quad (\{\} \oplus 1_\$) \cup (0_\$ \oplus \{\}) \\
&) = \\
= \; & (\,\{\} \cup \{0_\$ + 0_\$\}\,,\, \{\} \cup \{\}\,) = \\
= \; & (\{0_\$ + 0_\$\}\,,\{\}) = && \textit{(Schreiben als Paare)} \\
= \; & (\{(\{\}\,,\{\}) + (\{\}\,,\{\})\}\,,\{\}) = && \textit{(Anwenden der Additionsvorschrift)} \\
= \; & (\\
& \quad \{(\\
& \qquad (\{\} \oplus 0_\$) \cup (0_\$ \oplus \{\})\,, \\
& \qquad (\{\} \oplus 0_\$) \cup (0_\$ \oplus \{\}) \\
& \quad)\}\,, \\
& \quad \{\} \\
&) = \\
= \; & (\\
& \quad \{\ (\{\}\,,\{\})\ \}\,, \\
& \quad \{\} \\
&) = \\
= \; & (\{0_\$\}\,,\{\}) = 1_\$
\end{aligned}
$$

Die Bezeichnungen 0 und 1 für $(\{\}\,,\{\})$ bzw. $(\{0\}\,,\{\})$ waren also, zumindest für dieses Beispiel, gerechtfertigt.

Es ist nicht besonders schwer, allgemein zu zeigen, dass die hier definierte Addition kommutativ und assoziativ ist und alle Repräsentanten, die zu $0_\$$ äquivalent sind, neutrale Elemente sind; die Beweise sind zwar einfach, da sie sich direkt aus den jeweiligen Definitionen ergeben, nehmen aber viel Platz in Anspruch, weswegen ich sie hier nicht ausführe. Nachlesen kann man sie in [[STondering]], [[SKnuth]] und [[SUnknown]].

Die anderen Operatoren kann ich hier aus Platzgründen nicht definieren. Auch kann ich keine Herleitungen der Definitionen anführen, wie bei den natürliche, ganzen und rationalen Zahlen getan, da es ja keine bereits bekannten Umformungsregeln für die surrealen Zahlen gibt, von denen man Definitionen ableiten könnte.

– Fortsetzung des Konstruktionsverfahrens

Setzt man das Konstruktionsverfahren unbegrenzt fort, erhält man (hier ohne Beweis) Repräsentanten aller Zahlen der Form $\frac{a}{2^b}$ mit a

ganz und b natürlich (die sog. dyadischen Brüche). Speziell für $b = 0$ ergeben sich die ganzen Zahlen.

Der Clou: Man kann nun die unendlich große Menge der surrealen Repräsentanten ganzer Zahlen (oder Teilmengen von ihr), $\{0_\$, 1_\$, 2_\$, 3_\$, \ldots\}$, selbst als linke oder rechte Menge nehmen! Damit erhält man folgende Zahlrepräsentanten:

$\omega := (\{0, 1, 2, 3, \ldots\}, \{\})$

$-\omega = (\{\}, \{0, -1, -2, -3, \ldots\})$

ω und $-\omega$ haben die besondere Eigenschaft, dass sie größer bzw. kleiner als jeder surreale Repräsentant einer natürlichen Zahl sind! Für sie gelten u.a. folgende Rechenregeln:

$\omega + (-\omega) \equiv 0,\ \pm\omega \cdot 0 \equiv 0,$

Darüberhinaus gibt es bei den surrealen Zahlen nicht nur zwei transfinite Zahlen, repräsentiert durch ω und $-\omega$, sondern unendlich viele weitere (!), die man erhält, wenn man $\pm\omega$ und Ergebnisse von Rechenoperationen mit $\pm\omega$ als Elemente von linker und rechter Menge zulässt:

$2\omega \equiv (\{\omega, \omega + 1, \omega + 2, \omega + 3, \ldots\}, \{\}) \equiv \omega + \omega > \omega$

$-2\omega \equiv (\{\}, \{-\omega, -\omega - 1, -\omega - 2, -\omega - 3, \ldots\}) \equiv (-\omega) + (-\omega) < -\omega$

$\omega^2 \equiv (\{\omega, 2\omega, 3\omega, 4\omega, \ldots\}, \{\}) \equiv \omega \cdot \omega > \omega$

$-\omega^2 \equiv (\{\}, \{-\omega, -2\omega, -3\omega, -4\omega, \ldots\}) \equiv -\omega \cdot \omega < -\omega$

Es gibt sogar Zahlen, die zwar größer als jede positive reelle Zahl sind, aber kleiner als ω! Ein Beispiel einer solchen Zahl ist $\omega - 1$:

$r < \omega - 1 \equiv (\{0, 1, 2, 3, \ldots\}, \{\omega\}) < \omega$ für alle $r \in \mathbb{R}_\$$.

Die multiplikativ Inversen von transfiniten Zahlen sind sog. infinitesimale Zahlen:

$\varepsilon := \left(\{0\}, \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\right\}\right) \equiv \frac{1}{\omega}$

$-\varepsilon = \left(\left\{-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \ldots\right\}, \{0\}\right) \equiv \frac{1}{-\omega}$

ε ist Repräsentant einer infinitesimalen Zahl, die größer Null, aber kleiner als jede positive reelle Zahl ist. In Symbolen: $0 < \varepsilon < r$ für alle $r \in \mathbb{R}_\$$.

Wie auch von den transfiniten Zahlen gibt es unendlich viele infinitesimale Zahlen:

$1 > 2\varepsilon \equiv \left(\{\varepsilon\}, \left\{\varepsilon + 1, \varepsilon + \frac{1}{2}, \varepsilon + \frac{1}{4}, \ldots\right\}\right) \equiv \varepsilon{+}\varepsilon > \varepsilon > 0 - 2\varepsilon$ repräsentiert eine Zahl, die größer ϵ, aber trotzdem noch kleiner als jede positive reelle Zahl ist.

