19.12.2005

0.1 38. Hausaufgabe

0.1.1 Zusammenfassung des Themas „Linienintegral“ (inkl. Definition des mathematischen Weges)

Das „normale“ Integral wie im Unterricht eingeführt operiert stets auf einer eindimensionalen Zahlengerade (meistens der x-Achse).

Der Begriff des Linienintegrals (auch Wegintegral oder Kurvenintegral, im Englischen path integral oder line integral) erweitert nun diesen Begriff.

Um seine Definition zu verstehen, muss man wissen, was im mathematischen Sinne ein Weg ist, denn beim Linienintegral integriert man entlang eines Weges.

Ein Weg ist eine stetige Funktion γ von einem Intervall $[a, b]$ nach $\mathbb{R}^n$. Lässt man in $\gamma(t)$ alle Werte für t aus $[a, b]$ durchlaufen, betrachtet man also die Bild- bzw. Wertemenge von γ, so erhält man eine Kurve.

Ist beispielsweise $\gamma(t) = 2t$, $a = -1$ und $b = 3$, so beschreibt dieser Weg das Geradenstück von $y = 2t$ zwischen -1 und 3, also die gerade Strecke von $(-1, -2)$ bis $(3, 6)$.

Anderes Beispiel: Die Wege γ_1 und γ_2 mit $\gamma_1(t) = |t|$ und $\gamma_2(t) = t$ ($a = 0$, $b = 3$) beschreiben dieselbe Kurve.

Ein Weg γ ist geschlossen, wenn gilt: $\gamma(a) = \gamma(b)$. (Dies ist unmittelbar einsichtig.)

Die Definitionsmenge eines Weges muss eine Teilmenge der reellen Zahlen sein, beispielsweise ist eine stetige Funktion von $\{1, 2, 3\}$ nach $\mathbb{R}$ kein Weg. Man hat die Einschränkung auf die reellen Zahlen deswegen getroffen, damit man einfacher rechnen kann – in $\mathbb{Q}$ sind nicht alle Grenzwerte enthalten.

Jetzt kann das Linienintegral definiert werden:

Integriert man eine Funktion f von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$ (also beispielsweise könnte $\mathrm{f}(x, y, z) = \mathcal{B}(x, y, z)$ sein) entlang eines Weges γ (einer Funktion von $[a, b]$ nach $\mathbb{R}$), so schreibt man:

$$\int_\gamma \mathrm{f}(z)\,\mathrm{d}z := \int\limits_a^b \mathrm{f}(\gamma(t))\,|\dot\gamma(t)|\,\mathrm{d}t;$$

Ist der Weg γ geschlossen, gilt also $\gamma(a) = \gamma(b)$, kennzeichnet man das besonders:

$$\oint_\gamma \mathrm{f}(z)\,\mathrm{d}z := \int\limits_a^b \mathrm{f}(\gamma(t))\,|\dot\gamma(t)|\,\mathrm{d}t;$$

Es ist auch ersichtlich, dass, wenn wir die „normale“ Integration durch das Linienintegral ausdrücken wollen, wir als Weg also einen Teil der x-Achse nehmen, wir γ so wählen müssen, dass γ eine Funktion von $[a,b]$ nach $\mathbb{R}$ mit $\gamma(x) = x$ ist. Es ergibt sich dann:

$$\int_\gamma \mathrm{f}(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_a^b \mathrm{f}(\gamma(t))\,|1|\,\mathrm{d}t = \int\limits_a^b \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t;$$

Damit ist gezeigt, dass unsere traditionelle Integration nur ein Spezialfall der Integration entlang eines Weges ist.

Bei $\oint$-Integralen vernachlässigt man oft die Angabe des Weges, entlang dessen man integriert. Dies hat den Grund, dass bei Feldintegrationen oftmals der Weg keine Rolle spielt, solange er nur geschlossen ist!

Hat man beispielsweise $\oint \mathcal{B}(z)\,\mathrm{d}z$ vorliegen, so ist es egal, welchen Weg man zur Berechnung heranzieht (man wird der Einfachheit halber meistens einen konzentrischen Kreis nehmen) – $\mathcal{B}$ verhält sich so, dass sich die „zu viel“ bzw. „zu wenig“ genommenen „Flächenstücke“ (in Bildern der Streifenmethode gesprochen) sich gegenseitig herausrechnen.

0.1.2 $U_n(t)$ bei einem durch eine Spule fallenden Stabmagneten

Ein Stabmagnet der Polstärke $\phi = 50\,\mu\mathrm{Vs}$ fällt durch eine Spule mit n Windungen. Mit einem Spannungsmessgerät wird die Induktionsspannung gemessen. Wie verhält sich $U_n(t)$?

Wir wissen bereits, dass gilt:

$U_n(t) = n\dot\phi(t);$

Gesucht ist also $\phi(t)$. Zwar ist die Polstärke des Stabmagneten zu jedem Zeitpunkt konstant, jedoch ändert sich beim Hindurchfallen durch die Spule seine Entfernung zu den einzelnen Windungen.

Uns ist jedoch keine Formel für $\phi(x, i)$ bekannt (wobei x die Entfernung zur i-ten Windung angäbe), weswegen die gestellte Aufgabe für uns unlösbar ist.

Ein weiteres Problem wäre außerdem noch, die einzelnen Induktionsspannungen an jeder Windung zu addieren. Da weder n noch der Abstand der einzelnen Windungen voneinander gegeben ist, müsste man mit Grenzwerten rechnen ($\Delta x \to 0\,\mathrm{cm}$).

(Benötigte Zeit: 63 min)