24.01.2006

0.1 47. Hausaufgabe

0.1.1 Zusammenfassung der Stunde: Schnurmodell zum elektromagnetischen Schwingkreis

Das Konzept des Schnurmodells hatten wir uns ja bereits als Analogon zu elektrischen Stromkreisen behandelt. Nun wollen wir auf die Unterscheidung zwischen elastischen und trägen Elementen eingehen.

Elastische Elemente können Energie speichern, sie sind Energiespeicher. Im Elektrischen ist ein Kondensator solch ein elastisches Element; seine Energie errechnet sich zu $E = \frac{1}{2}\frac{1}{C}Q^2 \left[1 \cdot \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{C}}\mathrm{C}^2 = 1\,\mathrm{J}\right]$.

Im Mechanischen ist eine an die Schnur geheftete Gummimembran (oder auch eine Feder), versteckt in einer Blackbox, ein elastisches Element. Dort errechnet sich die Energie zu $E = \frac{1}{2}Dx^2$ $\left[1 \cdot \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\mathrm{m}^2 = 1\,\mathrm{J}\right]$.

Verbindet man im Elektrischen einen Kondensator leitend mit einer Spannungsquelle, fließt kurzzeitig ein Strom – so lange, bis – im Mechanischen – die Maximalauslenkung der Gummimembran erreicht ist. Auf der einen Seite fließen (z.B.) negative Ladungen in den Kondensator hinein, auf der anderen fließen sie wieder heraus (obwohl keine Ladungsträger zwischen den Kondensatorplatten selbst fließen; vgl. Verschiebungsstrom): die Zahl der positiven Ladungen auf der rechten Seite hat sich verringert.

Auch im Mechanischen „verschwindet“ Schnur auf der einen Seite und „taucht“ auf der anderen Seite wieder auf – die Analogie trägt.

Träge Elemente sind ebenfalls Energiespeicher. Im Mechanischen ist ein Schwungrad solch ein Element; seine Energie errechnet sich zu $E = \frac{1}{2}m_{\mathrm{eff}}v^2$ $\left[1 \cdot \mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} = 1\,\mathrm{J}\right]$. Ein Schwungrad gilt deswegen als träges Element, weil es träge ist – man benötigt Energie, um ein stillstehendes Schwungrad in Bewegung zu versetzen, und man benötigt ebenfalls Energie, um ein sich drehendes Schwungrad wieder abzubremsen; allgemein: man benötigt Energie, um den Bewegungszustand zu ändern.

Die Kraft, die man aufbringen muss, um das Rad zu beschleunigen oder abzubremsen, berechnet sich nach der bekannten Formel $F =$

$m_{\text{eff}}\dot{v} = m_{\text{eff}}a \ \left[1\,\mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 1\,\mathrm{N}\right]$. Dabei beschreibt $\dot{v}$ gerade die Änderung des Bewegungszustands.

Im Elektrischen entspricht dem Schwungrad eine Spule der Induktivität L. Die Spulenenergie errechnet sich zu $E = \frac{1}{2}LI^2 \ \left[1 \cdot \frac{\mathrm{V \cdot s^2}}{\mathrm{C}}\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{s}^2} = 1\,\mathrm{J}\right]$. Eine Spule gilt deswegen als träges Element, weil sie träge ist – man benötigt Energie, um die Stärke des durch sie hindurchfließenden Stroms I zu ändern.

Die Spannung, die überwunden werden muss, um I zu ändern, errechnet sich zu $U = L\dot{I} \ \left[1\,\frac{\mathrm{V \cdot s^2}}{\mathrm{C}}\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{s}^2} = 1\,\mathrm{V}\right]$. Dabei beschreibt $\dot{I}$ gerade die Änderung der Stromstärke.

Kombiniert man ein träges Element mit einem elastischen, so erhält man einen Schwingkreis. Einmal angestoßen, erhält man (unter Vernachlässigung der Reibung) eine andauernde Schwingung: im Mechanischen fließt die Schnur (z.B.) zuerst nach rechts, bewegt sich dann gar nicht, fließt nach links, bewegt sich wieder nicht, usw.