$0 < \varepsilon^2 \equiv \frac{1}{\omega^2} \equiv \frac{1}{\omega}\frac{1}{\omega} \equiv \varepsilon\varepsilon < \varepsilon - \varepsilon^2$ repräsentiert eine Zahl, die kleiner als ϵ, aber immer noch positiv ist, die also zwischen 0 und ϵ liegt.

Infinitesimale Zahlen gibt es nicht nur in der Umgebung von Null:

$3 < 3 + \varepsilon < r$ für alle $r \in \mathbb{R}_\mathbb{S}, r > 3$

$\omega - \varepsilon$ repräsentiert eine Zahl, die größer als jede reelle Zahl ist, aber kleiner ω.

Im Folgenden werde ich mit ω und ε nur symbolhaft umgehen, also nicht ihre Definitionen als Paar zweier Mengen von Repräsentanten surrealer Zahlen nutzen, da das Rechnen auf dieser unteren Ebene sehr mühselig ist.

Da jedoch die surrealen Zahlen (bis auf eine kleine formale Feinheit) einen Körper bilden, können die bekannten Rechengesetze und Äquivalenzumformungen auf das Rechnen mit surrealen Zahlen übertragen werden.

Auch lasse ich die Beweise an dieser Stelle aus, da sie viel Platz benötigen und in den Quellen [[STondering]], [[SKnuth]] und [[SUnknown]] zu finden sind.

Anwendungen der surrealen Zahlen

In diesem Abschnitt werden Anwendungen der surrealen Zahlen vorgestellt. Dabei wird mit ω und ε nur symbolhaft umgegangen.

– Bestimmung des Verhaltens von Funktionen im Unendlichen

In der Einführung dieses Kapitels betrachtete ich zwei Funktionen f und g mit $f(x) = \frac{1}{x}$ und $g(x) = \frac{1}{x^2}$. Über den Grenzwertbegriff der reellen Zahlen findet man, dass $f(x)$ und $g(x)$ für $x \to \infty$ gegen Null gehen:

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

Ich sprach den augenscheinlichen Widerspruch an, dass der Graph von f (ab der Stelle 1) über dem von g verläuft, die Grenzwerte für $x \to \infty$ aber gleich sind.

Mithilfe der surrealen Zahlen kann man den Grundgedanken der Anschauung mit dem Grenzwertbegriff der reellen Zahlen vereinbaren. Anstatt der Grenzwertbetrachtung für $x \to \infty$ kann man im Surrealen für x einfach ω nehmen und $f(\omega)$ mit $g(\omega)$ vergleichen, also die Funktionswerte an der Stelle ω („Unendlich") ausrechnen:

$f(\omega) = \frac{1}{\omega} = \varepsilon$

$g(\omega) = \frac{1}{\omega^2} = \varepsilon^2 < \varepsilon$

$f(\omega)$ und $g(\omega)$ unterscheiden sich also beide nur um einen infinitesimalen Anteil (ε bzw. ε^2) von Null; das Ergebnis der Grenzwertbetrachtung spiegelt auf diese Weise wieder.

Zusätzlich wird aber anders als beim Grenzwertbegriff die Anschauung nicht verletzt: $g(\omega)$ und $f(\omega)$ sind zwar beide infinitesimal, trotzdem ist $g(\omega)$ aber kleiner als $f(\omega)$ – anschaulich: „f ist auch im Unendlichen größer als g."

– Bestimmung des Verhaltens von Funktionen an Polstellen

Wendet man den Grenzwertbegriff auf $f(x)$ und $g(x)$ für $x \to 0+$ an, so kommt man zum Ergebnis, dass f und g an der Stelle 0 eine Polstelle haben:

$\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0+} \frac{1}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0+} \frac{1}{x^2} = +\infty$

Das Argument der Anschauung, g steige doch stärker an als f, findet keine Entsprechung im Grenzwertbegriff, dem zufolge man lediglich aussagen kann, dass f und g beide an der Stelle 0 divergieren.

Bei einer entsprechenden Diskussion der Funktionen im Surrealen fließt die Anschauung hingegen durchaus ein – bei gleichzeitiger Erhaltung der Gültigkeit der Erkenntnisse der Grenzwertbetrachtung in einem gewissen Sinne.

Statt den Grenzwert für $x \to 0+$ zu untersuchen, kann man im Surrealen einfach eine positive infinitesimale Zahl, wie beispielsweise ε, als Funktionsargument nutzen:

$f(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} = \omega$

$g(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2} = \omega^2 > \omega$

Die Erkenntnis der Grenzwertbetrachtung – dass beide Funktionen an der Stelle 0 divergieren, wird dadurch wiedergespiegelt, dass $f(\varepsilon)$ und $g(\varepsilon)$ beide transfinite Zahlen sind. Zusätzlich wird aber die Anschauung nicht enttäuscht: Während f an der Stelle ε „erst bei ω“ ist, ist g „schon bei ω^2“.

– Beschreibung von Spielen im Rahmen der kombinatorischen Spieltheorie

Spiele mit zwei Spielern, bei denen die Spieler abwechselnd ziehen, es keine versteckte Informationen gibt (wie beispielsweise verdeckte Karten), der Spielverlauf nur von den Spielern und den Regeln, nicht aber vom Zufall (wie beispielsweise durch Würfel oder Mischen realisert) abhängt und derjenige Spieler verliert, der keine Zugmöglichkeiten mehr hat, können durch „Games“, eine Verallgemeinerung der surrealen Zahlen, sehr gut beschrieben werden. Die Spieler nennt man „linker“ bzw. „rechter Spieler“. [[SWikiDeSurr]], [[SWikiEnSurr]]

Games konstruiert und vergleicht man genau wie surreale Zahlen, nur lässt man die Beschränkung der Konstruktionsregel, kein Element der rechten Menge dürfe kleinergleich einem Element der linken Menge sein, weg.

