08.02.2007

0.1 145. Hausaufgabe

0.1.1 Exzerpt von B. S. 500f.: Gesetz des radioaktiven Zerfalls

Stochastische Herleitung des Zerfallsgesetzes

Die gemessene Impulsrate von radioaktiven Präparaten nimmt mit der Zeit exponentiell ab. Dieses Verhalten kann man stochastisch wie folgt modellieren:

Man denkt sich das Präparat aus Teilchen bestehend. Pro Zeiteinheit Δt zerfällt jedes dieser Teilchen mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit $(1-p)$. Damit kann man einen Term für $N(t)$, also für die Anzahl der nicht-zerfallenen Teilchen nach Verstreichen der Zeit t, herleiten:

- $N(0\,\mathrm{s}) = N_0$;
- $N(\Delta t) = N_0 \cdot p$; (Erwartungswert der Trefferanzahl bei einer BERNOULLIkette der Länge N_0 und der Trefferwahrscheinlichkeit p)
- $N(2\Delta t) = (N_0 \cdot p) \cdot p = N_0 p^2$;
- $N(3\Delta t) = (N_0 \cdot p^2) \cdot p = N_0 p^3$;

  $\vdots$
- $N(k\Delta t) = N_0 p^k$;

Die Formel der letzten Zeile kann man umformen zu $N(t) = N_0 p^{t/\Delta t}$.

Charakterisierungsmöglichkeiten

Mit einem Zerfallsgesetz $N(t) = N_0 p^{t/\Delta t}$ mit entsprechendem Parameter $p/\Delta t$ kann jeder radioaktive Zerfall (von spontaner Kernfission abgesehen) treffend beschrieben werden.

– Halbwertszeit

Oft ist es praktischer, nicht p und Δt als Basis zu verwenden, sondern andere charakteristische Größen. So kann man beispielsweise die Überlebenswahrscheinlichkeit p pro Zeiteinheit Δt in eine Halbwertszeit τ überführen:

$N(t) = N_0 p^{t/\Delta t} \stackrel{!}{=} N_0 2^{-t/\tau}; \Leftrightarrow$

$p^{t/\Delta t} = 2^{-t/\tau}; \Leftrightarrow$

$\frac{t}{\Delta t} \operatorname{ld} p = -\frac{t}{\tau}; \Leftrightarrow$

$\tau = -\underbrace{\frac{1}{\operatorname{ld} p}}_{<0} \Delta t;$ ($\tau > 0$)

– $1/e$**-wertszeit**

Allgemeiner kann man nicht nur die Halbwertszeit zur Charakterisierung nutzen, sondern auch Zeiten zu anderen Basen. Besonders beliebt ist dabei die $1/e$-wertszeit:

$N(t) = N_0 p^{t/\Delta t} \stackrel{!}{=} N_0 e^{-t/\kappa}; \Leftrightarrow$

$\kappa = -\underbrace{\frac{1}{\ln p}}_{<0} \Delta t;$ ($\kappa > 0$)

– Zerfallskonstante

Alternatv kann man auch den Kehrwert λ der $1/e$-wertszeit κ, $\lambda = \frac{1}{\kappa}$, zur Beschreibung nutzen:

$N(t) = N_0 e^{-\lambda t};$

Aktivität

Über Messungen direkt zugänglich ist nicht die Anzahl der nichtzerfallenen Teilchen $N(t)$, sondern lediglich die Impulsrate $n(t)$, also die Anzahl radioaktiver Zerfälle pro Zeiteinheit.

Da mit einem detektierbaren Abstrahlereigniss immer auch genau ein Zerfall verknüpft ist, gibt $n(t)$ einfach die (negative) Änderung der Anzahl nicht-zerfallener Teilchen, $N(t)$, an:

$n(t) = -A(t) = -\dot{N}(t) = -N_0 e^{-t/\kappa} \cdot \left(-\frac{1}{\kappa}\right) = \frac{N_0}{\kappa} e^{-t/\kappa} = \frac{1}{\kappa} N(t);$

Analog ist die Situation bei der Entladung eines Kondensators: Direkt messbar ist nur der Entladestrom $I(t) = \dot{Q}(t)$, nicht aber die Ladung $Q(t)$ des Kondensators.

[XXX: Impulsrate ist die Rate, die bspw. in einem Zählrohr gemessen wird – also nicht die gesamte Anzahl radioaktiver Zerfälle, sondern nur der Anteil, der in die Richtung des Zählrohrs geht (Hüllkugel etc.)]

(Benötigte Zeit: 62 min)