Diese Schwingung erfolgt mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω. Bei der Aufstellung der den Schwingkreis beschreibenden Gleichungen muss der Energieerhaltungssatz bzw. die Gegengleichheit von Kraft und Gegenkraft beachtet werden:

$Dx + m_{\text{eff}}a = 0$

$Dx + m_{\text{eff}}\ddot{x} = 0$

D und m_{eff} sind positiv; also muss entweder x oder $\ddot{x} = \dot{v} = a$ negativ sein, um die Gleichung zu erfüllen.

Stellt man die Gleichung fürs Elektrische auf, so muss man wieder die Gegengleichheit beachten. Allerdings fällt dies im Elektrischen wesentlich mehr auf, als im Mechanischen: im Mechanischen ist man der Gegengleichheit von Kraft und Gegenkraft bewusst, und die unterschiedlichen Vorzeichen verstehen sich von selbst.

Im Elektrischen dagegen ist man diesen – eigentlich grundlegenden – Sachverhalt nicht gewohnt. Die zugrunde liegenden mathematischen Zusammenhänge sind aber dieselben.

Das Pendant zur Kraft im Mechanischen ist im Elektrischen die Spannung, also lautet die Gleichung:

$\frac{1}{C}Q + L\dot{I} = 0$

$\frac{1}{C}Q + L\ddot{Q} = 0$

Auch hier muss entweder Q oder $\ddot{Q} = \dot{I}$ negativ sein. Auffallend ist die große Symmetrie in der Differentialgleichung:

$k_1 x + k_2 \ddot{x} = 0,$

wobei k_1 und k_2 Konstanten sind und x das jeweilige Pendant zur Ladung beschreibt.

Löst man diese Gleichung auf (mit $\dot{x} = \hat{\dot{x}} \sin \omega t$), erhält man die Winkelgeschwindigkeit der Schwingung:

$k_1 - k_2\omega^2 = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k_1}{k_2}}$

Setzt man wieder die ursprünglichen Bezeichner für k_1 und k_2 ein, erhält man:

$\omega = \frac{1}{\sqrt{CL}}$ beim elektromagnetischen Schwingkreis und

$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$ im Mechanischen

0.1.2 Übertragung von B. S. 275 aufs mechanische Modell

Die Schwingungen in einem elektrischen Schwingkreis lassen sich mit den Schwingungen im Schnurmodell vergleichen. Dargestellt sind die Verhältnisse für die ungedämpfte Schwingung:

a) Die Gummimembran ist maximal ausgelenkt, die Zugkraft ist $\hat{F}$. Die Schnur bewegt sich nicht. In der Blackbox ist die Federenergie $E_{\text{Feder}} = \frac{1}{2}\frac{1}{D}\hat{F}^2$ gespeichert.

(Die Größe $\frac{1}{D}$ ist ein Maß für die Weichheit/Nachgiebigkeit der Feder. Sie entspricht der Kapazität im Elektrischen. (vgl. auch $\frac{1}{v}$ $\left[\frac{\text{s}}{\text{m}}\right]$ („Langsamkeit“)))

b) Die Gummimembran entspannt sich mit zunehmender Schnurgeschwindigkeit [in die andere Richtung]. Die Bewegungsenergie des Rads wächst in gleichem Maße, wie die Federenergie der Gummimembran abnimmt: $E_{\text{Feder}} + E_{\text{Rad}}$ ist konstant.

c) Die Gummimembran ist vollständig entspannt und besitzt keine Federenergie mehr. Die Schnurgeschwindigkeit hat ihre größten Wert $\hat{v}$ erreicht. Die Energie des Rads beträgt nun $E_{\text{Rad}} = \frac{1}{2}m_{\text{eff}}v^2$.

d) Die Trägheit des Schwungrads bewirkt das Weiterfließen der Schnur über den entspannten Zustand hinaus. Die Schnurgeschwindigkeit und die Radenergie nehmen ab. Die Gummimembran spannt sich in entgegengesetzter Richtung und gewinnt wieder Federenergie.

e) Die Gummimembran ist vollständig entgegengesetzt ausgelenkt. Die Schnur bewegt sich nicht.

Die Vorgänge wiederholen sich nun in umgekehrter Richtung.

(Benötigte Zeit: 119 min)