Beispielsweise ist $(\{0\}, \{0\})$ kein Repräsentant einer surrealen Zahl, da die Konstruktionsregel verletzt wird, da $0 \leq 0$ ist, aber sehr wohl ein Game.

Die linke Menge L eines Games (L, R) enthält die Games, die die Spielsituationen beschreiben, die der linke Spieler, wenn er am Zug ist, durch seinen Zug erreichen kann. Die rechte Menge R enthält die Games, die die Spielsituationen beschreiben, die der rechte Spieler erreichen kann, wenn er am Zug ist.

- Beispielsweise beschreibt das Game $0 = (\{\}, \{\})$ eine Spielsituation, in der beide Spieler keine Zugmöglichkeit haben. Da laut den Spielregeln der Spieler verliert, der keine Zugmöglichkeit mehr hat, verliert bei einer Spielsituation, die durch das Game 0 beschrieben ist, der Spieler, der gerade am Zug ist.

- Das Game $1 = (\{0\}, \{\})$ beschreibt eine Situation, bei der der linke Spieler, sollte er am Zug sein, als einzige Zugmöglichkeit das Herstellen der Situation, die durch das Game 0 beschrieben ist, hat. Da beim Game 0 der Spieler verliert, der gerade am Zug ist, verliert also bei einer Situation, die durch das Game 1 beschrieben ist, der rechte Spieler, wenn ursprüngloch der linke Spieler am Zug war.

  Auch verliert der rechte Spieler, wenn nicht der linke Spieler, sondern er selbst bei der ursprünglichen Situation (Game 1) am Zug ist, da die rechte Menge von 1, $\{\}$, leer ist und er somit keine Zugmöglichkeiten hat.

  Das Game 1 beschreibt also eine Spielsituation, bei der, unabhängig davon, welcher Spieler am Zug ist, der rechte Spieler verliert.

- Beim Game $(-1) = (\{\}, \{0\})$ dagegen verliert der linke Spieler:

  Ist der linke Spieler am Zug, so hat er keine Zugmöglichkeiten, da die linke Menge von 1, $\{\}$, die leere Menge ist.

  Ist der rechte Spieler am Zug, so stellt er eine Situation her, die durch das Game $0 = (\{\}, \{\})$ beschrieben wird. Dann ist der linke Spieler am Zug und verliert, da die linke Menge von 0 leer ist, er also keine Zugmöglichkeiten hat.

Es stellt sich heraus, dass allgemein Games, die größer als 0 sind, Situationen beschreiben, bei denen der linke Spieler gewinnt, wenn er optimal spielt, und Games, die kleiner als 0 sind, Situationen beschreiben, bei denen der rechte Spieler gewinnt, wenn er optimal spielt.

Ist ein Game äquivalent zu 0, so beschreibt es Situationen, bei denen der Spieler gewinnt, der den nächsten Zug hat.

Anders als bei den surrealen Zahlen kann es bei den Games sein, dass ein Game weder kleiner, noch größer, noch gleich 0 ist. Solche Games nennt man „gegenüber 0 fuzzy“. Ein Beispiel für ein solches Game ist $* := (\{0\}, \{0\})$.

Bei Spielsituationen, die durch Games beschrieben werden, die zu 0 fuzzy sind, gewinnt der Spieler, der am Zug ist:

Ist beispielsweise bei Situationen, die durch das Game $*$ beschrieben werden, der linke Spieler am Zug, so stellt er eine Situation her, die durch das Game 0 beschrieben wird. Bei $0 = (\{\}, \{\})$ verliert der Spieler, der am Zug ist; also verliert der rechte Spieler, womit der linke gewinnt.

Ist bei Situationen, die das Game $*$ beschreibt, der rechte Spieler am Zug, so befindet sich der linke Spieler nach dem Zug des rechten Spielers in einer Situation, die durch das Game 0 beschrieben wird. Dementsprechend verliert der linke Spieler; der rechte gewinnt.

Die Games bilden keinen Körper, die Rechenoperatoren haben aber trotzdem sinnvolle Bedeutungen: Zerfällt beispielsweise beim Brettspiel Go (vor allem in Ostasien verbreitet) eine Partie in zwei kleinere, isolierte Partien, so ist das Game, das die Ursprungssituation beschreibt, äquivalent zur Summe der Games, die die isolierten Partien beschreiben.

Probleme und offene Fragen bei den surrealen Zahlen

– Größere Komplexität im Vergleich zum konventionellen Aufbau der Zahlenbereiche

Die faszinierenden Eigenschaften der surrealen Zahlen rühren von ihrer rekursiven Struktur her. Diese Struktur, die beispielsweise gegenüber der Struktur der natürlichen Zahlen nach Peano komplizierter ist, führt aber auch zu längeren Definitionen der Rechenoperatoren und so zu höherem Rechenaufwand, wenn man nicht auf der hohen Ebene der Symbolmanipulation arbeitet.

Insbesondere ist die mechanische Überprüfbarkeit nicht mehr so einfach gewährleistet, da die linke und rechte Menge eines Repräsentanten beliebig groß – auch unendlich groß – sein darf; im Allgemeinen kann ein Computer nicht unendlich viele Fälle in endlicher Zeit überprüfen.

Die Äquivalenzklassen bei den ganzen und rationalen Zahlen sind zwar auch unendlich groß; zum Rechnen benötigt man dort aber nur ein Element aus den Äquivalenzklassen.

Bei den surrealen Zahlen dagegen sind im Regelfall alle Elemente von linker und rechter Menge relevant.

