18.10.2005

0.1 15. Hausaufgabe

0.1.1 Buch Seite 201 nach „$F = Dx$“ übertragen

Dehnen einer Feder bedeutet mechanische Arbeit. Es soll nun die Energie berechnet werden, die von der Quelle mechanischer Arbeit während des Dehnens geliefert wird. Zur Vereinfachung stellt man sich vor, dass man die Dehnung schrittweise aufbaut, jeweils in gleichen Teillängen Δx. Für die erste Dehnung braucht keine Energie aufgebracht zu werden, da die Feder noch nicht gespannt ist. Danach wird die Teilenergie

$\Delta W_i = F_i \Delta x$

mit zunehmender benötigter Kraft F_i immer größer. Die gesamte Energie erhält man angenähert durch Addition der Teilenergien für die einzelnen Δx, genauer durch Integration:

$W_{\text{ges}} = \lim\limits_{i \to \infty} \sum\limits_{i}^{i_{\text{ges}}} F_i \Delta x = \int\limits_0^{x_{\text{ges}}} F \, \mathrm{d}x.$

Die darin vorkommende Kraft hängt nach $F = Dx$ von der jeweils schon vorhandenen Dehnung x ab. Damit erhält man

$W_{\text{ges}} = D \int\limits_0^{x_{\text{ges}}} F \, \mathrm{d}x$ und kann integrieren:

$W_{\text{ges}} = \frac{1}{2} D x_{\text{ges}}^2.$

Mit $x_{\text{ges}} = \frac{F_{\text{ges}}}{D}$ kann man den Ausdruck auch umformen:

$W_{\text{ges}} = \frac{1}{2} F_{\text{ges}} x_{\text{ges}} \quad \text{oder} \quad W_{\text{ges}} = \frac{1}{2} \frac{F_{\text{ges}}^2}{D}.$

Dieses Ergebnis ist wegen des linearen Zusammenhangs von F und x auch ohne Integration bereits aus der Zeichnung als Flächeninhalt des Dreiecks unter der F-x-Geraden ablesbar: $W = \frac{1}{2} F x$.

Damit ist die Energie berechnet worden, die man beim Dehnen einer Feder der Federhärte D aufbringen muss. Diese Energie ist dann in der Feder als potentielle Energie gespeichert.

> Die potentielle Energie einer um die Länge x gedehnten Feder der Federhärte D ist
> $W_{\text{pot}} = \frac{1}{2} D x^2 = \frac{1}{2} F x = \frac{1}{2} \frac{F^2}{D}.$

Es macht auch Sinn, von einer Energiedichte innerhalb der Feder zu sprechen.

> Die Energiedichte ϱ_{pot} an einem Ort der Feder ist der Quotient aus der Energie ΔW, die die Feder an diesem Ort in einem umgebenden Volumen ΔV enthält, und dem Volumen ΔV:
> $\varrho_{\text{pot}} = \frac{\Delta W}{\Delta V} = \frac{\frac{1}{2} D x^2}{\pi r^2 l}$.

(Benötigte Zeit: 49 min)