– „Lücken“ in der Zahlengeraden

Ein weiteres Problem ergibt sich aus der Existenz von „Lücken“ auf der surrealen Zahlengeraden. „Lücken“ ist dabei nicht in dem Sinne zu verstehen, wie beispielsweise der Zahlenstrahl der natürlichen und ganzen Zahlen „Lücken“ enthält, da es nicht für jede zwei beliebige ganzen Zahlen eine Zahl gibt, die zwischen ihnen liegt.

Solche Art Lücken gibt es bei den surrealen Zahlen nicht; zwischen zwei beliebigen surreale Zahlen gibt es stets unendlich viele weitere surreale Zahlen.

Stattdessen treten Lücken im Zusammenhang mit transfiniten und infinitesimalen Zahlen auf. So gibt es beispielsweise eine Lücke zwischen den Repräsentanten der positiven reellen Zahlen und ω: Man erreicht über keine endliche Verkettung von Rechenoperationen reeller Zahlen ω,

$$\underbrace{1+1+1+1+1+1+\cdots}_{\text{endlich viele Summanden}} < \omega$$

Ähnliche Lücken gibt es auch zwischen ω und 2ω und zwischen den Repräsentanten positiver reeller Zahlen und Zahlen, die von Null nur infinitesimal entfernt sind:

$$\omega + \underbrace{1+1+1+1+1+1+\cdots}_{\text{endlich viele Summanden}} < 2\omega$$

$$\underbrace{1:2:2:2:2:2:\cdots}_{\text{endlich viele Divisionen}} > \varepsilon$$

– Stetigkeit, Differentiation und Integration

Aus den „Lücken“ in der Zahlengerade ergeben sich Probleme, wenn man versucht, den Stetigkeitsbegriff auf die surrealen Zahlen zu übertragen. Ist beispielsweise folgende Funkion f stetig oder nicht? (Man bedenke die Schwierigkeit, die problematische Stelle ω zu erreichen.)

$$f\colon x \mapsto f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < \omega \\ 1 & \text{für } x \geq \omega \end{cases}$$

Ohne einen präzisen Stetigkeitsbegriff ist eine formale Definition der Differentiation nicht möglich. Pionierarbeit leistet auf diesem Gebiet Antongiulio Fornasiero, dessen Dissertation **Integration on Surreal Numbers** (2004) Lösungen dieser Probleme zu beschreiben scheint.

– Probleme bei der Anwendung der surrealen Zahlen als „Grenzwertersatz“

Als Anwendungsbeispiel der surrealen Zahlen demonstrierte ich die Möglichkeit der Diskussion reeller Funktionen – den Grenzwert für $x \to \infty$ bzw. $x \to 0+$ ersetzte ich durch das Nutzen von ω bzw. ε als Funktionsargument.

Bei den einfachen Funktionen, die ich als Beispiele nutzte, hat dieses Verfahren auch gut funktioniert; ich habe aber nicht untersucht, inwieweit man den Grenzwertbegriff durch geeignetes Einsetzen surrealer Zahlen als Funktionsargumente bei komplizierteren reellen Funktionen ersetzen kann.

– Mengentheoretische Probleme

Mehrmals schrieb ich, die surrealen Zahlen bildeten bis auf eine kleine formale Feinheit einen Körper. Die Feinheit liegt darin, dass man den Körperbegriff so definiert hat, dass nur Mengen einen Körper bilden können; die Repräsentanten surrealer Zahlen, $\mathbb{S}$, sind aber keine Menge (!), sondern eine sog. echte Klasse.

Die Unterschiede zwischen Mengen und Klassen sind zu kompliziert, als dass ich sie hier genauer erläutern könnte. Für diese Einführung in die surrealen Zahlen genügt es zu wissen, dass die Repräsentanten surrealer Zahlen deswegen keine Menge sind, da sie bestimmte Axiome der Mengenlehre verletzen.

Abgesehen davon, dass $\mathbb{S}$ also keine Menge, sondern eine Klasse ist, gelten die Körpergesetze auf $\mathbb{S}$.

6.3.7 Zusammenfassung und Ausblick

Diese Facharbeit legt die mögliche Formalisierung des Aufbaus der natürlichen, ganzen, rationalen und surrealen Zahlen dar. Zentrale Konzepte sind dabei der Zählbegriff, der sich bei den natürlichen Zahlen unmittelbar in den Definitionen von $\mathbb{N}_0$ und den Operatoren wiederspiegelt, und die Paarbildung, mit der natürliche Zahlen zu den ganzen Zahlen, und ganze Zahlen zu den rationalen Zahlen kombiniert werden können.

Da die Definitionen der Operatoren und Relationen auf den natürlichen Zahlen rekursiv sind, ist es notwendig, zu überprüfen, ob die Definitionen als Arbeitsvorschriften – als Algorithmen – eingesetzt werden können.

Wichtig bei den ganzen Zahlen ist die Unterscheidung zwischen der strukturellen Gleichheit und der Äquivalenzrelation, die für ein sinnvolles Sprechen von Gleichheit notwendig ist.

Die Darstellung der reellen Zahlen ist wegen des umfangreichen Formalismus, der für eine rigorose Behandlung der reellen Zahlen erforderlich ist, in dieser Arbeit nur sehr kurz.

Auch werden die komplexen Zahlen hier nicht behandelt. Gerade die komplexen Zahlen bringen aber, insbesondere auf dem Gebiet der komplexen Analysis, eine Fülle neuer Ideen.

Während die Axiomatisierungen der natürlichen, ganzen, rationalen und reellen Zahlen im Rahmen der fortschreitenden Axiomatisierung der Mathematik im 20. Jahrhundert im Kontext der Mengenlehre gut erforscht sind, weiß man über die surrealen Zahlen noch vergleichsweise wenig.

Dies mag damit zusammenhängen, dass es wenig Veröffentlichungen über surreale Zahlen gibt; eine kurze Suche ergab, dass das Journal der Royal Society ebenso wie **Spektrum der Wissenschaft** noch nie über surreale Zahlen berichtete.

Erstaunlich erscheint vor allem, dass es auch bei arXiv nur ein einziges Papier über surreale Zahlen gibt. arXiv ist ein Archiv für digitale Artikel aus den Bereichen Physik, Mathematik, Informatik und Biologie, bei dem Artikel nicht einem Peer-Review unterzogen werden und es daher den Ruf hat, auch Herberge von Papieren zu sein, die dem akzeptierten Konsenz widersprechen.

Auch gibt es Diskussionen über die Formalisierung des Konzepts der surrealen Zahlen. Conway scheint nämlich oft so aufgefasst zu werden [[SDisk]], dass eine Einbettung der surrealen Zahlen in den Formalismus der Mengenlehre unnötig sei, ähnlich, wie es bei den natürlichen Zahlen nicht notwendig sei, 0 und S zu konkretisieren. Diese Meinung scheinen viele nicht positiv aufzunehmen.

Interesse erwecken die surrealen Zahlen eher in populärwissenschaftlichen Magazinen (wie beispielsweise [[SDiscover]]), wohl wegen der Existenz transfiniter und infinitesimaler surrealer Zahlen.

Mit der kürzlich geglückten Definition der Integration auf den surrealen Zahlen darf man aber gespannt sein, was die Zukunft in dieser Richtung bringt. Auch eine Ausarbeitung der surkomplexen Zahlen – die Übertragung der komplexen Zahlen in die surrealen Zahlen [[SSurcomplex]] – wäre spannend; zur Zeit gibt es bei Google nur knapp 500 Suchergebnisse für „surcomplex". Über die Anwendung der surrealen Zahlen zur Diskussion reeller Funktionen

Im Rahmen der Theorie der konventionellen Zahlenbereiche wäre interessant, Gründe für die mehrmals bemerkten Symmetrien zwischen den Operator- und Relationsdefinitionen der konventionellen Zahlenbereiche zu finden.

Literatur

[1] *1. Übungsblatt – Lösungsvorschlag, Mafl 1 – WS 2005/06*, Jürgen Gärtner, Technische Universität Berlin, 2005, abgerufen am 21.1.2007, `http://www.math.tu-berlin.de/~mafi1/aufgaben/uebungsblatt01_loesung.pdf`

[2] *Vollständige Induktion*, Dietmar Henke, 2006, abgerufen am 21.1.2007, `http://www.henked.de/begriffe/induktion.htm`

[3] *Maria-Theresia-Gymnasium München, Grundwissen Mathematik, 6. Klasse* [G8], Bernhard Horn, 2006, abgerufen am 23.1.2007, `http://www.mtg.musin.de/download/faecher/mathe/grundwissen/GW_Mathe-6-G8.pdf`

[4] *Giuseppe Peano*, Hubert Kennedy, Peremptory Publications, 2002, abgerufen am 22.1.2007, `http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Giuseppe_Peano&oldid=26494819`

[5] *Surreal Numbers: How Two Ex-Students Turned on to Pure Mathematics and Found Total Happiness*, Donald E. Knuth, 2006, ISBN 0-201-03812-9

[6] *Anschauungsmaterialien im Mathematikunterricht mit blinden und sehbehinderten Kindern*, Matthias Kosin, Humboldt-Universität zu Berlin, 2005, abgerufen am 21.1.2007, `http://www.reha.hu-berlin.de/blind/sonstiges/Mathematik.doc`

[7] *Grundmodelle zur Einführung der Multiplikation*, Melanie Reisenhofer, Universität Bayreuth, 1998, abgerufen am 21.1.2007, `http://did.mat.uni-bayreuth.de/~heike/Grundschule/Mathe/Arithmetik/Grundrechen/mult1.html`

[8] *Constructivism Is Difficult*, Eric Schechter, Vanderbilt University, 2001, abgerufen am 23.1.2007, `http://www.math.vanderbilt.edu/~schectex/papers/difficult.pdf`

[9] *Infinity Plus One, and Other Surreal Numbers*, Polly Shulman, DISCOVER Vol. 16 No. 12, 1995, abgerufen am 21.1.2007, `http://www.discover.com/issues/dec-95/features/infinityplusonea599/`

[10] *Aus Fehlern lernen und verwandte Themen*, Christian Strecker, Universität Bayreuth, 1999, abgerufen am 23.1.2007, `http://blk.mat.uni-bayreuth.de/material/db/33/fehler.pdf`

[11] *Surreal Numbers – An Introduction*, Claus Tøndering, 2005, abgerufen am 21.1.2007, `http://www.tondering.dk/claus/surreal.html`

[12] *Äquivalenzrelation*, Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, 2006, abgerufen am 21.1.2007, `http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=%C3%84quivalenzrelation&oldid=25025717`

[13] *Konstruktive Mathematik*, Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, 2007, abgerufen am 23.1.2007, `http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Konstruktive_Mathematik&oldid=26583122`

[14] *Natürliche Zahl*, Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, 2007, abgerufen am 21.1.2007, `http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Nat%C3%BCrliche_Zahl&oldid=26584030`

[15] *Rechenschieber*, Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, 2007, abgerufen am 21.1.2007, `http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Rechenschieber&oldid=26415760`

[16] *Richard Dedekind*, Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, 2007, abgerufen am 22.1.2007, `http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Richard_Dedekind&oldid=26416653`

[17] *Surreale Zahl*, Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, 2007, abgerufen am 21.1.2007, `http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Surreale_Zahl&oldid=25269202`

[18] *Surcomplex number*, Wikipedia, The Free Encyclopedia, 2006, abgerufen am 23.1.2007, `http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Surcomplex_number&oldid=43724216`

[19] *Surreal number*, Wikipedia, The Free Encyclopedia, 2007, abgerufen am 21.1.2007, `http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Surreal_number&oldid=88169078`

[20] *Hilbert's Program Then and Now*, Richard Zach, 2005, arXiv:math.LO/0508572 v1, abgerufen am 22.1.2007, `http://arxiv.org/abs/math.LO/0508572`,

[21] *FOM: Conway's foundational ideas*, Diskussion auf einer Mailingliste, 1999, abgerufen am 21.1.2007, `http://www.cs.nyu.edu/pipermail/fom/1999-May/003152.html`

[22] *Surreal Numbers*, unbekannter Autor, abgerufen am 21.1.2007, `http://www.uwec.edu/andersrn/SETSXI.pdf`

6.3.8 Erklärung zur Facharbeit

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet habe.

Insbesondere versichere ich, dass ich alle wörtlichen und sinngemäßen Übernahmen aus anderen Werken als solche kenntlich gemacht habe.

Augsburg, den 27.12.2006

29.12.2006
30.12.2006
31.12.2006
03.01.2007
03.01.2007
04.01.2007
05.01.2007
06.01.2007
07.01.2007
13.01.2007
14.01.2007
15.01.2007
16.01.2007
17.01.2007
18.01.2007
19.01.2007
20.01.2007
21.01.2007
22.01.2007
23.01.2007
12.01.2006

7 Sonstiges

7.1 Ungeklärte Fragen

- Wann setzt man das Semikolon?
- „Bei den Zahlen unterscheidet man nicht/kann man nicht unterscheiden zwischen »dem gleichen« (=) und »dem selben« (≡).“[4]

  Wieso nicht? Nehmen wir $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$, dann sind doch a,b mit $a = \frac{3}{4} = (3,4)$ und $b = \frac{6}{8} = (6,8)$ zwar sicher gleich (also $a = b$), aber nicht das gleiche Objekt (also $a \not\equiv b$), oder?
- Bedeutet $a \in A$ dass ein Element aus A gleich a ist (=) oder dass es ein Element das selbe Objekt wie a ist (≡)?
- „$\mathbb{Z}$ enthält auch alle natürlichen Zahlen, also $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.“
  - Annahme: Die Antwort auf die vorherige Frage ist „=“.

    Wie kann man natürliche Zahlen mit ganzen Vergleichen? Es handelt sich doch um verschiedene Strukturen (z.B. $42_{\mathbb{N}}$ gegen $(+, 42_{\mathbb{N}})$). Oder hat man $=$ so definiert, dass man nicht nur die Gleichheit von Zahlen aus den selben Zahlenmengen vergleichen kann, sondern auch dass man Zahlen aus verschiedenen Zahlenmengen vergleichen kann? Kurz: Ist $a = b$ mit (z.B.) $a \in \mathbb{N}$ und $b \in \mathbb{C}$ zulässig? (vgl. MMD (Multiple Method Dispatch) in der Informatik)

[4] Ich habe die Bedeutung von $=$ und $\equiv$ einem englischen Papier über Surreale Zahlen entnommen (»http://www.tondering.dk/claus/surreal.html«). $=$ bedeutet dort Gleichheit und unterscheidet sich qualitativ nicht von anderen Relationen. $\equiv$ dagegen ist „grundlegend“ und muss nicht extra für jede Menge bzw. für jeden Objekttyp definiert werden; $a \equiv b$ ist nur dann wahr, wenn a lediglich eine andere Bezeichnung für b ist; dabei spielt die Definition der Gleichheit ($=$; z.B. Gleichheit von $\frac{3}{4}$ mit $\frac{6}{8}$) keine Rolle.

- Annahme: Die Antwort auf die vorherige Frage ist „$\equiv$“.

  Dann ist doch die Aussage „$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$“ sicher falsch, oder? Beispielsweise ist $42_{\mathbb{N}}$ sicher nicht das selbe Objekt wie $42_{\mathbb{Z}} \equiv (+, 42_{\mathbb{N}})$.

- Ist das Einbeziehen von komplexen Zahlen in der Wahrscheinlichkeitsrechnung sinnvoll?

- Die „Menge aller Mengen“ $M = \{N \mid N \text{ ist eine Menge}\}$ existiert ja nicht (Russelsche Antinomie), stattdessen existiert aber die Klasse aller Mengen sehr wohl.

  Würde die „Klasse aller Klassen“ nicht einen ähnlichen Widerspruch wie die „Menge aller Mengen“ hervorrufen? Wie wird dieser Widerspruch axiomatisch verhindert?

  Was ist eine Klasse überhaupt?

- Gesucht sei die „maximale Definitionsmenge“ einer konstanten Funktion f mit $\mathrm{f}(x) = 42$. Die „maximale Definitionsmenge“ $D_{\mathrm{f}} = \{x \mid x \text{ ist ein Objekt}\}$ gibt es aber nicht (wieder Russelsche Antinomie), also muss man sich „notgedrungen“ auf „kleinere“ Mengen beschränken; korrekt?

- Man hat ja die Addition, Multiplikation etc. auch auf Funktionen übertragen, wobei $\mathrm{f} + \mathrm{g} = \mathrm{h}$ mit $\mathrm{h}(x) = \mathrm{f}(x) + \mathrm{g}(x)$.

  Nun habe ich auch schon „$\mathrm{f} + 42 = \mathrm{h}$“ gesehen (also mit $\mathrm{h}(x) = \mathrm{f}(x) + 42$„ gesehen; ist das lediglich eine Kurzschreibweise oder kann man 42 wirklich auch als Funktion auffassen (mit $42(x) = 42$)?

- Gibt es eine Schreibweise für die in der Informatik üblichen anonymen Funktionen?

  Beispiel: Die Funktion f, die $x \in \mathbb{N}$ die Funktion g mit $\mathrm{g}(t) = x + t$ zuordnet – kann man ihren Funktionsterm evtl. auch wie folgt schreiben?

  $\mathrm{f}(x) = (t \mapsto x + t)\,;$

- Was ist ein Term? Was unterscheidet einen Term von einer Funktion?

- Existiert die „Menge aller Funktionen“, oder gibt es auch hier wieder einen Widerspruch ala Russelscher Antinomie?

- Ich habe gelesen, dass man „umgangssprachlich“ sagen kann, dass die Klasse der Surrealen Zahlen (John Conway, 1974; „Surreal Numbers: How Two Ex-Students Turned on to Pure Mathematics and Found Total Happiness“ von Donald E. Knuth; „On Numbers and Games“ von Conway) „zu groß“ sei, um noch eine Menge zu sein.

  Wie ist das zu verstehen?

- Zu welcher Menge gehören die Kardinalzahlen? Ist es überhaupt möglich, eine „Menge aller Kardinalzahlen“ aufzustellen (evtl. wegen Widerspruch ala Russelscher Antinomie)?

  (Die Surrealen Zahlen enthalten die Kardinalzahlen, die Surrealen Zahlen bilden aber ja keine Menge, sondern eine Klasse.)

- Ist die Schreibweise „2^M“, wobei M eine beliebige (auch unendliche) Menge ist, nur eine Kurzschreibweise oder hat sie einen weiteren Hintergrund?

  Ist „M^2“ eine Kurzschreibweise? Wenn nein, kann man die Definition/ist es sinnvoll, die Definition zu erweitern auf M^x mit $x \in \mathbb{R}$ (oder sogar noch weiter)?

- „Obwohl $\mathbb{Q}$ dicht ist, gibt es trotzdem Zahlen, die nicht in $\mathbb{Q}$ enthalten sind (z.B. $\sqrt{2}$). Somit ist die Gleichung $x^2 = 2$ in $\mathbb{Q}$ nicht lösbar.“

  Dies ist zwar sicher richtig, aber was unterscheidet das Fehlen einer Lösung der Gleichung $x^2 = 2$ von dem der Gleichung $x^2 = -1$ und $\frac{42}{0} = a$?

  Überträgt man die Argumentation, so ist $\mathbb{R}$ (und auch $\mathbb{C}$) nicht „vollständig“, da die Lösung der Gleichung $\frac{42}{0} = a$ nicht in ihr vorkommt.

- Ist es sinnvoll, die Vielfachheit von Elementen von Multimengen auf $\mathbb{N}$ zu beschränken? Ist es sinnvoll, sie auf $\mathbb{R}$ oder sogar $\mathbb{C}$ zu erweitern?

- „Man kann zwar auch noch weitere Zahlenmengen als $\mathbb{C}$ konstruieren (z.B. $\mathbb{R}^4$), aber diese verlieren dann immer mehr Körpereigenschaften.“

  Wieso? Und wieso erfüllen die Surrealen Zahlen „trotzdem“ die Körperaxiome (abzüglich der Tatsache, dass die Surrealen

Zahlen keine Menge, sondern eine Klasse sind), sind wohlgeordnet und enthalten „sehr viel mehr“ Zahlen als $\mathbb{R}$ (z.B. Zahlen größer als 0 und kleiner als jede reelle Zahl (z.B. $\frac{1}{\omega} = \varepsilon$), Kardinalzahlen (z.B. ω) etc.)?

- Gödels Unvollständigkeitssatz besagt (sofern ich ihn richtig verstanden habe), dass es wahre Aussagen gibt, die trotzdem nicht beweisbar sind.

  Wie kann man von „wahren Aussagen“ sprechen, wenn doch die „Wahrheit“ (bzw. die „Richtigkeit“) über die Axiome definiert ist?

  Wenn man eine Aussage nicht auf die (als richtig definierten) Aussagen des Axiomensystems zurückführen kann – dann ist die Aussage doch nicht richtig, oder?

- Kann man das „Gleichheitszeichen der Physik“ ($\frac{1{,}00}{3{,}0000} = 0{,}333$) mathematisch untermauern?

- Was sind Einheiten? Gilt $0\,X = 0$ für jede Einheit X (von additiven Einheiten wie $^\circ\mathrm{C}$ einmal abgesehen)?

  Wie kann man mit Einheiten rechnen? Zu welcher Zahlenmenge gehört überhaupt (z.B.) $42\,\mathrm{m}$? Zu $\mathbb{R} \times \{\mathrm{m}\}$?

- Die Addition zusammen mit der Multiplikation über Funktionen über $\mathbb{R}$ bildet doch nur in bestimmen Fällen einen Körper – beispielsweise müssen die Definitionsmengen jeder vorkommenden Funktion gleich $\mathbb{R}$ sein, oder?

- Hat es einen bestimmten Grund, dass die „herkömmlichen“ Erweiterungen der reellen Zahlen (ich ziele also nicht auf z.B. die Surrealen Zahlen ab) immer aus Tupeln mit 2^k mit $k \in \{1, 2, 4, 8, 16, \ldots\}$ Komponenten bestehen? (z.B. $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, $\mathbb{H} = \mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$, etc.)

- Ich habe gelesen, dass es einen Unterschied zwischen $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{C}$ gibt. Welchen?

- Ist es sinnvoll, Tupel mit unendlich vielen Komponenten zuzulassen? (Definiert man (a, b, c) als $(a, (b, c))$ sollte dies doch kein Problem darstellen, da alle vorkommenden Unter-Paare nur zwei Komponenten enthalten, richtig?)

- „$\oint \mathcal{B}(s)\,\mathrm{d}s = \mu_0 I$ – dabei spielt die Wahl des Weges, entlang dessen man integriert, keine Rolle.“

  Ist dies eine spezielle Eigenschaft von $\mathcal{B}$-Feldern? (Meine Idee ist, dass sich $\mathcal{B}(s)$ so verhält – so zunimmt oder abnimmt, damit sich die Unterschiede, die sich durch unterschiedliche Wege ergeben, wieder herausrechnen.) Oder trifft dies auf alle „normalen“ Funktionen zu (Funktionen, die stetig sind, deren Definitionsmenge eine „durchgehende“ Teilmenge von $\mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{R}^3$) ist (also keine Punkte ausgeschlossen werden), etc.)?

- Was meint die Schreibweise $\langle \mathrm{f}, \mathrm{g} \rangle$ im Zusammenhang mit Integralen?

- „$\Omega = \left\{ \omega \mid \omega \in [10, 40] \right\}$ (»der Bus kommt zwischen 10 und 40 Zeiteinheiten nach Beginn der Zeitrechnung an«; Ω sei ein Laplace-Raum)“

  Wie kann man mit diesem Ergebnisraum (der ja überabzählbar unendlich ist) umgehen?

  Beschreibe A das Ereignis „der Bus kommt genau 30 Zeiteinheiten nach Beginn der Zeitrechnung an“, also $A = \{30\}$. Intuitiv müsste die Wahrscheinlichkeit des Eintretens von A 0 sein, korrekt?

  Beschreibe B das Ereignis „der Bus kommt zwischen 20 Zeiteinheiten und 30 nach Beginn der Zeitrechnung an“, also $B = \left\{ \omega \mid \omega \in [20, 30] \right\}$. Intuitiv müsste die Wahrscheinlichkeit des Eintretens von B $\frac{30-20}{40-10} = \frac{1}{3}$ sein, korrekt? Wie lässt sich das mathematisch begründen? (Man kann ja schlecht $P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|}$ ansetzen – sowohl B als auch Ω sind ja unendlich groß und ∞ bzw. $|\Omega|$ ist ja kein Element von $\mathbb{R}$.)

- Ist es sinnvoll, Surreale Zahlen in der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu nutzen? (Damit hätte man ja die Kardinalzahlen als „normale Zahlen“ (für die auch die Division definiert ist), zur Verfügung.)

7.2 Kurscharakteristik

01.03.2007
21.03.2007
22.03.2007
23.03.2007

Mathematik ist wie Fußball spielen: Nur weil man die Regeln kennt, ist man noch lange kein guter Spieler. . .

Die erste Frage, die sich uns bei der Überlegung, wie eine Charakteristik auszusehen hat, stellt, ist die, ob eine Form nicht viel mehr eine Denkgewohnheit als eine tatsächliche Notwendigkeit darstellt.

Wenn man nun nicht erkennt, dass Fragen dieser Art elementarer Bestandteil des wirklichen Mathematikunterrichts sind, offenbart man nur sein persönliches neurotisches Verhältnis zur Mathematik per se.

Diejenigen Menschen, auf die dies zutrifft, können eineindeutig – aber nicht surjektiv – auf die Menge derer abgebildet werden, die unter der Last von Schlagzeilen wie „seit wann sind wir nicht mehr sicher?!“ zusammenbrechen und durch Selbstoffenbarungen wie „ich habe Mathematik auch nie verstanden“ klarmachen, wie verdrängend und senil sie im Grunde sind.

Das bedeutet jetzt nicht, dass diese Leute dumm sind. Vielmehr liegt die Ursache des nicht gefundenen Ausgangs aus der mitunter jedoch selbst verschuldeten Unmündigkeit mit an Wahrscheinlichkeit grenzender Sicherheit in der Schizophrenie der heutigen Gesellschaft. Oder umgekehrt.

Dem Protagonisten des Grauen Alltags würde es – so scheint es zumindest – mehr Energie abverlangen, das Weltbild an die unleugbaren Gegebenheiten der „Realität“ anzupassen, als mit allen Mitteln das Existente zu flicken und abzustützen – selbst auf die erhebliche Gefahr hin, Tatsachen verdrehen zu müssen, damit sie der Wirklichkeitsauffassung nicht widersprechen: Finde ich heraus, dass Bester Freund mich immer belügt, so hat er mich nicht belogen, nein!, schließlich wäre er sonst nicht Bester Freund!

Die Mathematik als Brennspiegel, die nur betrachtet, was sowieso schon da ist, offenbart in ihrer Asinnigkeit diese Paradoxa. Im ständigen Bestreben des „normalen“ Schülers, seine Welt aufrechtzuerhalten, wehrt er sich daher gegen die Befreiung durch die Mathematik als einzig verbliebene Geisteswissenschaft am Gymnasium. Und damit ist er nicht alleine; auch der typische Bürger tut dies. Der Grund dafür ist klar; Befreiung tut weh, genau wie der Tropfen der Vernunft zischt, wenn er auf den erstarrten Kalk der Gesellschaft trifft.

Ein weiteres Problem ist, dass die Mathematik und der Mathematikunterricht im wahrsten Sinne des Wortes ex-klusiv sind und sich der „vernünftige“ Schüler (zu Recht) nach Jahren der Denk-Entfremdung gegen das Interesse am erwähnten Unterricht wehrt.

Schließlich ist der Grund für den Besuch des Gymnasiums ein rein pragmatischer – das Statussymbol Abitur wird angestrebt!

Wir sind letztendlich froh darüber, uns für den richtigen Leistungskurs entschieden zu haben. Wir fanden heraus, dass Steine vor Newton im wahrsten Sinne des Wortes ungesetzlich fielen, die elfte Klasse überflüssig war und (noch immer) ist, und wir mit Mathematik die richtige Wahl getroffen haben. Manchmal (ok, oft) tat es weh, doch zum Glück war es für uns noch nicht zu spät, den Zug der Vernunft zu erreichen. . .